Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 6/3/320 (S: Varianten)
Quadriken (12), Beispiele in der Dimension 4

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3, X_4]$,

$$f = X_1^2 - 2X_2^2 - 2\sqrt{2}X_1X_3 + X_3^2 + 2\sqrt{2}X_3X_4 + X_4^2 - X_1 - 2X_2 + 2X_3 - X_4 - \frac{4}{3}$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\, X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4 \,) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

sowie $a_1 = -1,\ \ a_2 = -2,\ \ a_3 = 2,\ \ a_4 = -1,\ \ a_0 = -\frac{4}{3}$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 3\ \ \lambda_3 = -1$ und $\lambda_4 = -2$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1,0,0,1)$ erzeugt; durch Fortsetzung des Verfahren ergibt sich nach Normierung leicht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \frac{1}{(-\sqrt{2})}(1,0,0,1),\\
\boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{2}(-1,0,\sqrt{2},1),\\
\boldsymbol{v}_3 &= \frac{1}{2}(-1,0,-\sqrt{2},1),\\
\boldsymbol{v}_4 &= (0,1,0,0).
\end{aligned}$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten aus den Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = Y_1^2 + 3Y_2^2 - Y_3^2 - 2Y_4^2 + \sqrt{2}Y_1 + \sqrt{2}Y_2 - \sqrt{2}Y_3 - 2Y_4 - \frac{4}{3}$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}U A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$1\cdot(Y_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 3\cdot(Y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2})^2 - 1\cdot(Y_3 + \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - 2\cdot(Y_4 + \frac{1}{2})^2 - 1$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Z_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
Y_2 &= Z_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2},\\
Y_3 &= Z_3 - \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
Y_4 &= Z_4 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

erhalten wir

$$f = Z_1^2 + 3Z_2^2 - Z_3^2 - 2Z_4^2 - 1\,;$$

dies ist die gesuchte Hauptachsenform.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}Z_3 + (\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}),\\
X_2 &= Z_4 - \frac{1}{2},\\
X_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + \frac{1}{3},\\
X_4 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 - (\frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$