

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/260

(S: Varianten)

Quadriken (6), Kegel

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = 4X_1X_2 + \sqrt{2}X_1X_3 + \sqrt{2}X_2X_3 + 2X_3^2 + 2X_2 + X_3 - \left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 4 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

sowie $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_0 = -\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -2$ der Matrix A . Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -\sqrt{2} \\ -4 & 6 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1, 1, \sqrt{2})$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2}),$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2}),$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(-1, 1, 0).$$

Mit der Übergangsmatrix U , deren Spalten durch die Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 3Y_1^2 + Y_2^2 - 2Y_3^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right)Y_1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right)Y_2 - \sqrt{2}Y_3 - \left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^tUAU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$3 \cdot \left(Y_1 + \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\right)\right)^2 + 1 \cdot \left(Y_2 - \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^2 - 2 \cdot \left(Y_3 + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\right),$$

$$Y_2 = Z_2 + \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$Y_3 = Z_3 - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

erhalten wir

$$f = 3Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_3^2;$$

dies ist die Hauptachsenform eines Kegels.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{7}{12}\right),$$

$$X_2 = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + \left(\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{12}\right),$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 + \left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right).$$