Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/2/240 (S: Varianten)
Gramsche Matrix (2)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orientiertes Volumen, gramsche Matrix

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ sei eine Basis im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum V mit dem Skalarprodukt $<,>$ und $\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2' \in V$.
Berechnen Sie die *gramsche Matrix* $\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) := (<\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j>)_{1\le i,j\le 2}$ der Basis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, falls

$$\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2') = \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

ist und die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ für $\boldsymbol{b}_1$ durch $(-2, -7)$ bzw. für $\boldsymbol{b}_2$ durch $(-1, -4)$ gegeben sind.

Lösung. Offenbar sind $\boldsymbol{b}_1'$ und $\boldsymbol{b}_2'$ linear unabhängig. Es sei $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2')$ und

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$. Dann ist

$$U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Nun sei $U = (u_{i,j})$. Dann ist $\boldsymbol{b}_i = \sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}_r'$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) &= \Big(<\sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}_r', \sum_s u_{sj}\boldsymbol{b}_s'>\Big) \\ &= \Big(\sum_{r,s} u_{ri} <\boldsymbol{b}_r', \boldsymbol{b}_s'> u_{sj}\Big) = {}^{\mathrm{t}}U \cdot \mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2') \cdot U \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 & -14 \\ -14 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.