Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/290 (S: Varianten)
Quadriken (9), hyperbolisches Paraboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = \frac{4}{9}X_1^2 - \frac{4}{9}X_1X_2 - \frac{8}{9}X_2^2 - \frac{10}{9}X_1X_3 - \frac{4}{9}X_2X_3 + \frac{4}{9}X_3^2 + X_1 - X_2 - 2X_3 + 1$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\, X_1 \ X_2 \ X_3 \,) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -2 & -8 & -2 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = 1,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = -2,\ \ a_0 = 1.$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A) = X^3 - X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 2 & 17 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-1, 0, 1)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(-1, 0, 1),$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{(3\cdot\sqrt{2})}(1,4,1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,2).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \\ -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = Y_1^2 - Y_2^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}Y_1 - \frac{5}{6}\sqrt{2}Y_2 - \frac{1}{3}Y_3 + 1$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$1\cdot(Y_1 + \frac{3}{4}\sqrt{2})^2 - 1\cdot(Y_2 + \frac{5}{12}\sqrt{2})^2 + (-\frac{1}{3}Y_3 + \frac{2}{9})$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$Y_2 = Z_2 - \frac{5}{12}\sqrt{2}$$

$$Y_3 = 6Z_3 + \frac{2}{3}$$

erhalten wir

$$f = Z_1^2 - Z_2^2 - 2Z_3\,;$$

dies ist die Hauptachsenform für ein hyperbolisches Paraboloid.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 + 4Z_3 - \frac{4}{9}\,,$$

$$X_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}Z_2 - 2Z_3 - \frac{7}{9}\,,$$

$$X_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 + 4Z_3 + \frac{19}{18}.$$