Vorbemerkung: Wir betrachten im Allgemeinen nicht triviale Vektorräume ($X \neq \{0\}$).

Hahn - Banach und Krein - Milman

Felix Günther Vortrag am 9.1.09

I : Sätze von Hahn - Banach

Satz 1 (Hahn-Banach; Lineare Algebra):

X reeller Vektorraum, $M \subseteq X$ Unterraum, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear

(d.h. $p(x+y) \le p(x) + p(y)\ \forall x,y \in X$ und $p(tx) = tp(x)\ \forall t \ge 0$).

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ linear und $f(x) \le p(x)$ auf M.

Dann existiert eine lineare Fortsetzung $F: X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)\ \forall x \in M$

und $F(x) \le p(x)$ ($\Rightarrow F(-x) \le p(-x) \Rightarrow -F(x) \le p(-x) \Rightarrow F(x) \ge -p(-x)$).

Beweis: Schritt 1: $\dim X/M = 1$

Sei $x_0 \in X \setminus M$ beliebig, jedes $x \in X$ hat dann eindeutige

Darstellung $x = m + \lambda x_0$ ($m \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Ansatz: $F_r(x) = f(m) + \lambda r$ für ein gewähltes $r \in \mathbb{R}$.

- F_r ist linear und setzt f fort
- $F_r(x) \le p(x)\ \forall x \in X \Leftrightarrow f(m) + \lambda r \le p(m + \lambda x_0)\ \forall m \in M, \lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 0$: Voraussetzung

$\lambda > 0$: $\Leftrightarrow \lambda r \le p(m + \lambda x_0) - f(m)\ \forall m \in M$

$$\Leftrightarrow r \le p\left(\tfrac{m}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\tfrac{m}{\lambda}\right)\ \forall m \in M$$

$$\Leftrightarrow r \le \inf_{n \in M} \left(p(n + x_0) - f(n)\right)$$

$\lambda < 0$: analog $r \ge \sup_{n' \in M} \left(f(n') - p(n' - x_0)\right)$

(denn: $\overset{\text{oben}}{\Leftrightarrow} \lambda r \le p(m + \lambda x_0) - f(m)\ \forall m \in M$

$\Leftrightarrow -r \le p\left(\frac{m}{-\lambda} - x_0\right) - f\left(\frac{m}{-\lambda}\right)\ \forall m \in M$

$\Leftrightarrow r \ge f(n') - p(n' - x_0)\ \forall n' \in M$)

Also: $\exists\, r \in \mathbb{R}$ mit $F_r(x) \le p(x)\ \forall x \in X$ genau dann, wenn

$$f(n') - p(n' - x_0) \le p(n + x_0) - f(n) \quad \forall n, n' \in M$$

$$\Leftrightarrow \quad f(n) + f(n') \overset{\text{wahr, da}}{\le} p(n + x_0) + p(n' - x_0)$$

$$\quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \text{VI}$$

$$f(n+n') \le p(n+n') = p(n + x_0 + n' - x_0)$$

<u>Schritt 2</u>: Transfinite Induktion mit Zorn'schem Lemma

⌈ Zornsches Lemma: Sei $(A, \le)$ eine teilweise geordnete nichtleere Menge, in der jede Kette (das ist eine total geordnete Teilmenge [d.h. für deren Elemente gilt stets $a \le b$ oder $b \le a$]) eine obere Schranke besitzt. Dann liegt jedes Element von A unter einem maximalen Element g von A, das heißt $g \le a \Rightarrow a = g$. ⌋

Sei $A := \{ (N, F_N) : M \subseteq N \subseteq X$ Unterraum, $F_N : N \to \mathbb{R}$ linear mit

$F_N \le p|_N,\ F_N|_M = f \}$

mit der Ordnung $(N_1, F_{N_1}) \le (N_2, F_{N_2}) :\Leftrightarrow N_1 \subseteq N_2,\ F_{N_2}|_{N_1} = F_{N_1}$.

- $A \neq \emptyset$ da $(M, f) \in A$.
- Ist $((N_i, F_{N_i}))_{i \in I}$ total geordnet, so (N, F_N) mit $N = \bigcup_{i \in I} N_i$,

  $L_N(x) := L_{N_i}(x)$ wenn $x \in N_i$ (wohldefiniert, da $((N_i, F_{N_i}))_{i \in I}$ total geordnet)

  obere Schranke

<u>Zorn</u> $\Rightarrow \exists$ maximales Element (X_0, F_{X_0}). Wenn $X_0 \subsetneq X$, so hat (X_0, F_{X_0}) nach Schritt 1 eine Majorante, im Widerspruch zur Maximalität von $(X_0, F_{X_0}) \Rightarrow X_0 = X$ und $F := F_{X_0}$ löst das Problem. □

<u>Bemerkung</u>: r im Schritt 1 nicht eindeutig (im Allgemeinen) bestimmt $\Rightarrow$ F im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

SIEMENS NIXDORF

Lemma 2: Sei X ein $\mathbb{C}$-Vektorraum

(a) Ist $f: X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional (d.h. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$) und setzt man $\tilde{f}(x) := f(x) - i\, f(ix)$, so ist $\hat{f}: X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional und $f = \operatorname{Re} \hat{f}$.

(b) Ist $h: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, $f = \operatorname{Re} h$ und $\hat{f}$ wie bei (a), dann ist f $\mathbb{R}$-linear und $\hat{f} = h$.

(c) Ist $p: X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm [Norm ohne $p(x)=0 \Rightarrow x=0$], $h: X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, so $|h(x)| \le p(x)\ \forall x \in X \Leftrightarrow |\operatorname{Re} h(x)| \le p(x)\ \forall x \in X$.

(d) X normiert, $h: X \to \mathbb{C}$ stetig und linear, so $\|h\|_{**} = \|\operatorname{Re} h\|_{(X,\mathbb{R})^*}$

Beweis: (a) $\hat{f}$ als Verknüpfung $\mathbb{R}$-linearer Funktionen selbst $\mathbb{R}$-linear ($x \mapsto ix$ ist $\mathbb{R}$-linear), $\operatorname{Re} \hat{f} = f$ nach Konstruktion.

$\hat{f}(ix) = f(ix) - i f(iix) = f(ix) - i f(-x) = i(f(x) - i f(ix)) = i \hat{f}(x)$

$\Rightarrow \hat{f}$ $\mathbb{C}$-linear.

(b) $f = \operatorname{Re} h$ $\mathbb{R}$-linear. Bekanntlich $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} iz$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \forall x \in X:\ h(x) &= \operatorname{Re} h(x) + i \operatorname{Im} h(x)\\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} ih(x)\\ &= \operatorname{Re} h(x) - i \operatorname{Re} h(ix) \quad (h \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear})\\ &= f(x) - i f(ix) = \hat{f}(x)\end{aligned}$$

(c) Wegen $\underline{|\operatorname{Re} z| \le |z|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt "$\Rightarrow$".

"$\Leftarrow$": $h(x) = \lambda_x |h(x)|$ mit $\lambda_x \in \mathbb{C}$, $|\lambda_x| = 1$

$\Rightarrow \forall x \in X:\ \underline{|h(x)|} = \lambda_x^{-1} h(x) = h(\lambda_x^{-1} x) \overset{\text{reell}, \ge 0}{=} \underline{|\operatorname{Re} h(\lambda_x^{-1} x)|} \le p(\lambda_x^{-1} x) = p(x)$

(d) genauso wie (c) ($\underline{\quad}$). □

Satz 3: (Hahn-Banach; lineare Algebra; komplexe Fassung)

Sei X $\mathbb{C}$-Vektorraum, $M \subseteq X$ Unterraum. Sei $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear, $f: M \to \mathbb{C}$ linear mit $\operatorname{Re} f(x) \le p(x)$ $\forall x \in M$.

Dann existiert lineare Fortsetzung $F: X \to \mathbb{C}$, $F|_M = f$ mit $\operatorname{Re} F(x) \leq p(x) \; \forall x \in X$.

<u>Beweis:</u> $\operatorname{Re} f$ ist $\mathbb{R}$-lineares Funktional $\overset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow}$ es existiert Fortsetzung $\hat{F}: X \to \mathbb{R}$ mit $\hat{F}|_M = \operatorname{Re} f$, $\hat{F}(x) \leq p(x) \; \forall x \in X$. Nach Lemma 2 (a) ist $F := \tilde{\hat{F}} : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear und $\hat{F} = \operatorname{Re} F$. Nach Lemma 2 (b) folgt $F|_M = f$. $\square$

<u>Satz 4</u> (Hahn-Banach; Fortsetzung von stetigen linearen Funktionalen)

X normierter $\mathbb{K}$-~~Vektorraum~~, $M \subseteq X$ Unterraum. $\forall f \in M^*$ ($f: M \to \mathbb{K}$ stetig, linear) existiert $F \in X^*$ mit $F|_M = f$, $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{M^*}$.

(Jedes stetige Funktional kann normgleich fortgesetzt werden.)

<u>Beweis:</u> <u>$\mathbb{K} = \mathbb{R}$</u>: Setze $p(x) := \|f\|_{M^*} \cdot \|x\|$ für $x \in X$.

$\overset{\text{Satz 1}}{\Longrightarrow} \exists F: X \to \mathbb{R}$ linear mit $F|_M = f$, $F(x) \leq p(x) \; \forall x \in X$.

Wegen $F(-x) \leq p(-x) = p(x)$ folgt $|F(x)| \leq \|f\|_{M^*} \cdot \|x\| \; \forall x \in X$

$\Rightarrow F$ stetig, $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{M^*}$.

Umgekehrt $\|f\|_{M^*} = \sup\limits_{\substack{m \in M \\ \|m\| \leq 1}} |f(m)| = \sup\limits_{\substack{m \in M \\ \|m\| \leq 1}} |F(m)| \leq \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |F(x)| = \|F\|_{X^*}$

<u>$\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u>: Kombiniere Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit Satz 3 für lineares Funktional $F: X \to \mathbb{C}$ mit $F|_M = f$ und $\|\operatorname{Re} F\|_{(X_\mathbb{R})^*} = \|f\|_{M^*}$. Aus Lemma 2 (d) folgt $F \in X^*$ und $\|\operatorname{Re} F\|_{(X_\mathbb{R})^*} = \|F\|_{X^*}$. $\square$

<u>Bemerkung</u>: F im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, ist aber X Hilbertraum und $M \subset X$ abgeschlossen, so folgt Eindeutigkeit (und auch schon Existenz) aus Riesz'schem Darstellungssatz.

<u>Satz 5</u>: (Hahn-Banach; Fortsetzungssatz)

Sei X lokalkonvexer $\mathbb{K}$-Vektorraum, $M \subseteq X$ Unterraum, $f \in M^*$.

Dann existiert eine Fortsetzung F von f mit $F \in X^*$.

<u>Beweis</u>: Die Familie P von Halbnormen erzeuge die Topologie von X (d.h. sei $Q \subset P$ endlich, $\varepsilon > 0$, $U_{Q\varepsilon} := \{x \in X : p(x) \leq \varepsilon \; \forall p \in Q\}$ und $\mathcal{U} := \{U_{Q\varepsilon} : Q \subset P$ endlich, $\varepsilon > 0\}$; dann $O \subset X$ offen $\Leftrightarrow \forall x \in O \; \exists U \in \mathcal{U}$ mit $x + U \subset O$; X ist dann lokalkonvex). Dann erzeugt $\{p|_M : p \in P\}$ die von M.

SIEMENS NIXDORF

Lemma 6. Halbnormfamilie P erzeuge lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}$ auf X

(a) Für Halbnorm $q: X \to [0,\infty)$ sind äquivalent:

(i) q ist stetig.

(ii) q ist stetig bei 0.

(iii) $\{x : q(x) \leq 1\}$ ist eine Nullumgebung.

(b) Alle $p \in P$ sind stetig.

(c) Halbnorm q stetig $\Leftrightarrow$ $\exists\, C \geq 0$ und $Q \subset P$ endlich mit
$$q(x) \leq C \max_{p \in Q} p(x) \quad \forall x \in X.$$

Beweis: (a) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) nach Definition

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Sei $U = \varepsilon \cdot \{y : q(y) \leq 1\} = \{y : q(y) \leq \varepsilon\}$.

Dann $\forall y \in U$ $\quad |q(x+y) - q(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecksungleichung}}}{\leq} q((x+y)-x) = q(y) \leq \varepsilon$

$\Rightarrow q(x+U) \subset \{a \in \mathbb{R} : |a - q(x)| \leq \varepsilon\} \Rightarrow q$ stetig in x.

(b) Nach Definition von $\mathfrak{T}$ sind $\{x : p(x) \leq 1\}$ Nullumgebungen.

(c) Nutzen (a)(iii): q stetig $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$, $Q \subset P$ endlich mit $U_{Q,\varepsilon} \subset \{x : q(x) \leq 1\}$

$\Rightarrow q(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{p \in Q} p(x) \quad \forall x \in X.$ $\square$

Zurück zum Beweis von Satz 5: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$|f|$ ist stetige Halbnorm auf M $\Rightarrow$ $\exists\, Q \subset P$ endlich, $C \geq 0$ mit

$|f(x)| \leq C \max_{\tilde{p} \in Q} \tilde{p}(x) \quad \forall x \in X$. Die rechte Seite definiert eine stetige Halbnorm p. Also $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)\ \forall x \in M$.

Nach Satz 1 existiert lineare Fortsetzung $F: X \to \mathbb{R}$ von f mit $F(x) \leq p(x)\ \forall x \in X$.

Da p Halbnorm, $F(-x) \le p(-x) = p(x) \Rightarrow |F(x)| \le p(x) \Rightarrow F \in X^*$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Definiere p wie oben, dann $\operatorname{Re} f(x) \le |f(x)| \le p(x) \; \forall x \in M$.

$\overset{\text{Satz 3}}{\Rightarrow}$ $F: X \to \mathbb{C}$ setzt f fort mit $\operatorname{Re} F(x) \le p(x) \; \forall x \in X$. Aus Lemma 2 (c) folgt $|F(x)| \le p(x)$, also $F \in X^*$. □

Folgerung 7: X normierter Raum, $x \in X$, $x \neq 0$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} = 1$, $f(x) = \|x\|$.
Speziell trennt X^* die Punkte von X, d.h. zu $x_1 \neq x_2 \in X$ existiert $f \in X^*$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Beweis: Setze das Funktional $g: \operatorname{Span}\{x\} \to \mathbb{K}$, $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$ normgleich auf X fort und erhalte f. Für die Bemerkung betrachten wir $x = x_1 - x_2$. □

Folgerung 8: X normierter Raum. Dann $\|x\| = \sup\limits_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \le 1}} |f(x)| \quad \forall x \in X$.

Beweis: „$\geq$" gilt nach Definition von $\|f\|_{X^*}$, „$\le$" nach Folgerung 7 (Fall $x = 0$ offensichtlich). Supremum wird angenommen! □

Folgerung 9: Sei X reeller, normierter Raum, $X_0 \subsetneq X$ abgeschlossener Unterraum, $x_0 \in X \setminus X_0$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $f(y) = 0 \; \forall y \in X_0$, $\|f\|_{X^*} = 1$, $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, X_0)$ (>0).

Beweis: $X_1 := \operatorname{Span}\{\{x_0\} \cup X_0\}$. Für $x \in X_1$ Darstellung $x = \underset{\in X_0}{y} + \underset{\in \mathbb{R}}{t} x_0$ eindeutig, definiere $g(x) := t \operatorname{dist}(x_0, X_0)$.

- g ist linear, $g(y) = 0 \; \forall y \in X_0$
- g ist stetig: $|g(x)| = |t| \operatorname{dist}(x_0, X_0) \le |t| \cdot \|x_0 + \underbrace{\tfrac{y}{t}}_{\in X_0}\| = \|y + t x_0\| = \|x\|$
- insbesondere $\|g\|_{X_1^*} \le 1$. Wir zeigen noch: $\|g\|_{X_1^*} = 1$.

X_0 abgeschlossen $\Rightarrow \operatorname{dist}(x_0, X_0) > 0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists z_\varepsilon \in X_0 : 0<\|x_0 - z_\varepsilon\| \le (1+\varepsilon)\, \mathrm{dist}(x_0, X_0)$

$$\Rightarrow \|g\|_{X_1^*} = \sup_{\substack{x\in X_1 \\ \|x\|\le 1}} |g(x)| \ge g\left(\frac{-z_\varepsilon + x_0}{\|-z_\varepsilon + x_0\|}\right) \ge \frac{1}{1+\varepsilon},$$

da $g(-z_\varepsilon + x_0) = 1 \cdot \mathrm{dist}(x_0, X_0) \ge \dfrac{\|x_0 - z_\varepsilon\|}{1+\varepsilon}$.

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow \|g\|_{X_1^*} = 1$.

Satz 4 $\Rightarrow \exists f \in X^* : f|_{X_1} = g,\ \|f\|_{X^*} = \|g\|_{X_1^*} = 1$

$\Rightarrow f(y) = 0\ \forall y \in X_0,\ f(x_0) = g(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, X_0)$. $\square$

Folgerung 10: Sei $X \neq \{0\}$ reeller normierter Raum und X^* separabel. Dann ist X separabel.

Beweis: Sei $(x_n^*) \subseteq X^*$ abzählbare, dichte Teilmenge in X^*.
Fixiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in X$ so dass $\|x_n\| = 1$, $|x_n^*(x_n)| \ge \frac{1}{2}\|x_n^*\|_{X^*}$.
Sei $Y :=$ Menge aller endlichen Linearkombinationen von x_n's mit rationalen Koeffizienten. Y ist abzählbar.

$\overline{Y}$ abgeschlossener Unterraum. Angenommen, $X \setminus \overline{Y} \neq \emptyset$. Nach Folgerung 9 existiert $f \in X^*$ mit $f(y) = 0\ \forall y \in \overline{Y}$, $\|f\|_{X^*} = 1$.
Auf der anderen Seite existiert Folge $(x_{n_k}^*)$ mit $x_{n_k}^* \to f$.

$$\Rightarrow \underbrace{\|f - x_{n_k}^*\|_{X^*}}_{\downarrow\, 0} \ge |f(x_{n_k}) - x_{n_k}^*(x_{n_k})| = |x_{n_k}^*(x_{n_k})| \ge \frac{1}{2}\|x_{n_k}^*\|_{X^*} \to \frac{1}{2}\|f\|_{X^*} = \frac{1}{2}$$

↯ $\square$

Definition (Minkowski-Funktional, absorbierend): X Vektorraum, $A \subset X$ Teilmenge. Minkowski-Funktional $p_A : X \to [0,\infty]$ definiert vermöge $p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in A\}$. A heißt absorbierend, falls $p_A(x) < \infty$ $\forall x \in X$.

Lemma 11: X ~~topologischer~~ Vektor-Raum, $U \subset X$ konvex mit $0 \in \operatorname{int} U$. Dann:

(a) X normiert: U ist absorbierend, genauer: Falls $\{x : \|x\| < \varepsilon\} \subset U$, so $p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$.

(b) p_U ist sublinear.

(c) Ist U offen, so gilt $U = p_U^{-1}([0,1))$.

Beweis: (a) wegen $0 \in \operatorname{int} U$.

(b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ für $\lambda \geq 0$ klar. Beweisen wir $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$:

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\lambda, \mu > 0$ mit $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$ mit $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in U$. Da U konvex, $\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot \frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{y}{\mu} \in U$. Also $p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt Ungleichung.

(c) Falls $p_U(x) < 1$, existiert $\lambda < 1$ mit $\frac{x}{\lambda} \in U$. Aus $0 \in U$ folgt $x = \lambda \frac{x}{\lambda} + (1-\lambda) 0 \in U$. ($U$ offen wurde noch nicht verwendet!)

Ist $p_U(x) \geq 1$, so ist $\frac{x}{\lambda} \notin U$ $\forall \lambda < 1$. Da $X \setminus U$ abgeschlossen ist, folgt $x = \lim_{\lambda \uparrow 1} \frac{x}{\lambda} \in X \setminus U \Rightarrow x \notin U$. $\square$

Lemma 12: X normierter $\mathbb{K}$-Vektor-Raum, $V \subset X$ konvex und offen, $0 \notin V$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x) < 0$ $\forall x \in V$.

Beweis: Für Mengen A, B sei $A \pm B := \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$. Sind A, B konvex, so auch $A + B$ und $A - B$.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Sei $x_0 \in V$ beliebig, $y_0 = -x_0$ und $U = V - \{x_0\}$. Dann ist U offen und konvex, $y_0 \notin U$, $0 \in U$.

SIEMENS NIXDORF

Betrachte Minkowskifunktional p_U zu U. Nach Lemma 11 ist p_U $\mathbb{R}$-wertig, sublinear, $p_U(y_0) \geq 1$.

Auf Unterraum $Y = \operatorname{Span}\{y_0\}$ definiere $g(ty_0) = t\, p_U(y_0)$ für $t \in \mathbb{R}$.

g ist linear und $g(y) \leq p_U(y)\ \forall y \in Y$, denn für $t \leq 0$ ist $g(ty_0) \leq 0 \leq p_U(ty_0)$ und für $t > 0$ ist $g(ty_0) = p_U(ty_0)$.

Nach Satz 1 existiert eine lineare Funktion f mit $f \leq p_U$, die g fortsetzt.

Lemma 11 (a) impliziert die Stetigkeit von f: Ist $\{x : \|x\| < \varepsilon\} \subset U$, so $p_U(x) \leq \frac{1}{\varepsilon}(x)$, also $|f(x)| = \max\{f(x), f(-x)\} \leq \max\{p_U(x), p_U(-x)\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x\|$

Insbesondere $f(y_0) = p_U(y_0) \geq 1$. Wenn $x \in V$, so $x = u - y_0$ für ein $u \in U$ und somit $f(x) = f(u) - f(y_0) \leq p_U(u) - 1 < 0$ nach Lemma 11 (c).

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Folgt aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und Lemma 2.

□

Satz 13 (Hahn-Banach, Trennungsversion I)

Sei X normierter Raum, $V_1, V_2 \subseteq X$ konvex, V_1 offen, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(v_1) < \operatorname{Re} f(v_2)\ \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

Beweis: Sei $V = V_1 - V_2$. V ist konvex, $V = \bigcup_{x \in V_2} (V_1 - \{x\})$ ist offen. Wegen $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ist $0 \notin V$. Aus Lemma 12 folgt die Existenz von $f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(v_1 - v_2) < 0\ \forall v_i \in V_i$, also $\operatorname{Re} f(v_1) < \operatorname{Re} f(v_2)$.

□

Satz 14 (Hahn-Banach, Trennungsversion II):

X normierter Raum, $V \subseteq X$ abgeschlossen und konvex, $x \notin V$. Dann $\exists f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x) < \inf\{\operatorname{Re} f(v) : v \in V\}$, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} f(v)$ $\forall v \in V$; x kann von V strikt getrennt werden.

Beweis: V abgeschlossen $\Rightarrow \exists$ offener Ball $U := B_0(r)$ mit $(\{x\}+U) \cap V = \emptyset$.

Nach Satz 13 $\exists f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x+u) < \operatorname{Re} f(v) \ \forall u \in U, v \in V$.

Also $\operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Re} f(u) < \operatorname{Re} f(v) \ \forall u \in U \ \forall v \in V$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f(x) + \|\operatorname{Re} f\|_{(X_{\mathbb{R}})^*} \cdot r \leq \operatorname{Re} f(v) \ \forall v \in V$$

$$\overset{\text{Lemma (2)(d)}}{\Rightarrow} \operatorname{Re} f(x) + \underbrace{r \cdot \|f\|_{X^*}}_{=:\varepsilon > 0} \leq \inf\{\operatorname{Re} f(v) : v \in V\}.$$

□

Bemerkung: Übergang von x' zu $-x'$ liefert „>" in Trennungssätzen (mit sup statt inf in Satz 14).

Folgerung 15: X normiert, $V \subset X$ abgeschlossen und konvex. $(x_n) \subset V$ schwach konvergente Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ (d.h. $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) \ \forall f \in X^*$), so $x \in V$.

Beweis: Wenn $x \notin V$, so kann x nach Satz 14 strikt von V getrennt werden, d.h. $\exists f \in X^*$, $\varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x) + \varepsilon \leq \inf_{v \in V} \operatorname{Re} f(v)$. Insbesondere $\operatorname{Re} f(x_n - x) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$. □

Lemma 16: X lokalkonvex, W offene, absorbierende, absolut-konvexe (d.h. W konvex und kreisförmig, d.h. $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} \cdot W \subseteq W$. absolut-konvex $\Leftrightarrow x, y \in W, |\lambda| + |\mu| \leq 1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in W$) Nullumgebung. Dann ist das Minkowskifunktional p_W eine stetige Halbnorm.

Beweis: Aus Beweis von Lemma 11 (b) folgt, dass p_W sublinear ist. Nun $p_W(\lambda x) = |\lambda| p_W(x) \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ wegen der Kreisförmigkeit (für $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wegen Sublinearität, also genügt es $|\lambda| = 1$ zu betrachten. Kreisförmigkeit: $\lambda W = W$, also $p_W(\lambda x) = p_{\lambda W}(\lambda x) = p_W(x)$). $\Rightarrow$ Halbnorm.
Stetigkeit folgt aus Lemma 6 (a). □

SIEMENS NIXDORF

<u>Lemma 17:</u> Sei X lokalkonvex, $V \subseteq X$ konvex und offen und $0 \notin V$. Dann existiert $f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x) < 0 \ \forall x \in V$.

<u>Beweis:</u> Sei $x_0 \in V$, $y_0 = -x_0$, $U = y_0 + V$. Dann ist U offen und konvex, $y_0 \notin U$, $0 \in U$. Betrachten Minkowski-Funktional p_U. Da U offen ist, so existiert absolutkonvexe absorbierende Nullumgebung $W \subseteq U$ (Details bei schwacher Topologie). Nach Lemma 11 (b) und (c) ist p_U sublinear und $p_U(y_0) \geq 1$. Setze $Y = \operatorname{Span}\{y_0\}$; $g: Y \to \mathbb{K}$ linear vermöge $g(t y_0) := t p_U(y_0)$. Wie bei Lemma 12 folgt $\operatorname{Re} g(y) \leq p_U(y)$. Nach Sätzen 1 und 3 existiert Fortsetzung $f: X \to \mathbb{K}$ mit $\operatorname{Re} f(x) \leq p_U(x) \leq p_W(x) \ \forall x \in X$, also auch $|f(x)| \leq p_W(x) \ \forall x \in X$ nach Lemma 16 und Lemma 3 (c). Mit Lemma 16 und Lemma 6 (c) folgt $f \in X^*$. Analog zu Lemma 12 erfüllt f das Gewünschte.

□

<u>Satz 18:</u> (Hahn-Banach; Trennungssatz I)

X lokalkonvex, $V_1, V_2 \subset X$ konvex, V_1 offen, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann $\exists f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(v_1) < \operatorname{Re} f(v_2) \ \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

<u>Beweis:</u> Folgt aus Lemma 17 wie Satz 13 aus Lemma 12.

□

<u>Satz 19:</u> (Hahn-Banach; Trennungssatz II)

X lokalkonvex, $V \subset X$ abgeschlossen und konvex, $x \notin V$. Dann $\exists f \in X^*, \varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x) + \varepsilon \leq \operatorname{Re} f(v) \ \forall v \in V$.

Ist V zusätzlich absolutkonvex, so existiert $f \in X^*$ und $\varepsilon > 0$ mit $|f(v)| + \varepsilon \leq \operatorname{Re} f(x) \ \forall v \in V$.

<u>Beweis:</u> Wähle absolutkonvexes offenes $U \ni 0$ mit $(x + U) \cap V = \emptyset$.

Nach Satz 18 $\exists f \in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x) + \operatorname{Re} f(u) < \operatorname{Re} f(v) \ \forall u \in U \ \forall v \in V$

Setze $\varepsilon = \sup\{ \operatorname{Re} f(u) : u \in \mathcal{U} \}$. Wähle $\mathcal{U}$ so klein, dass $\varepsilon < \infty$ (folgt aus Stetigkeit von f). Da $\mathcal{U}$ absolutkonvex ist, so $\varepsilon > 0$.

Der Zusatz ist klar, da man durch den Übergang von f zu $-f$ oben „$>$" und $-\varepsilon$ in der Ungleichung erhält. □

<u>Folgerung 20</u>: X lokalkonvexer Hausdorffraum. Dann trennt X^* die Punkte von X, d.h. zu $x \neq y$ existiert $f \in X^*$ mit $f(x) \neq f(y)$.

<u>Beweis</u>: Wende Satz 19 auf $V = \{y\}$ an, was konvex und abgeschlossen ist. □

<u>II Satz von Krein-Milman</u>

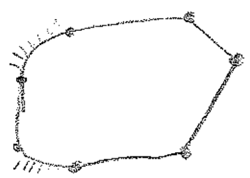
<u>Definition</u>: X Vektorraum, $K \subset X$ konvex.

(a) $F \subset K$ heißt Seite von K, falls F konvex ist und

$x_1, x_2 \in K,\ 0 < \lambda < 1,\ \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F \Rightarrow x_1, x_2 \in F$ gilt

(b) $x \in K$ heißt Extremalpunkt von K, falls $\{x\}$ eine Seite von K ist, d.h. $x_1, x_2 \in K,\ 0 < \lambda < 1,\ \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = x \Rightarrow x_1 = x_2 = x$.

$\operatorname{ex} K$ ist die Menge der Extremalpunkte von K.



•, /// Extremalpunkte

<u>Bemerkung</u>: Da K konvex ist, muss nur $\lambda = \frac{1}{2}$ betrachtet werden. Also ist $x \in K$ Extremalpunkt genau dann wenn $x \pm y \in K \Rightarrow y = 0$ gilt.

<u>Lemma 21</u>: Ist K konvex, $F \subset K$ Seite in K und $G \subset F$ Seite in F, so ist G Seite in K. Speziell $\operatorname{ex} F = (\operatorname{ex} K) \cap F$.

<u>Beweis</u>: Trivial. □

<u>Lemma 22</u>: Sei X lokalkonvex, $K_1, \dots, K_n \subset X$ konvex und kompakt. Dann ist $K = \operatorname{conv}(K_1 \cup \dots \cup K_n)$ kompakt.

Beweis: Sei $\Delta_n = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n : 0\le\lambda_i\le 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ das Standardsimplex und $f:\Delta_n\times K_1\times\dots\times K_n\to X$, $f(\lambda_1,\dots,\lambda_n,x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$.
f ist stetig und das Bild von f ist gleich K weil die K_i konvex sind.
Da $\Delta_n\times K_1\times\dots\times K_n$ kompakt ist, so auch K. □

Satz 23 (Krein-Milman)

X lokalkonvexer Hausdorffraum, $K\subset X$ kompakt, konvex und nicht leer.

(a) $\operatorname{ex}K\neq\emptyset$.

(b) $K=\overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ex}(K))}$

(c) Gilt $K=\overline{\operatorname{conv}(B)}$, so $\operatorname{ex}K\subset\overline{B}$.

Beweis: Mittels Hahn-Banach und Zorn'schem Lemma.

(a) Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller abgeschlossenen, nicht leeren Seiten von K. $\mathcal{F}\neq\emptyset$, da $K\in\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ ist induktiv nach unten geordnet, nämlich bezüglich der Inklusion: Der Schnitt abgeschlossener Seiten ist wieder eine abgeschlossene Seite und nicht leer, weil K kompakt ist (A_i, $i\in I$, abgeschlossene Teilmengen von K, $\bigcap_{i\in I}A_i=\emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I}K\setminus A_i = K$ offene Überdeckung $\Rightarrow \bigcup_{k=1}^n K\setminus A_{i_k}=K \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_{i_k}=\emptyset$ da K kompakt!)

Zorn'sches Lemma: Es existiert minimales Element F_0 von $\mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass F_0 nur aus einem Punkt besteht. Da F_0 eine Seite ist, ist F_0 damit ein Extremalpunkt von K.

Angenommen, dem wäre nicht so. Nach Folgerung 20 existiere $x_0,y_0\in F_0$, $f\in X^*$ mit $\operatorname{Re} f(x_0) < \operatorname{Re} f(y_0)$. Betrachte $F_1=\{x\in F_0 : \operatorname{Re} f(x) = \sup_{y\in F_0}\operatorname{Re} f(y)\}$.
Dann ist $F_1\neq\emptyset$, da F_0 kompakt und f stetig ist. F_1 ist abgeschlossen und

wegen der Linearität von f eine Seite in F_0. Nach Lemma 21 ist F_1 auch Seite in K, also $F_1 \in \mathcal{F}$, aber wegen $x_0 \notin F_1$ ist $F_1 \subsetneq F_0$ im Widerspruch zur Minimalität von F_0.

(b) Setze $K_1 = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ex}(K))}$. Dann ist K_1 kompakt, konvex, $\neq \emptyset$ nach (a). Offenbar $K_1 \subseteq K$. Wenn $K_1 \neq K$, so existiert $x_0 \in K \setminus K_1$ und nach Satz 19 $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$ mit $\mathrm{Re}\, f(x) \leq \mathrm{Re}\, f(x_0) - \varepsilon \;\forall x \in K_1$ (*)

Sei $F = \{x \in K : \mathrm{Re}\, f(x) = \sup_{y \in K} \mathrm{Re}\, f(y)\}$. Wie oben $F \neq \emptyset$ und F abgeschlossene Seite in K. Nach (a) $\mathrm{ex}\, F \neq \emptyset$ und nach Lemma 21 $\mathrm{ex}\, F \subseteq \mathrm{ex}\, K$.

Nach (*) $(\mathrm{ex}\, K) \cap F \subseteq K_1 \cap F = \emptyset$, Widerspruch.

(c) Sei $x \in \mathrm{ex}\, K$ und U eine (o.B.d.A. absolutkonvexe und abgeschlossene) Nullumgebung. Wir zeigen $(x + U) \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Sicherlich $\overline{B} \subseteq K$, also ist $\overline{B}$ kompakt $\Rightarrow \exists\, x_1, \ldots, x_n \in \overline{B}$ mit $\overline{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U)$. Sei $K_i := \overline{\mathrm{conv}((x_i + U) \cap B)} \subset \overline{\mathrm{conv}(B)} = K$. Die K_i sind konvex und kompakt. Ferner $\overline{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Lemma 22 impliziert $K = \overline{\mathrm{conv}\, B} = \overline{\mathrm{conv}\, \overline{B}} \subseteq \overline{\mathrm{conv} \bigcup_{i=1}^{n} K_i} = \mathrm{conv} \bigcup_{i=1}^{n} K_i \subseteq K$

$\Rightarrow K = \mathrm{conv} \bigcup_{i=1}^{n} K_i$

Also muss $x \in \mathrm{ex}\, K$ in einem der K_i liegen. Da U absolutkonvex und abgeschlossen, so $K_i \subset x_i + U$, also $x \in x_i + U$ für ein i.

$\Rightarrow x_i \in (x + U) \cap \overline{B}$ (U absolutkonvex).

Also liegt $\mathrm{ex}\, K$ im Abschluss von $\overline{B}$, also $\mathrm{ex}\, K \subseteq \overline{B}$. □

<u>Folgerung 24</u>: Die Räume c_0 (Raum aller Nullfolgen) und $L^1[0,1]$ sind nicht zu einem Dualraum eines normierten Raums isometrisch isomorph.

<u>Beweis</u>:

<u>Folgerung 25</u>: X normierter Raum, so gilt für die Einheitskugel B_{X^*} in X^*, dass $B_{X^*} = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ex}(B_{X^*}))}$ in der schwach*-Topologie.

<u>Beweis</u>: Nach Satz von Alaoglu ist B_{X^*} schwach*-kompakt. Behauptung folgt aus Satz 23. □

SIEMENS NIXDORF

Wenn c_0 oder $L^1[0,1]$ isometrisch isomorph zum Dualraum eines normierten Raums wäre, so hätte die abgeschlossene Einheitskugel nach Folgerung 25 Extremalpunkte. Dies ist aber nicht der Fall:

- c_0: Sei $x \in S_{c_0}$ (Einheitssphäre, andere x kämen als Extremalpunkte nicht in Frage). Wähle n mit $|x(n)| =: \varepsilon \le \frac{1}{2}$. Dann $x \pm \varepsilon e_n \in B_{c_0}$, Widerspruch.
- $L^1[0,1]$. Sei $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 1$. Da $s \mapsto \int_0^s |f(t)|\,dt$ stetig ist, existiert nach Zwischenwertsatz s_0 mit $\int_0^{s_0} |f(t)|\,dt = \frac{1}{2}$. Für $f_1 = 2\chi_{[0,s_0]}f$, $f_2 = 2\chi_{[s_0,1]}f$ gilt $\|f_i\| = 1$, $f_1 \neq f_2$, aber $f = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, also gibt es keine Extremalpunkte. $\square$

Literatur: Rudin, W.: Functional Analysis, McGraw Hill, 1973

Werner, D.W.: Funktionalanalysis, Springer, 1995