Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

**Aufgabensammlung**[1]
**Lineare Algebra individuell** ◁ zur Fundstelle

**Aufgabe** 6/2/270 (S: Varianten)
Fläche und Volumen

**Index:** kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt, Fläche eines Parallelogramms, Volumen eines Parallelepipeds, gramsche Determinante

**Stoffeinheiten:** 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

$A = (2, 3, 2)$, $B = (3, 3, 2)$, $C = (-1, 2, 1)$ seien Punkte des euklidischen affinen Standardraumes $\mathbb{R}^3$.

(1) Überprüfen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts, dass der Koordinatenursprung $O := (0, 0, 0)$ nicht in der Ebene liegt, die durch $A$, $B$, $C$ verläuft.

(2) Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das durch die Ecken $ABC$ gegeben ist.

(3) Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das durch $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ definiert ist.

**Lösung.** Wir wählen die kanonische Orientierung auf $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen mit $D$ die entsprechende Determinantenfunktion. Dann ist $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ das orientierte Volumen des durch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ definierten Parallelepipeds und es gilt

$$|{<}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}{>}| = D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\,.$$

Zu (1) bemerken wir, dass $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 1 \neq 0$ ist; dies ist gleichzeitig das in (3) erfragte Volumen.

Die offensichtliche Interpretation des Begriffs „Fläche“ unter (2) ergibt sich nun, indem die Ebene in $\mathbb{R}^3$, die $A$, $B$, $C$ enthält, auf natürliche Weise als euklidischer affiner Raum angesehen wird. Es folgt

$$F = \|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})\| = \sqrt{2}.$$

---

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.