

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◀ zur Fundstelle

Aufgabe 6/2/250

(S: Varianten)

Gramsche Matrix (3)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orientiertes Volumen, Gramsche Matrix

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ sei eine Basis im unitären Vektorraum V mit der positiv definiten hermiteschen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2 \in V$. Berechnen Sie die *Gramsche Matrix* $\text{GM}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) := (\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 2}$ der Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, falls

$$\text{GM}(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2) = \begin{pmatrix} 46 & (-i + 15) \\ (-i + 15) & 15 \end{pmatrix}$$

ist und bezüglich $\mathcal{B}$ die Koordinaten von $\mathbf{b}_1$ durch $((3i - 2), (i + 3))$ bzw. von $\mathbf{b}_2$ durch $((3i - 3), (2i + 3))$ gegeben sind.

Lösung. Offenbar sind $\mathbf{b}'_1$ und $\mathbf{b}'_2$ linear unabhängig. Es sei $\mathcal{B}' = (\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2)$ und

$$U_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (3i - 2) & (3i - 3) \\ (i + 3) & (2i + 3) \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$. Dann ist

$$U := U_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} (3i - 2) & (3i + 3) \\ (-3i + 1) & (-2i - 3) \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Wir setzen $U = (u_{i,j})$. Dann ist $\mathbf{b}_i = \sum_r u_{ri} \mathbf{b}'_r$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{GM}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) &= (\langle \sum_r u_{ri} \mathbf{b}'_r, \sum_s u_{sj} \mathbf{b}'_s \rangle) \\ &= \left(\sum \bar{u}_{ri} \langle \mathbf{b}'_r, \mathbf{b}'_s \rangle u_{sj} \right) = {}^t \bar{U} \cdot \text{GM}(\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2) \cdot U \\ &= \begin{pmatrix} (-3i + 2) & (3i + 1) \\ (-3i + 3) & (2i - 3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 46 & (-i + 15) \\ (-i + 15) & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (3i - 2) & (3i + 3) \\ (-3i + 1) & (-2i - 3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (22i + 418) & (-474i + 118) \\ (486i + 68) & (30i + 573) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.