Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/250 (S: Varianten)
Quadriken (5), Ellipsoid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = 2X_1^2 - \sqrt{2}X_1X_2 + 2X_2^2 - \sqrt{2}X_2X_3 + 2X_3^2 - 3X_1 - X_2 + X_3 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{2})$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 4 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

sowie $a_1 = -3,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 1,\ \ a_0 = (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{2})$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist von dem Vektor $(-1, 0, 1)$ erzeugt; Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(\sqrt{2})}(-1,0,1),$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(1,\sqrt{2},1),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}(-1,\sqrt{2},-1).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U\cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom, in

$$f = 2Y_1^2 + Y_2^2 + 3Y_3^2 + 2\sqrt{2}Y_1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2}+1)Y_2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2}-1)Y_3 + (\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{2})$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$2\cdot(Y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 1\cdot(Y_2 - (\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}))^2 + 3\cdot(Y_3 - (\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{6}))^2 - 1$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$Y_2 = Z_2 + (\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{2}),$$
$$Y_3 = Z_3 + (\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{6})$$

erhalten wir

$$f = 2Z_1^2 + Z_2^2 + 3Z_3^2 - 1\,;$$

dies ist die Hauptachsenform eines Ellipsoids.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}Z_3 + (\frac{1}{12}\sqrt{2}+\frac{5}{6})\,,$$
$$X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + (\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{1}{3})\,,$$
$$X_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}Z_3 + (\frac{1}{12}\sqrt{2}-\frac{1}{6}).$$