Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/280 (S: Varianten)
Quadriken (8), elliptisches Paraboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,
$f = \frac{8}{9}X_1^2 + \frac{4}{9}X_1X_2 + \frac{19}{18}X_2^2 - \frac{4}{9}X_1X_3 + \frac{17}{9}X_2X_3 + \frac{19}{18}X_3^2 - X_1 + X_2 - 3X_3 - 1$
eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 4 & 19 & 17 \\ -4 & 17 & 19 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = -1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = -3,\ \ a_0 = -1.$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 - 3X^2 + 2X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & -17 \\ 4 & -17 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-4,-1,1)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2,\,\boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(-3\cdot\sqrt{2})}(-4,-1,1),$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(0,1,1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & -4 \\ -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$f = Y_1^2 + 2Y_2^2 + \sqrt{2}Y_2 - 3Y_3 - 1$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$1\cdot(Y_1)^2 + 2\cdot(Y_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2})^2 + (-3Y_3 - \frac{5}{4})$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1$$
$$Y_2 = Z_2 - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$
$$Y_3 = \frac{2}{3}Z_3 - \frac{5}{12}$$

erhalten wir

$$f = Z_1^2 + 2Z_2^2 - 2Z_3\,;$$

dies ist die Hauptachsenform für ein elliptisches Paraboloid.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}Z_1 + \frac{2}{9}Z_3 - \frac{5}{36}\,,$$
$$X_2 = \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 - \frac{4}{9}Z_3 + \frac{19}{36}\,,$$
$$X_3 = -\frac{1}{6}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 + \frac{4}{9}Z_3 - \frac{1}{36}.$$