Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/010 (S: Varianten)
Spektralzerlegung (1)

Index: Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Endomorphismus, selbstadjungierter Operator, Orthonormalbasis, Eigenvektor einer Matrix, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

Für die folgenden Matrizen A, B ist jeweils eine Orthonormalbasis des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ zu finden, die aus Eigenvektoren besteht.

(1) $$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -8 & -11 & -2 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

(2) $$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -16 & 8 \\ -16 & -7 & 8 \\ 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

(1) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix A; sie ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X\cdot \mathrm{E}_3 - A) = (X+1)\cdot(X-1)\cdot(X+2)\,,$$

das wir (um unnötige Brüche zu vermeiden) zweckmäßig mittels

$$9^3\cdot\chi_A = \det\begin{pmatrix} 9X+5 & 8 & -10 \\ 8 & 9X+11 & 2 \\ -10 & 2 & 9X+2 \end{pmatrix}$$
$$= X^3 + 2X^2 - X - 2$$

berechnet haben. Die Nullstellen sind paarweise verschieden, d.h. jeder der Eigenräume ist eindimensional. Daher genügt es, für jeden Eigenwert λ einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektor im Lösungsraum des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems zu wählen und zu normieren. So finden wir eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-1,2,2), \frac{1}{3}(2,-1,2), \frac{1}{3}(2,2,-1)\Big)\,.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

(2) In diesem Fall wird zunächst analog vorgegangen: Es ist

$$\chi_B = \det(X\cdot \mathrm{E}_3 - B) = (X+3)\cdot(X-1)^2\,,$$

und für den Eigenwert $\lambda_1 = -3$ ergibt sich ein Eigenvektor $(2, 2, -1)$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 1$ jedoch ist zweidimensional. Wir bestimmen eine Basis, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen (wobei wieder in der charakteristischen Gleichung Brüche vermieden wurden); wir erhalten mit dem gaußschen Algorithmus (oder „auf den ersten Blick“)

$$\mathcal{B}' = ((-1, 1, 0), (1, 0, 2))\,.$$

Nach dem Orthogonalisierungsverfahren entsteht daraus

$$\mathcal{B}'_{\mathrm{orth}} = ((-1, 1, 0), (1, 1, 4))\,, \text{ d.h.}$$

$$\mathcal{B} = ((2, 2, -1), (-1, 1, 0), (1, 1, 4))$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix B besteht. Aus $\mathcal{B}$ ergibt sich eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(2, 2, -1), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0), \frac{\sqrt{2}}{6}(1, 1, 4)\Big)\,.$$

Anmerkungen. Die Rechnung lässt sich im Fall (2) noch vereinfachen, wenn anstelle der schon wiederholt verwendeten Standardmethode zur Bestimmung des Eigenraumes das orthogonale Komplement zum Eigenraum $V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2}^{\perp}$ bestimmt wird.

Unter (2) ist leicht zu erkennen, dass die Aufgabe (da ein mehrfacher Eigenwert existiert) unendlich viele Lösungen besitzt. Manchmal sind mit etwas Glück und rechnerischem Geschick sogar noch „bessere“ zu finden, wie im vorliegenden Fall die Basis

$$\Big(\frac{1}{3}\cdot(2, 2, -1), \frac{1}{3}\cdot(-1, 2, 2), \frac{1}{3}\cdot(-2, 1, -2)\Big)\,,$$

auf die wir bei systematischem Vorgehen mit dem gaußschen Algorithmus nicht gekommen sind.