Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/140 (S: Varianten)
Ebene Quadriken (3)

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken, Bewegung eines euklidischen affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom

$$f = 2X_1^2 - 12X_1X_2 + 18X_2^2 + X_1 - X_2 - 4 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$$

eine Bewegung der affinen euklidischen Standardebene an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\;X_2\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_0 = -4.$$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_2 - A) = X^2 - 20X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 20$ und $\lambda_2 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = \lambda_1 x$, d.h. gleichbedeutend das System

$$\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1, -3)$ erzeugt, und da der Eigenraum des anderen Eigenwertes orthogonal zu diesem ist, ergibt sich nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -3), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, 1)\,.$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 20Y_1^2 + \frac{2}{5}\sqrt{10}Y_1 + \frac{1}{5}\sqrt{10}Y_2 - 4$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$f = 20(Y_1 + \frac{1}{100}\sqrt{10})^2 + \frac{1}{5}\sqrt{10}Y_2 - \frac{201}{50}.$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \frac{1}{100}\sqrt{10}, \quad Y_2 = Z_2 + \frac{201}{100}\sqrt{10}$$

erhalten wir

$$f = 20Z_1^2 + \frac{1}{5}\sqrt{10}Z_2,$$

woraus nach Multiplikation mit $\sqrt{10}$ die Gestalt

$$g = 20\sqrt{10}Z_1^2 + 2Z_2$$

entsteht. Daraus wird durch eine weitere Substitution $Z_1 = U_1,\ Z_2 = -U_2$ leicht die Hauptachsenform

$$h = 20\sqrt{10}U_1^2 - 2U_2$$

einer Parabel gewonnen.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{10}\sqrt{10}U_1 - \frac{3}{10}\sqrt{10}U_2 + \frac{301}{50},$$

$$X_2 = -\frac{3}{10}\sqrt{10}U_1 - \frac{1}{10}\sqrt{10}U_2 + \frac{51}{25}.$$