

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/2/076

(S: Varianten)

Bestimmung des Abstands eines Punktes von einem Unterraum (3)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$\langle f, g \rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$$

definiert ist, wobei $f, g \in P_n$ Polynome

$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$g = b_0 + b_1X + \dots + b_nX^n \in P_n, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

bezeichnen.

Gegeben sind die Polynome

$$f_1 = 9X^2 + 7X + 11, \quad f_2 = X^2 + 11X + 7,$$

$$f_3 = 9X^2 + 7X + 7, \quad f_4 = 7X^2 + 7X + 11.$$

- (1) Bestimmen Sie das Polynom g mit $\deg(g) \leq 2$, das denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat.
- (2) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und f_1 .
- (3) Zeigen Sie, dass $h = g + a_3X^3 + a_4X^4 + \dots + a_nX^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ebenfalls denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat und bestimmen Sie den Abstand zwischen h und f_1 .

Lösung. Es sei $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 \in P$ ein Polynom, das denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat. Es gilt

$$d(g, f_1)^2 = (b_2 - 9)^2 + (b_1 - 7)^2 + (b_0 - 11)^2 =$$

$$d(g, f_2)^2 = (b_2 - 1)^2 + (b_1 - 11)^2 + (b_0 - 7)^2 =$$

$$d(g, f_3)^2 = (b_2 - 9)^2 + (b_1 - 7)^2 + (b_0 - 7)^2 =$$

$$d(g, f_4)^2 = (b_2 - 7)^2 + (b_1 - 7)^2 + (b_0 - 11)^2,$$

wobei $d(g, f_i)$ den Abstand zwischen g und f_i bezeichnet. Da sich Quadrate auf den verschiedenen Seiten der so erhaltenen Gleichungen aufheben, erhalten wir $b_2 = 8$, $b_1 = 15$, $b_0 = 9$ und so die Lösungen für (1) und (2) als

$$g = 8X^2 + 15X + 9, \quad d(g, f_1) = \sqrt{69}.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.