Einführung in die Theorie der Navier-Stokes Gleichungen

Sommersemester 2014

Jörg Wolf [1)]

Inhaltsverzeichnis

[1)] Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, Unter den Linden 6, 10099 Berlin: jwolf@math.hu-berlin.de.

Einführung

Literatur:

- L. D. Landau, E. M. Lifschitz, **Lehrbuch der theoretischen Physik**, Bd. 6, Hydrodynamik, Harri Deutsch, 1991
- Roger Temam, **Navier-Stokes Equation - Theory and numerical Analysis**, North-Holland, 1984
- H. Sohr, **Introduction to the Navier-Stokes equations**, Birkhäuser, 2001.

Physikalischer Anwendungen:

- Strömungsmechanik: Inkompressible Fluide
- Geophysik: Strömungen in Atmoshpäre und Ozean
- Biophysik

Inhalt der Vorlesung:

1 Herleitung der Navier-Stokes Gleichungen

2 Die stationäre Stokes Gleichung

3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der stationären Navier-Stokes Gleichungen

4 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen

5 Regularität der Navier-Stokes Gleichungen

1 Modellierung

1.1 Masseerhaltung. Kontinuitätsgleichung

Sei $\rho = \rho(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dichte eines Gases. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Testvolumen*, welches ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand ist. Dann ist

$$m(t;\Omega) = \int_\Omega \rho(x,t)dx = \textit{ Masse des Gases in } \Omega \text{ zur Zeit } t > 0.$$

Folglich gilt:

$$\dot{m}(t;\Omega) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(x,t)dx = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dx. \tag{1.1}$$

Sei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ das Geschwindigkeitsfeld des Gases. Dann ist

$$j(t;\Omega) = \int\limits_{\partial\Omega} \rho(x,t)\langle \boldsymbol{v}(x,t), -\nu\rangle dS(x) = \text{ \textit{Teilchenstrom in} } \Omega\text{: Masse/Zeit} \tag{1.2}$$

Hierbei nehmen wir an, dass $\boldsymbol{v}(t) \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes mit $\boldsymbol{f} = -\rho\boldsymbol{v}$ erhält man

$$j(t;\Omega) = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})dx.$$

Das Gesetz der Masseerhaltung besagt $\dot{m}(t;\Omega) = j(t;\Omega)$, also

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t)dx + \int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})dx = 0. \tag{1.3}$$

Wegen der Beliebigkeit des Testvolumens erhält man

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad (\textit{Kontinuitätsgleichung}).} \tag{1.4}$$

1.2 Impulserhaltung

Sei $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3\times]0,T[$ die Geschwindigkeit der Strömung. Wir messen die Geschwindigkeit die Strömung im Ort $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$, den sogenannten *Eulerschen Koordinaten*. Mit $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^3\times[0,T] \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir den Fluß bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes, so dass

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t_0) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.5}$$

Ferner setzen wir $\mathcal{X}_x(t) = \boldsymbol{\Phi}(x,t)$ $(t \in [t_0,T])$ die *Integralkurve* ein Teilchen, welches sich zum Zeitpunkt $t = t_0$ im x befindet. Hierbei heißt $\mathcal{X}_x$ *Charakeristik*, oder auch *Lagrangesche Koordinate*. Dann genügt $\mathcal{X}_x$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\mathcal{X}}_x(t) = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(\mathcal{X}_x(t),t) = \boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t),t), \quad \mathcal{X}_x(t_0) = x. \tag{1.6}$$

Die Gleichung der Impulserhaltung lautet somit

$$\ddot{\mathcal{X}}_x(t) = \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_i, \tag{1.7}$$

wobei

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_a &= \text{ äußere Kraft} \\ \boldsymbol{F}_p &= \text{ Druckkraft} \\ \boldsymbol{F}_i &= \text{ innere Kräfte (Spannungen)} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Kettenregel berechnet man aus (1.6)

$$\ddot{\mathcal{X}}_x(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t),t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\mathcal{X}_x(t),t) + \dot{\mathcal{X}}_x(t)\cdot\nabla\boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t),t)$$
$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\mathcal{X}_x(t),t) + \boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t),t)\cdot\nabla\boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t),t).$$

Für $t = t_0$ erhält man

$$\ddot{\mathcal{X}}_x(t_0) = \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}(x,t_0) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(x,t_0) + (\boldsymbol{v}(x,t_0)\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(x,t_0). \tag{1.8}$$

Die Druckfkraft $\boldsymbol{F}_p$*:* Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Probevolumen. Die auf V wirkende Druckkraft berechnet sich aus der Summe aller auf ∂V wirkenden Normalenkräfte. Dann berechnet man mithilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V \boldsymbol{F}_p dx = \int_{\partial V} -p\boldsymbol{n}dS = -\int_V \nabla p dx \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{F}_p = -\nabla p. \tag{1.9}$$

Die inneren Reibungskräfte F_i*:* Diese sind gegeben durch die inneren Reibungen, welche durch die Scherspannungen $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ erzeugt werden. Wie oben berechnet man mithilfe des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_V \boldsymbol{F}_i dx = \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} dx \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{F}_i = \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}. \tag{1.10}$$

Aus den Gleichungen (1.8), (1.9) und (1.10) ergibt sich die Gleichung für die Impulserhaltung

$$\boxed{\rho\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big) = -\nabla p + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F}_a.} \tag{1.11}$$

Das Newtonsche Gesetz: Der Spannungstensor hängt von $\nabla\boldsymbol{v}, \nabla^2\boldsymbol{v}, \ldots$ ab. Aus Symmetriegründen erhält man $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}), \Delta\boldsymbol{v}, \ldots)$, wobei

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^t).$$

Bei Newtonschen Verhalten ist $\boldsymbol{\sigma}$ proportional zu $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})$, Das Newtonsche Gesetz lautet dann:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) + (\lambda - \frac{2}{3}\mu)\boldsymbol{I}\operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

Für $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$ berechnet man

$$D_j\sigma_{ij} = \mu D_j D_j v^i + \mu D_j D_i v^j + \Big(\lambda - \frac{2}{3}\mu\Big)D_i \operatorname{div}\boldsymbol{v}$$
$$= \mu\Delta v^i + \Big(\lambda + \frac{1}{3}\mu\Big)D_i \operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

Hierbei ist μ die *dynamische Viskosität* und λ ist der *Zähigkeitskoeffizient*. Aus (1.11) folgt

$$\boxed{\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{v} + \Big(\lambda + \frac{1}{3}\mu\Big) \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}_a \quad (\textit{Impulsgleichung}),} \tag{1.12}$$

wobei

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}.$$

Hierbei heißt $\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}$ die *substantielle oder marterielle Zeitableitung* von $\boldsymbol{v}$ und stellt die Beschleunigung entlang der Partikelbahn dar.

1.3 Volumenerhaltung

Sei $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,t)$ ein glattes Geschwindigkeitsfeld, einer inkompressiblen Strömung, was bedeutet, dass das Volumen stets erhalten bleibt. Sei $t_0 \geq 0$ fixiert. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Testvolumen zum Zeitpunkt $t = t_0$, welches sich zu einem Volumen $\Omega(t)$ zum Zeitpunkt $t > t_0$ verformt hat. Ist $x \in \Omega$ der Ort eines Partikels zum Zeitpunkt $t = t_0$, so bezeichne $\boldsymbol{\Phi}(x,t)$ den Ort des Partikels zum Zeitpunkt $t > t_0$. Die Erhaltung des Volumens impliziert die Gleichung

$$\int\limits_{\Omega} dx = \int\limits_{\Omega(t)} dx \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Ist $x \in \Omega$ fixiert, so beschreibt $t \mapsto \mathcal{X}_x(t) := \boldsymbol{\Phi}(x,t)$ die Partikelbahn des Teilchens, und ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\mathcal{X}}_x(t) = \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}(\mathcal{X}_x(t), t) = \boldsymbol{v}(\mathcal{X}_x(t), t), \quad \mathcal{X}_x(t_0) = x.$$

Die Abbildung $(x,t) \mapsto \mathcal{X}_x(t) = \boldsymbol{\Phi}(x,t)$ ist somit der *Fluß* zu dem Vektorfeld $\boldsymbol{v}$.

- x heißt *Eulersche Koordinate* (Strömung wird von außen beobachtet und an einem bestimmten Ort $x \in \Omega$ gemessen)

- $\boldsymbol{\Phi}(x,t)$ heißt *Lagrange Koordinate* (Beobachter bewegt sich mit der Strömung entlang einer Partikelbahn)

Wir haben also

$$\Omega(t)) = \boldsymbol{\Phi}(\cdot, t)(\Omega).$$

Wegen der Volumenerhaltung berechnet man mithilfe der Transformationsformel für das Lebesgue-Integral

$$\operatorname{vol}(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dx = \int\limits_{\Omega(t)} dx = \int\limits_{\Omega} |\det \nabla_x \boldsymbol{\Phi}(x,t)| dx \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Folglich haben wir wegen $\mathbf{\Phi}(x, t_0) = \mathrm{id}$

(1.13) $\qquad \det \nabla_x \mathbf{\Phi}(x, t) = \det \nabla_x \mathbf{\Phi}(x, t_0) \equiv 1.$

Unter Verwendung des HS der D.I.R. folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(x, t) &= x + \mathbf{\Phi}(x, t) - \mathbf{\Phi}(x, t_0) \\
&= x + \int_0^1 \partial_t \mathbf{\Phi}(x, t_0 + s(t - t_0)) ds (t - t_0) \\
&= x + \int_0^1 \dot{\mathcal{X}}_x(t_0 + s(t - t_0)) ds (t - t_0) \\
&= x + \int_0^1 \boldsymbol{v}(\mathbf{\Phi}(x, t_0 + s(t - t_0)), t_0 + s(t - t_0)) ds (t - t_0)
\end{aligned}$$

Folglich

$$\nabla_x \mathbf{\Phi}(x, t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}(x, t)(t - t_0),$$

wobei

$$B_{ij}(x, t) = \int_0^1 D_j v^i(\mathbf{\Phi}(x, t_0 + s(t - t_0)), t_0 + s(t - t_0)) ds \to D_j v^i(x) \quad \text{für} \quad t \to t_0.$$

Wegen $\Phi(x, t) \to \mathrm{id}$ für $t \to t_0$ erhält man

$$\boldsymbol{B}(x, t) \to \nabla_x \boldsymbol{v}(x, t_0) \quad \text{für} \quad t \to t_0.$$

Unter Verwendung von (1.13) folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \det \nabla_x \mathbf{\Phi}(x, t) = \det(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}(x, t)(t - t_0)) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^n B_{ii}(x, t)(t - t_0) + C(x, t)(t - t_0)^2.
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x) = \lim_{t \to t_0} \sum_{i=1}^n B_{ii}(x, t) = -\lim_{t \to t_0} C(x, t)(t - t_0) = 0.$$

Die Gleichung der Volumenerhaltung lautet somit

(1.14) $\qquad \boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0}$

1.4 Die Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible Strömungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Sei $0 < T < +\infty$. Definieren $Q_T := \Omega \times]0, T[$. Aus (1.4), (1.12) und (1.14) folgt

$$(1.15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{\mu}{\rho}\Delta \boldsymbol{u} + \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{f} \qquad \text{in} \quad Q_T, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in} \quad Q_T. \end{cases}$$

Hierbei sind ρ die Dichte $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^n)$ die Geschwindigkeit und p der Druck die gesuchten Größen und $\boldsymbol{f} = (f^1, \ldots, f^n)$ die außere Kraft, welche gegeben ist.

In den folgenden Betrachtungen nehmen wir an, dass $\rho \equiv \text{const} > 0$. Aus (1.15) folgt

$$(1.16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{f} \qquad \text{in} \quad Q_T, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{in} \quad Q_T, \end{cases}$$

wobei $\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{const} > 0$ die *kinematische Viskosität* ist

Randbedingung Nimmt man an, dass die Strömung am Rand $\partial\Omega$ haftet, so führt das zur Dirichlet-Randbedingung

$$(1.17) \qquad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times]0, T[.$$

Die Geschwindigkeitsverteilung im Zeitpunkt $t = 0$ ist vorgegeben. Wir haben somit die Anfangsbedingung

$$(1.18) \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times \{0\}.$$

1.5 Dimensionen und Reynolds-Zahl

Größe	Symbol	Dimension	Einheit
1. Geschwindigkeit:	$\boldsymbol{u}$	LT^{-1}	ms^{-1}
2. Druck :	p	$FL^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$	$Nm^{-2} = kg\, m^{-1}s^{-2}$
3. Druckgradient:	∇p	$ML^{-2}T^{-2}$	$Nm^{-3} = kg\, m^{-2}s^{-2}$
4. Dichte:	ρ	ML^{-3}	$kg\, m^{-3}$
5. Beschleunigung:	$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}$	LT^{-2}	ms^{-2}
6. kinematische Viskosität:	ν	L^2T^{-1}	m^2s^{-1}
7. dynamische Viskosität:	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	[2] $kg\, m^{-1}s^{-1}$

[2] Hier ist L =Länge, M =Masse, T =Zeit, F =Kraft.

Begründung für die kinematische Viskosität ν. Man berechnet

$$[\nu][\Delta \boldsymbol{u}] = [\nu]L^{-1}T^{-1} = \left[\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}\right] = LT^{-2} \quad \Longrightarrow \quad [\nu] = L^2T^{-1}.$$

Begründung für dynamische Viskosität μ:

$$[\mu] = [\rho][\nu] = ML^{-3}L^2T^{-1} = ML^{-1}T^{-1}$$

Die Reynolds-Zahl: Die Zahl

$$\mathrm{Re} = \frac{\boldsymbol{u}_\infty d}{\nu}$$

heißt *Reynolds-Zahl*, wobei $\boldsymbol{u}_\infty =$ charakteristische Geschwindigkeit, d charakteristische Länge und ν die charakteristische Viskosität. Wir berechnen

$$[\mathrm{Re}] = LT^{-1}LL^{-2}T = 1.$$

Folglich hat die Reynolds-Zahl keine Dimension.
Ist Re << 1 so sagt spricht man von laminarer Strömung. Ist Re >> 1 so spricht man von turbulenter Strömung.

1.6 Entdimensionalisierung

Wir definieren die neuen dimensionslosen Koordinaten

$$\bar{x} = \frac{1}{d}x, \quad \bar{t} = \frac{\boldsymbol{u}_\infty}{d}t, \quad \overline{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}_\infty}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho \boldsymbol{u}_\infty^2}.$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{u} &= \frac{\nu \boldsymbol{u}_\infty}{d^2}\Delta \overline{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{Re}\frac{\boldsymbol{u}_\infty^2}{d}\Delta \overline{\boldsymbol{u}}, \\
(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{u}_\infty^2}{d}(\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{u}}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} &= \frac{\boldsymbol{u}_\infty^2}{d}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t}. \\
\nabla p &= \frac{\boldsymbol{u}_\infty^2}{d}\nabla \overline{p}.
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichne $\boldsymbol{u}_\infty$ eine vorgegebene mittlere Strömungsgeschwindigkeit.

Teilt man beide Seiten der Navier-Stokes Gleichungen durch $\frac{\boldsymbol{u}_\infty^2}{d}$, so erhät man die entdimensionalisierte Gleichung

$$\frac{\partial \overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla)\overline{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \overline{\boldsymbol{u}} = -\nabla \overline{p} + \overline{\boldsymbol{f}} \quad \text{in} \quad Q_T. \tag{1.19}$$

Dies zeigt, dass das relative Verhalten einer Strömung wesentlich von der Reynolds-Zahl Re abhängt. Ist Re << 1 so liegt eine **laminare** Strömung vor. Ist Re >> 1 so liegt eine **turbulente** Strömung vor.

2 Singuläre Integraloperatoren

2.1 Singuläre Kerne

In diesem Abschnitt stellen wir einige Eigenschaften singulärer Integraloperatoren zusammen, wir in den folgendenden Abschnitten benutzen werden. Wir beginnen mit dem bekannten Beispiel des Laplace-Operators $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ in $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$). Zunächst erinnern wir daran, dass für jede Dini-stetige Function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit hinreichendem Abklingverhalten für $|x| \to +\infty$ die Funktion

$$u(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int f(x-y)|y|^{2-n} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

zu $C^2(\mathbb{R}^n)$ gehört. Außerdem erweist sich u als die eindeutige Lösung des Cauchy-Problems

$$(2.1) \qquad -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Hierbei ist $\omega_n = \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1)$. Wir berechnen für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$K_{ij}(x) := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} = \frac{n x_i x_j - \delta_{ij}|x|^2}{\omega_n |x|^{n+2}}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$. Formal gilt

$$T_{K_{ij}} f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_{ij}(y) dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \frac{f(x)}{n}\delta_{ij}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Leider ist $K_{ij} \sim |x|^{-n}$, so dass das Integral in der obigen Identität nicht definiert ist. Auf der anderen Seite haben wir

$$\int_{\{|x|=R\}} K_{ij}(y) dy = 0 \quad \forall\, 0 < R < \infty,$$

so dass die Singularität in 0 gehoben werden kann. Mithilfe dieser Eigenschaft definiert man $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ die Zuordnung $T_{ij} f(x)$ gemäß

$$T_{ij} f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y) K_{ij}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (i, j = 1, \ldots, n).$$

Wir erinnern, dass $-\Delta u = f$. Unter Verwendung partieller Integration bekommt man $\|\nabla^2 u\|_{\boldsymbol{L}^2} \leq \|f\|_{L^2}$. Dies impliziert

$$(2.2) \qquad \|T_{ij} f\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2} \quad \forall\, f \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Wir stellen nun die Frage, ob man in (2.2) den Raum L^2 durch L^p $(1 < p < \infty)$ ersetzen kann. Wie wir weiter unten sehen werden, kann man den operator T_{ij} eindeutig zu einem beschränkten Operator $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ ausdehnen. Mit anderen Worten, es gibt eine Konstante M_p, welche von n und p abhängt, so dass

$$\|T_{ij}f\|_{L^p} \le M_p\|f\|_{L^p} \quad \forall\, f \in C_0^1(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p < \infty). \tag{2.3}$$

Der Beweis von (2.3) basiert auf dem bekannten Interpolationssatz von Marcinkiewicz für Operatoren, welche einer starken $(2,2)$-Typ Abschätzung zusammen mit der folgenden schwachen $(1,1)$-Typ Abschätzung genügen

$$t\,\lambda_n\left(\{|T_{ij}f| > t\}\right) \le M_1\|f\|_{L^1} \quad \forall\, f \in L^1.\,^{3)} \tag{2.4}$$

Ausgehend von dem obigen Beispiel studieren wir allgemeine singuläre Integraloperatoren, welche durch einen geeigneten singulären Kern K homogen vom Grad $-n$ erzeugt werden. Hierzu die folgende Definition

Definition 2.1 Eine Kernfunktion $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ heißt *singulärer Kern homogen vom Grad* $-n$, falls

(K1) $\quad K(ty) = t^{-n}K(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad 0 < t < +\infty,$

(K2) $$\int\limits_{\{|y|=1\}} K(y)dy = 0.$$

Bemerkung 2.2 1. Die Bedingung (K1) besagt, dass K im Punkt 0 eine Singularität der Ordnung n hat.

2. Da K stetig ist, folgt $B = \max\limits_{y \in S_{n-1}} |K(y)| < +\infty$. Dann schließt man aus (K1)

$$|K(y)| = |y|^{-n}\left|K\left(\frac{y}{|y|}\right)\right| \le B|y|^{-n}. \tag{2.5}$$

3. Aus (2.5) folgt

$$\int\limits_{\{R<|x|<4R\}} |K(y)|dy \le B \int\limits_{\{R<|x|<4R\}} |y|^{-n}dy = B\omega_n \log 4. \tag{2.6}$$

4. Aus (K1) folgt

$$\frac{\partial}{\partial y_i}K(ty) = t\frac{\partial K}{\partial x_i}(ty) = t^{-n}\frac{\partial K}{\partial x_i}(y) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad 0 < t < +\infty.$$

Folglich ist $D_iK(ty) = t^{-n-1}D_K(y)$ homogen vom Grad $-(n+1)$. Dann erhält man für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|y| \ge 2|x|$

$$\begin{aligned} |K(y) - K(y-x)| &= \left| \int\limits_0^1 \frac{\partial K}{\partial x_i}(y - x + \tau x)x_i d\tau \right| \\ &\le c\int\limits_0^1 |y - x + \tau x|^{-n-1}d\tau|x| \\ &\le c2^{n+1}|y|^{-n-1}|x|. \end{aligned}$$

3) Hier bezeichne λ_n das n-dimensionale Lebesgue-Maß.

Hiermit bekommt man

$$\int\limits_{|y|>2|x|} |K(y) - K(y-x)|dy \leq c2^{n+1} \int\limits_{|y|>2|x|} |y|^{-n-1}dy$$

$$= c2^{n+1}\omega_n|x| \int\limits_{2|x|}^{\infty} r^{-2}dr = c2^n\omega_n.$$

5. Sei $N \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad $-(n-1)$. Dann ist $K = \frac{\partial N}{\partial x_i}$ eine singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. In der Tat, zeigt man wie in 4. dass K die Eigenschaft (K1) besitzt. Wir zeigen noch, dass (K2) erfüllt ist. Seien $0 < r < R < +\infty$. Unter Verwendung des Satzes von Gauss und der Transformationsformel bekommt man

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\{r<|y|<R\}} K(y)dy &= \int\limits_{\{r<|y|<R\}} \frac{\partial N}{\partial x_i}(y)dy \\
&= \int\limits_{\{|y|=R\}} \frac{y_i}{R}N(y)dS - \int\limits_{\{|y|=r\}} \frac{y_i}{r}N(y)dS \\
&= \int\limits_{\{|y|=1\}} y_iN(R^{n-1}y)R^{n-1}dS - \int\limits_{\{|y|=1\}} y_iN(r^{n-1}y)r^{n-1}dS \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da r, R beliebig gewählt wurden folgt (K2).

Beispiel 2.3 Sei $\Gamma(y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n}|y|^{n-2}$ die Fundametallösung des Laplace-Operators. Wir defineren

$$K_{ij}(y) := \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{nx_ix_j - \delta_{ij}|x|^2}{\omega_n|x|^{n+2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (i,j \in \{1,\ldots,n\}).$$

Wie man leicht überprüft genügt K_{ij} die Bedingungen (K1), (K2). Folglich ist K_{ij} ein singulärer Kern homogen von Grad $-n$.

Bevor wir zur Definition singulären Integraloperators T_K auf der Menge $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ kommen, das folgende Lemma

Lemma 2.4 *Sei K ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir $K_\varepsilon(y) = K(y)\chi_{\{|y|>\varepsilon\}}$ $(y \in \mathbb{R}^n)$ und setzen*

$$T_K^\varepsilon f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\varepsilon(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt für alle $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \infty$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |T_K^\varepsilon f(x) - T_K^{\varepsilon'} f(x)| \leq \omega_n B \|\nabla f\|_{L^\infty} |\varepsilon - \varepsilon'|. \tag{2.7}$$

Ferner existiert eine Konstante $c > 0$ abhängig von n, so dass

$$\sup |T_K^\varepsilon f| \le \omega_n B \max |\nabla f| + c\|f\|_{L^2} \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.8}$$

Beweis 1° Fixiere $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \infty$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Aus der Definitition von T_K^ε und (K2) bekommt man

$$\begin{aligned} T_K^\varepsilon f(x) - T_K^{\varepsilon'} f(x) &= \int\limits_{\{\varepsilon < |y| \le \varepsilon'\}} f(x-y)K(y)dy \\ &= \int\limits_{\{\varepsilon < |y| \le \varepsilon'\}} (f(x-y) - f(x))K(y)dy. \end{aligned}$$

Mithilfe des Mittelwertsatzes zusammen mit (2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} |T_K^\varepsilon f(x) - T_K^{\varepsilon'} f(x)| &\le \sup |\nabla f| \int\limits_{\varepsilon < |y| \le \varepsilon'} |y|\,|K(y)|dy, \\ &\le \omega_n B (\sup |\nabla f|)|\varepsilon - \varepsilon'|. \end{aligned}$$

Dies zeigt (2.7).

2° Let $0 < \varepsilon < 1$. Unter Verwendung von (K2) findet man

$$\begin{aligned} T_K^\varepsilon f(x) &= \int\limits_{\{|y| > \varepsilon\}} f(x-y)K(y)dy \\ &= \int\limits_{\{\varepsilon < |y| < 1\}} (f(x-y) - f(x))K(y)dy + \int\limits_{\{|y| \ge 1\}} f(x-y)K(y)dy. \end{aligned}$$

Aus (2.7) mit $\varepsilon' = 1$ und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|T_K^\varepsilon f(x)| \le \omega_n B \max |\nabla f| + \|f\|_{L^2} \left(\int\limits_{|y| \ge 1} |K(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Wegen (2.5) folgt (2.8) aus der letzten Ungleichung.

■

Definition 2.5 *Sei $K = K(y)$ ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$, welcher (K1), (K2) erfüllt. Sei $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren*

$$T_K f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\{|y| > \varepsilon\}} f(x-y)K(y)dy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_K^\varepsilon f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Bemerkung 2.6 Aufgrund von (2.7) (vgl. Lemma 2.4) folgt, dass $T_K^\varepsilon f$ gleichmäßig gegen eine Funktion $T_K f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Somit ist $T_K f$ für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert. Aus (2.8) schließt man $T_K f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wir kommen nun zu dem folgenden zentralen Satz der Calderón-Zygmund Theory

Satz 2.7 (**Calderón-Zygmund**) *Sei K ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$.*
1. Für alle $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|T_K f\|_{L^1_w} = \sup_{t>0} \Big(t\, \lambda_n(\{|T_K f| > t\}) \Big) \leq M_1 \|f\|_{L^1}. \tag{2.9}$$

2. Für alle $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|T_K f\|_{L^2} \leq M_2 \|f\|_{L^2}. \tag{2.10}$$

3. Für alle $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|T_K f\|_{L^p} \leq M_p \|f\|_{L^p} \quad 1 < p < +\infty. \tag{2.11}$$

Satz 2.8 *Sei K ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. Für jedes $1 < p < +\infty$ existiert genau ein beschränkter linearer Operator $T_K^p : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ so dass*

$$T_K^p|_{C_c^1(\mathbb{R}^n)} = T_K.$$

Beweis Da $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht ist folgt die Behauptung sofort aus (2.11). ∎

Bemerkung 2.9 Sei $N \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ homogen vom Grad $-(n-1)$. Dann nennt man N auch schwach singulär. Wir setzen $K = \frac{\partial N}{\partial x_i}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$. Wie in Bem. 2.3/5. gezeigt wurde, ist K ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. Dann gilt für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$T_K f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy - f(x) \int\limits_{S_{n-1}} y_i N(y) dS \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

wobei S_{n-1} die $n-1$-dimensionale Einheitssphäre $\{|x| = 1\}$ bezeichne.

Hierfür sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann bekommt man mithilfe des Gauschen Integralsatzes

$$\begin{aligned} T_K^\varepsilon f(x) &= \int\limits_{\{|y|>\varepsilon\}} \frac{\partial N}{\partial x_i}(y) f(x-y) dy = \\ &= \int\limits_{\{|y|>\varepsilon\}} N(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy - \int\limits_{|y|=\varepsilon} \frac{y_i}{\varepsilon} N(y) f(x-y) dS \\ &= \int\limits_{\{|y|>\varepsilon\}} N(y) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) dy - \int\limits_{|y|=1} y_i N(y)(f(x-\varepsilon y) - f(x)) dS \\ &\quad - f(x) \int\limits_{\{|y|=1\}} y_i N(y) dS. \end{aligned}$$

Nach Ausführung des Grenzübergangs $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. ∎

2.2 Anwendungen

Wir definieren den Raum $\widehat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ $\quad (1 \le p < +\infty; m \in \mathbb{N})$ durch

$$\widehat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \Big\{ u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Big| \nabla^m u \in L^p(\mathbb{R}^n),$$
$$\int\limits_{B_1} uP dx = 0 \quad \textit{für jedes Polynom } P \textit{ mit } \deg P \le m-1 \Big\}.$$

Dieser Raum wird ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{\widehat{W}^{m,p}} = \|\nabla^m u\|_{L^p}, \quad u \in \widehat{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$(2.13) \qquad -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

Satz 2.10 *Für alle* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$ *existiert genau eine Lösung* $u \in \widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ *von* (2.13).

Beweis 1. Wir betrachten den Fall $f \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Sei $\Gamma(y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n |y|^{n-2}}$ die Fundamentallösung von $-\Delta$. Wir setzen $v := \Gamma * f$,

$$v(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) f(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(y) f(x-y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_i(y) f(x-y) dy,$$

wobei $N_i(x) = -\frac{x_i}{\omega_n |x|^n}$. Offensichtlich ist $N_i \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ homogen von Grad $-(n-1)$. Gemäß Bem. 2.3/5. ist $K_{ij} = \frac{\partial N_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_i \partial x_j}$ ein singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. Nach Folgerung 2.9 erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} N_i(y) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x-y) dy \\ &= (T_{K_{ij}} f)(x) + f(x) \int\limits_{\{|y|=1\}} y_j N_i(y) dS \\ &= (T_{K_{ij}} f)(x) - \frac{f(x)}{n} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Die obige Identität zeigt außerdem wegen $\sum\limits_{i=1}^n K_{ii} = 0$, dass $\Delta v = -f$. Gemäß Satz 2.8 folgt mit $u = v - v_{B_1} - (\nabla v)_{B_1} \cdot x \in \widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$

$$(2.14) \qquad \|\nabla^2 v\|_{L^p} = \|\nabla^2 u\|_{L^p} \le c \|f\|_{L^p}.$$

2. Nun sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Dann existiert (f_m) in $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ mit $f_m \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $m \to +\infty$. Wir definieren $u_m \in \widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ wie in 1. Nach (2.14) ist (u_m) eine Cauchy-Folge in $\widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$, welche in $\widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ gegen u konvergiert. Insbesondere löst u die Gleichung (2.13).

3. Eindeutigkeit Sei $u \in \widehat{W}^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $-\Delta u = 0$. Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ haben wir $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\Delta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. Aus dem Satz von Liouville folgt $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$. Somit ist u linear. Folglich ist $\int\limits_{B_1} u^2 dx = 0$, also $u = 0$. ■

Bemerkung 2.11 Sei $1 < p < +\infty$. Dann ist $-\Delta : L^p(\mathbb{R}^n) \to \widehat{W}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus, wobei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \Delta u \frac{\delta_{ij}}{n} - T_{K_{ij}}(\Delta u) \quad (i, j = 1, \dots, n). \tag{2.15}$$

Als nächstes betrachten wir das Cauchy-Problem

$$-\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \tag{2.16}$$

für $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p < +\infty$ und beweisen Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, welche der folgenden Integralidentität genügt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n). \tag{2.17}$$

Satz 2.12 *Für alle* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < +\infty)$ *existiert genau eine schwache Lösung* $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *von* (2.16), *welche der Integralidentität* (2.17) *genügt. Ferner gilt die Abschätzung*

$$\|\nabla u\|_{L^p} \le c \|\boldsymbol{f}\|_{L^p}, \tag{2.18}$$

wobei $c = c(n, p) = \text{const.}$

Beweis 1. Zunächst sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen

$$w(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Unter Verwendung partieller Integration bekommt man.

$$w(x) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(y) f^i(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Für $j \in \{1, \dots, n\}$ folgt

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(y) \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x - y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wie im Beweis von Satz 2.10 findet man

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x_j} &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} T_{K_{ij}} f^i - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} T_{K_{ij}} \frac{f^i}{n} \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} T_{K_{ij}} f^i - \frac{f^j}{n}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aus Satz 2.8 ergibt sich für $u = w - w_{B_1} \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

$$\|\nabla u\|_{L^p} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{2.20}$$

Außerdem folgt aus $-\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$ unter Verwendung partieller Integration, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^n). \tag{2.21}$$

Ist $v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$, so gibt es eine Folge (φ_m) in $C^1_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\varphi_m - (\varphi_m)_{B_1}$ in $\widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ gegen v konvergiert. Dies bestätigt (2.17).

2. Ist $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$, folgt die Aussage ähnlich wie im Beweis von Satz 2.10 mithilfe von (2.20).

3. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls wie im Beweis von Satz 2.10. ■

Folgerung 2.13 *Für jedes $1 < p < +\infty$ ist der Operator $A_p : \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to (\widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n))^*$, definiert durch*

$$\langle A_p u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u \in \widehat{W}^{-1,p}(\mathbb{R}^n), v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n) \tag{2.22}$$

ein Isomorphismus.

Beweis Sei $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 2.12 existiert genau eine schwache Lösung $v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ von (2.16) mit $\boldsymbol{f} = -|\nabla u|^{p-2}\nabla u$, d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.23}$$

Aus (2.23) mit $\varphi = u$ und (2.18) ergibt sich

$$\|\nabla u\|^p_{L^p} = \langle A_p u, v\rangle \le c\|A_p u\|_{(\widehat{W}^{1,p'})^*}\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p}.$$

Folglich,

$$\|u\|_{\widehat{W}^{1,p}} \le c\|A_p u\|_{(\widehat{W}^{1,p'})^*}.$$

Dies zeigt, dass A_p injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat. Mithilfe der kanonischen Isometrie $(\widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n))^{**} = \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ erhält man $A^*_{p'} = A_p$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus dem Satz vom abgeschlossenen Bild. Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen ■

2.3 L^p Abschätzungen auf dem Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Wir betrachten nun die Poisson-Gleichung im Halbraum $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$

$$-\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \{x_n = 0\}. \tag{2.24}$$

Mit $\widehat{W}^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+)$ bezeichnen wir die Abschließung von $C^1_c(\mathbb{R}^n_+)$ bezgl. der Norm $\|\nabla u\|_{L^p}$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $y^* = (y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n)$. Die Fundamentallösung von (2.24) ist gegeben durch

$$\Gamma_{\mathbb{R}^n_+}(x, y) = \Gamma(x - y) - \Gamma(x - y^*), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y.$$

Das heißt für $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^2_c(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ ist

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (\Gamma(x - y) - \Gamma(x - y^*)) \operatorname{div} \boldsymbol{f}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \tag{2.25}$$

Lösung von (2.24).

Zunächst einige Bezeichnungen: Sei $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $f^*(x) = f(x^*)$. Wir sagen f ist gerade bezüglich x_n, falls $f^* = f$ und ungerade bezüglich x_n, falls $f^* = -f$. Wir haben das folgende

Lemma *1. Sei $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so dass (f^i) ist gerade bezüglich x_n für $i = 1, \ldots, n-1$ und f^n ist ungerade bezüglich x_n. Sei $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Lösung von (2.16). Dann ist u gerade.*

2. Sei $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so dass (f^i) ist ungerade bezüglich x_n für $i = 1, \ldots, n-1$ und f^n ist gerade bezüglich x_n. Sei $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Lösung von (2.16). Dann ist u ungerade.

Beweis 1. Sei $v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$, dann folgt aus der Kettenregel und Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u^* \cdot \nabla v dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v^* dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v^* dx = -\sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f^i)^* \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f^n)^* \frac{\partial v}{\partial x_n} dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx.
\end{aligned}$$

Also ist u^* ebenfalls eine Lösung von (2.16). Wegen der Eindeutigkeit folgt $u^* = u$, also ist u gerade.

2. Analog wie oben zeigt man

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla(-u^*) \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Aufgrund der Eindeutigkeit folgt $-u^* = u$, also ist u ungerade. ■

Es gilt der folgende

Satz 2.14 *Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ von (2.24), d.h.*

$$(2.26) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in \widehat{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+)$$

und es existiert $c = c_{n,p} = \mathrm{const} > 0$,

$$(2.27) \qquad \|\nabla u\|_{L^p} \leq c\|\boldsymbol{f}\|_{L^p}.$$

Beweis 1. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_c^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Wir definieren u gemäß (2.25). Dann folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) f^i(y) dy - \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y^*) f^i(y) dy \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n}(x-y^*) f^n(y) dy \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y) \widetilde{f}^i(y) dy \end{aligned}$$

wobei

$$\widetilde{f}^i = f^i_{\mathrm{odd}} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad \widetilde{f}^n = f^n_{\mathrm{even}}.$$

Hierbei $f^i_{\mathrm{even}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die bezüglich x_n ungerade Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$ und $f^i_{\mathrm{odd}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die bezüglich x_n gerade Fortsetzung auf $\mathbb{R}^n$.

Setzt man $\widetilde{u} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} * \widetilde{f}^i - \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} * \widetilde{f}^i\right)_{B_1}$, so ist $\widetilde{u} \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von (2.16). Ferner folgt aus dem Lemma, dass $\widetilde{u}$ ungerade ist. Folglich gilt $u = \widetilde{u} = 0$ auf $\{x_n = 0\}$, also $u \in \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Nach Satz 2.12

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq c\|\boldsymbol{f}\|_{L^p}.$$

2. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Approximation von $\boldsymbol{f}$ durch eine Folge $(\boldsymbol{f}_m)$ in $C_c^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ unter Verwendung der obigen Abschätzung.

3. Zur Eindeutigkeit siehe Folg. 2.15 unten. ■

Ähnlich wie Folg. 2.13 zeigt man

Folgerung 2.15 *Für jedes $1 < p < +\infty$ ist $A_{p,\mathrm{dir}} : \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to (\widehat{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+))^*$, definiert durch*

$$(2.28) \qquad \langle A_{p,\mathrm{dir}} u, v \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u \in \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), v \in \widehat{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+)$$

ein Isomorphismus.

Beweis Man sieht leicht, dass $A_{p,\mathrm{dir}}$ ein beschränkter Operator ist. Nun sei $u \in \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ beliebig. Offensichtlich ist $\boldsymbol{f} = |\nabla u|^{p-2}\nabla u \in \boldsymbol{L}^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Gemäß Satz 2.14 existiert genau ein $v \in \widehat{W}_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+)$, so dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall \varphi \in \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.29}$$

Ferner gilt

$$\|\nabla v\|_{\boldsymbol{L}^{p'}} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^{p'}} \le c\|\nabla u\|^{p-1}_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{2.30}$$

Aus (2.29) mit $\varphi = u$ zusammen mit (2.30) folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|^p_{L^p} &= \langle A_{p,\mathrm{dir}}u, v\rangle \le \|A_{p\mathrm{dir}}u\|_{(\widehat{W}_0^{1,p})^*}\|\nabla v\|_{L^{p'}}\\ &\le \|A_{p,\mathrm{dir}}u\|_{(\widehat{W}_0^{1,p})^*}\|\nabla u\|^{p-1}_{L^p}.\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$\|u\|_{\widehat{W}_0^{1,p}} \le c\|A_{p,\mathrm{dir}}u\|_{(\widehat{W}_0^{1,p})^*}.$$

Folglich ist $A_{p,\mathrm{dir}}$ injektiv und hat abgeschlossenes Bild.

Da $\widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ reflexiv ist, gilt die kanonische Isometrie $(\widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+))^{**} = \widehat{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Hiermit ergibt sich $A^*_{p',\mathrm{dir}} = A_{p,\mathrm{dir}}$. Da $A_{p',\mathrm{dir}}$ injektiv ist, folgt aus dem Satz vom abgeschlossenem Bild, dass $A_{p,\mathrm{dir}}$ ein Isomorphismus ist. ■

Als nächstes betrachten wir das Neumann-Problem

$$-\Delta u = \operatorname{div}\boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = f^n \quad \text{auf} \quad \{x_n = 0\}. \tag{2.31}$$

Mit $\widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ bezeichnen wir den Raum aller $u \in L^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n}_+)$ mit $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$ und $\int\limits_{B_1^+} udx = 0$ ($B_1^+ = B_1 \cap \mathbb{R}^n_+$). Wir definieren nun die schwache Lösung zu (2.31) wiefolgt

Definition 2.16 Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$. Eine Funktion $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ heißt schwache Lösung von (2.31), falls

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.32}$$

Dann gilt der

Satz 2.17 *Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ von (2.31). Ferner gibt es eine Konstante $c = c_{n,p} > 0$,*

$$\|\nabla u\|_{L^p} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{2.33}$$

Beweis 1. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}_c^1(\mathbb{R}^n_+)$. Wir definieren

$$\widetilde{w}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x-y)\widetilde{f^i}(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\widetilde{f^i} = f^i_{\text{even}} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \quad \widetilde{f^n} = f^n_{\text{odd}}.$$

Dann ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla \widetilde{w} \cdot \nabla v dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\boldsymbol{f}} \cdot \nabla v \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Also $\widetilde{u} = \widetilde{w} - \widetilde{w}_{B_1} \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ist schwache Lösung von (2.16). Aus dem obigen Lemma schließt man, dass $\widetilde{u}$ gerade ist. Wir setzen $u := \widetilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+}$. Insbesondere, folgt $2u_{B_1^+} = \widetilde{u}_{B_1} = 0$, also $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Weiter berechnet man

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial x_j} = T^p_{K_{ij}} \widetilde{f^i} - \frac{f^j}{n} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.34}$$

Sei $v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+)$. Dann ist $v_{\text{even}} \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla w \cdot \nabla v dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla \widetilde{w} \cdot \nabla v_{\text{even}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f^i} \frac{\partial v_{\text{even}}}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Satz 2.7 erhält man

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \le c \|\boldsymbol{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{2.35}$$

2. Der allgemeine Fall folgt mithilfe von Approximation unter Verwendung der Ungleichung (2.35).
3. Eindeutigkeit (Siehe Folgerung 2.18 unten). ■

Wie oben erhalten wir die

Folgerung 2.18 *Sei $1 < p < +\infty$. Wir definieren $A_{p,\text{ne}} : \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to (\widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+))^*$ definiert durch*

$$\langle A_{p,\text{ne}} u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.36}$$

Dann ist $A_{p,ne}$ ein Isomorphismus.

Beweis Offensichtlich ist $A_{p,\mathrm{ne}}$ ein beschränkter Operator. Sei $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Gemäß Satz 2.17 existiert ein $v \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, so dass

$$(2.37) \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Ferner gilt

$$(2.38) \qquad \|\nabla v\|_{L^{p'}} \le c \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}.$$

Setzt man in (2.37) $\varphi = u$, so ergibt sich zusammen mit (2.38)

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^p_{L^p} &= \langle A_{p,\mathrm{ne}} u, v\rangle \le \|A_{p,ne} u\|_{(\widehat{W}^{1,p})^*} \|\nabla v\|_{L^{p'}} \\ &\le c \|A_{p,\mathrm{ne}} u\|_{(\widehat{W}^{1,p})^*} \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p}. \end{aligned}$$

Also

$$\|u\|_{\widehat{W}^{1,p}} \le c \|A_p u\|_{(\widehat{W}^{1,p})^*}.$$

Somit ist $A_{p,\mathrm{ne}}$ injektiv und hat ein abgeschlossenes Bild.

Da $\widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ reflexiv ist, haben wir die kanonische Isometrie $(\widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+))^{**} = \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Folglich gilt für den adjungierten Operator $(A_{p',\mathrm{ne}})^* = A_{p,\mathrm{ne}}$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild ist $A_{p,\mathrm{ne}}$ surjectiv, und mithin ein Isomorphismus. ∎

2.4 L^p Theorie für beschränkte C^1-Gebiete

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet. Sei $W^{1,2}_0(\Omega)$ der übliche Sobolev-Raum. Ferner sei $\widehat{W}^{1,2}(\Omega)$ der Raum $\{u \in W^{1,p}(\Omega) \,|\, u_{\Omega=0}\}$.
Wir betrachten das Dirichlet-Problem

$$(\mathrm{D}) \qquad -\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega,$$

bzw. das Neumann-Problem

$$(\mathrm{N}) \qquad -\Delta u = \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Definition 2.19 Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$.

1. $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (D), falls

$$(2.39) \qquad \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in W^{1,p'}_0(\Omega).$$

2. $u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* von (N), falls

$$(2.40) \qquad \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in W^{1,p'}(\Omega).$$

Satz 2.20 *1. Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ von (D) und genau eine schwache Lösung $u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega)$ von (N). Ferner gibt es eine Konstante $c = c(n, p, \Omega)$:*

$$\|\nabla u\|_{\boldsymbol{L}^p} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{2.41}$$

Folgerung 2.21 *Sei $1 < p < +\infty$. Wir definieren $A_{p,\mathrm{dir}} : W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p'}(\Omega))^*$ durch*

$$\langle A_{p,\mathrm{dir}} u, v\rangle = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega), v \in W_0^{1,p'}(\Omega). \tag{2.42}$$

und $A_{p,\mathrm{ne}} : \widehat{W}^{1,p}(\Omega) \to (\widehat{W}^{1,p'}(\Omega))^*$ durch

$$\langle A_{p,\mathrm{ne}} u, v\rangle = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega), v \in \widehat{W}^{1,p'}(\Omega). \tag{2.43}$$

Dann sind $A_{p,\mathrm{dir}}$ und $A_{p,\mathrm{ne}}$ ein Isomorphismen.

2.5 Helmholtz-Projektion

1. Der Ganzraum. Wir definieren $\boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$ als den Raum aller $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Ferner bezeichne $G_p(\mathbb{R}^n)$ die Menge $\{\nabla v \,|\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n)\}$.

Sei $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Gemäß Satz 2.12 existiert genau ein $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^n).$$

Wir setzen

$$\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n).$$

Aus der (2.19) mit $-\boldsymbol{f}$ anstelle von $\boldsymbol{f}$ folgt

$$\nabla u = -T_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{f} + \frac{\boldsymbol{f}}{n} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbb{P}\boldsymbol{f}) = T_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{f} + \frac{n-1}{n}\boldsymbol{f},$$

wobei $(T_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{f})_i = \sum\limits_{j=1}^n T_{K_{ij}} f^j$.

Wir haben nun den Satz

Satz 2.22 *Für jedes $1 < p < +\infty$ ist $\mathbb{P} : \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n) \to \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$ ein Projektor. Im Fall $p = 2$ sind $L^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n) \perp G^2(\mathbb{R}^n)$ orthogonal.*

Beweis Wegen $\mathbb{P}\boldsymbol{f} = T_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{f} + \frac{n-1}{n}\boldsymbol{f}$ folgt aus Satz 2.8, dass $\mathbb{P}$ ein beschränkter Operator ist. Außerdem folgt aus der Definition von $\mathbb{P}$, dass $\mathrm{im}(\mathbb{P}) \subset \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$. Hierfür sei $\boldsymbol{f} \in L^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$ das 0 Funktional, also $u = 0$ die einzige Lösung von $-\Delta u = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{f}$. Dies impliziert sofort $\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$.

Im Fall $p = 2$ folgt wegen $2' = 2$ die Orthogonalität sofort aus der Definition von $\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Bemerkung 2.23 Für alle $1 < p < +\infty$ gilt

$$\boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n) = \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n) \oplus G^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.44}$$

Denn für $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n)$ haben wir

$$\boldsymbol{f} = \mathbb{P}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f} - \mathbb{P}\boldsymbol{f} = \mathbb{P}\boldsymbol{f} - \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n) + G^p(\mathbb{R}^n).$$

Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n) \cap G^p(\mathbb{R}^n)$ dann gilt $\boldsymbol{f} = \mathbb{P}\boldsymbol{f} = 0$. Denn $\mathbb{P}\nabla u = 0$ für alle $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dies sieht man, da $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ schwache Lösung von $-\Delta u = -\,\mathrm{div}\,\nabla u$, also $\mathbb{P}\nabla u = \nabla u - \nabla u = 0$.

2. $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ oder $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes C^1-Gebiet. Mit $\boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \nabla\phi dx = 0 \quad \forall\, \phi \in C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}).$$

Ferner sei $\boldsymbol{G}^p(\Omega) = \{\nabla u \,|\, u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega)\}$. Wir definieren die Helmholtz-Projektion $\mathbb{P} : \boldsymbol{L}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ wiefolgt. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\mathbb{R}^n_+)$. Wir definieren

$$\mathbb{P}_\Omega \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \nabla u,$$

wobei $u \in \widehat{W}^{1,2}(\Omega)$ Lösung des Neumann-Problems (N) mit $-\boldsymbol{f}$ anstelle von $\boldsymbol{f}$ ist.

Wie Satz 2.22 zeigt man

Satz 2.24 *Für jedes $1 < p < +\infty$ ist $\mathbb{P} : \boldsymbol{L}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)$ eine Projektion. Insbesondere gilt*

$$\boldsymbol{L}^p(\Omega) = \boldsymbol{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega) \oplus \boldsymbol{G}^p(\Omega). \tag{2.45}$$

Im Fall $p = 2$ sind $\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \perp \boldsymbol{G}^2(\Omega)$ orthogonal.

Beweis Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$. Sei $u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega)$ die eindeutige Lösung von (N) mit $-\boldsymbol{f}$ anstelle von $\boldsymbol{f}$, d.h.

$$\int_\Omega (\boldsymbol{f} - \nabla u) \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\Omega).$$

Folglich ist $\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \nabla u \in \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega)$. Außerdem folgt aus Satz 2.17 bzw. Satz 2.20 dass

$$\|\mathbb{P}\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p} \leq c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{2.46}$$

Also ist $\mathbb{P} : \boldsymbol{L}^p(\Omega) \to \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ beschräkt mit $\text{im}(\mathbb{P}) \subset \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega)$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$. Hierfür sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega)$. Dann ist 0 die eideutige Lösung von (N). Folglich ist $\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$, also $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$. Insbesonere haben wir

$$\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f} - \nabla u) + \nabla u = \mathbb{P}\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{f} - \mathbb{P}\boldsymbol{f}) \in \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega) + \boldsymbol{G}^p(\Omega).$$

Ist $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega) \cap \boldsymbol{G}^p(\Omega)$, so existiert ein $u \in \widehat{W}^{1,p}(\Omega)$ mit $\boldsymbol{f} = \nabla u$, so dass

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall\, v \in \widehat{W}^{1,p'}(\Omega).$$

Gemäß Satz 2.20 ist $u = 0$ und mithin $\boldsymbol{f} = 0$. Zusammen mit (2.46) folgt $\boldsymbol{L}^p(\Omega) = \boldsymbol{L}^p_{\text{div}}(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$.

Im Fall $p = 2$ folgt wegen $2' = 2$ die Orthogonalität sofort aus der Definition von $L^2_{\text{div}}(\Omega)$. ■

Bemerkung 2.25 1. Sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+$. Sei $\boldsymbol{f} \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$. Gemäß Satz 2.17 existiert genau eine schwache Lösung $u \in \widehat{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ von (N). Aufgrund von (2.34) haben wir

$$\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - \nabla u = \boldsymbol{f} + T_{\boldsymbol{K}}\widetilde{\boldsymbol{f}}|_{\mathbb{R}^n_+} - \frac{\boldsymbol{f}}{n} = T_{\boldsymbol{K}}\widetilde{\boldsymbol{f}}|_{\mathbb{R}^n_+} + \frac{n-1}{n}\boldsymbol{f},$$

wobei $\widetilde{f}^i = f^i_{\text{even}}$, $(i = 1, \ldots, n-1)$ und $\widetilde{f}^n = f^n_{\text{odd}}$.
2. Die Helmholtz-Projektion kann auch definiert werden durch

$$\mathbb{P}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} + \nabla A^{-1}_{p,\text{ne}}\nabla^*\boldsymbol{f}, \quad \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega), \tag{2.47}$$

wobei

$$\langle \nabla^*\boldsymbol{f}, v\rangle = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \nabla v dx, \quad v \in \widehat{W}^{1,p'}(\Omega).$$ [4]

■

3 Das stationäre Stokes-System

3.1 Funktionenräume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ offen. Mit $L^p(\Omega)$ bzeichnen wir alle Lebesgue-meßbaren Funktioen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{cases} \|f\|^p_{L^p} = \displaystyle\int_\Omega |f|^p dx < +\infty & \text{falls} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| < +\infty & \text{falls} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

[4] Hier ist $\nabla : \widehat{W}^{1,p'}(\Omega) \to \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$ und $\nabla^* : \boldsymbol{L}^p(\Omega) \to (\widehat{W}^{1,p}(\Omega))^*$.

Mit $W^{m,p}(\Omega)$ bezeichnen wir den üblichen Sobolev-Raum aller $u \in L^q(\Omega)$ mit $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ für alle $|\alpha| \leq m$ und der Norm

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \Big)^{1/p}.$$

Ist Ω unbeschränkt, so bezeichne $\widehat{W}_0^{1,p}(\Omega)\,(1 \leq p < +\infty)$ den homogenen Sobolev-Raum und ist definiert als die Abschließung $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{\widehat{W}^{1,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Räume divergenzfreier Funktionen (*solenoidal*): Mit $\boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller glatten Vektorfelder $\boldsymbol{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger und $\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0$.

Mit $\boldsymbol{W}_{0,\mathrm{div}}^{1,p}(\Omega)$ bezeichen wir die Abließung von $\boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Mit $\widehat{\boldsymbol{W}}_{0,\mathrm{div}}^{1,p}(\Omega)$ bezeichen wir die Abließung von $\boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\widehat{W}^{1,p}(\Omega)}$.

Mit $\boldsymbol{L}_{\mathrm{div}}^p(\Omega)$ bezeichnen wir die Abschließung von $\boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^\infty(\Omega)$ bezüglich der L^p-Norm.

Bemerkung 3.1 Es gilt:

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{div}}^p(\Omega) = \Big\{ \boldsymbol{u} \in L^p(\Omega) \Big| \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi dx = 0 \quad \forall\, \phi \in \widehat{W}^{1,p'}(\Omega) \Big\}.$$

Offensichtlich ist die linke Seite ein abgeschlossener Teilraum von $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$, den wir mit $\boldsymbol{V}$ bezeichnen. Wie man leicht sieht, gilt $\boldsymbol{L}_{\mathrm{div}}^p(\Omega) \subset \boldsymbol{V}$.

3.2 Fundamentallemma der Strömungsmechanik

Lemma 3.2 *Sei* $u \in \boldsymbol{L}_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$ *mit*

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^\infty(\Omega) \tag{3.1}$$

Dann existiert ein $p \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\Omega)$*, so daß*

$$\boldsymbol{u} = \nabla p \quad \textit{f.ü. in} \quad \Omega.$$

Beweis 1° Wir beweisen die Aussage für $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^0(\Omega)$. Sei $\boldsymbol{\gamma} : [0,1] \to \Omega$ ein beliebiger geschlossener Polygonzug. Sei $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ die übliche Mittelfunktion mit $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) \subset$

$B_\varepsilon(0)$. Für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\boldsymbol{\gamma}, \partial\Omega)$ haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{u} * \rho_\varepsilon &= \int_0^1 \boldsymbol{u} * \rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(t))\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)dt \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \boldsymbol{u}(y)\rho_\varepsilon(\gamma(t) - y)dy\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)dt \\
&= \int_\Omega \boldsymbol{u}(y) \int_0^1 \rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(t) - y)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)dtdy.
\end{aligned}$$

Andererseits,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \int_0^1 \rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(t) - y)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)dt &= -\int_0^1 \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \cdot \nabla\rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(t) - y)dt \\
&= -\int_0^1 \frac{dt}{dt}\rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(t) - y)dt \\
&= -\rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(1) - y) + \rho_\varepsilon(\boldsymbol{\gamma}(0) - y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Gemäß (3.1) gilt

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} * \rho_\varepsilon = 0.$$

Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon \to 0$ liefert

$$\int_\gamma \boldsymbol{u} = 0.$$

Somit existiert ein $p \in C^1(\Omega)$ mit $\boldsymbol{u} = \nabla p$.

2° $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)^n$. Sei $B \subset \Omega$ eine Kugel mit $\operatorname{dist}(B, \partial\Omega) > 0$. Für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(B, \partial\Omega)$, definieren wir $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{u} * \rho_\varepsilon$. Dann ist $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in \boldsymbol{C}^0(B)$ und es gilt für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^\infty_{0,\text{div}}(B)$

$$\int_B \boldsymbol{u}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi} dx = \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{\varphi} * \rho_\varepsilon)dx = 0.$$

Nach 1° existiert ein $p_{B,\varepsilon} \in C^1(B)$ mir $(p_\varepsilon)_B = 0$, so dass $\boldsymbol{u}_\varepsilon = \nabla p_{B,\varepsilon}$ fast überall in B. Insbesondere, folgt mithilfe der Poincaré-Ungleichung

$$\|p_{B,\varepsilon}\|_{L^1(B)} \le c\|\nabla p_{B,\varepsilon}\|_{\boldsymbol{L}^1(B)} \le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^1(B)}.$$

Folglich ist $(p_{B,\varepsilon})$ in $W^{1,1}(B)$ beschränkt. Wegen $\boldsymbol{u}_\varepsilon \to \boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{L}^1(B)$ für $\varepsilon \to 0$ und der Vollständigkeit von $W^{1,1}(B)$ existiert ein $p_B \in W^{1,1}(B)$ mit $(p_B)_B = 0$, so dass

$$p_{B,\varepsilon} \to p_B \quad \text{in} \quad W^{1,1}(B) \quad \text{für} \quad \varepsilon \to +\infty.$$

also $\boldsymbol{u} = \nabla p_B$ fast überall in B. Sei $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare ¨berdeckung von Ω, so dass

$$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega, \quad B_{m+1} \cap \cup_{i=1}^{m} B_i \neq \emptyset.$$

Wir setzen $\Omega_m = \bigcup_{i=1}^m B_i$ und definieren $p \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ rekursiv durch folgende Vorschrift.
(i) Zunächst setzen wir $p = p_{B_1}$ auf $\Omega_1 = B_1$.
(ii) Angenommen p ist bereits auf Ω_m definiert, haben wir

$$\nabla p_{B_{m+1}} = \nabla p = \boldsymbol{u} \quad \text{auf} \quad B_{m+1} \cap \Omega_m.$$

Also ist $p_{B_{m+1}} - p = c_{m+1} = \text{konst}$. Wir setzen

$$p = p_{B_{m+1}} - c_{m+1} \quad \text{fast überall auf} \quad B_{m+1} \setminus \Omega_m.$$

Dann ist $p \in W^{1,1}(\Omega_{m+1})$ mit $\nabla p = \boldsymbol{u}$ fast überall auf Ω_{m+1}. ■

3.3 Hydrodynamische Potentiale

Definition 3.3 Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,4\}$. Wir definieren die *Hydrodynamische Potentiale* wiefolgt

$$\Gamma^{HD}_{ij,\text{div}}(x) = \frac{1}{2\omega_n(n-2)} \frac{\delta_{ij}}{|x|^{n-2}} + \frac{x_i x_j}{2\omega_n |x|^n} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{HD}_{ij,\text{grad}}(x) &= \frac{1}{2\omega_n(n-2)} \frac{\delta_{ij}}{|x|^{n-2}} - \frac{x_i x_j}{2\omega_n |x|^n} \\ &= -\frac{1}{2\omega_n(n-2)(n-4)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|x|^{n-4}}. \end{aligned}\tag{3.3}$$

Lemma 3.4 *Sei $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^\infty_{\text{c}}(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren*

$$u^i = \sum_{j=1}^n \Gamma^{HD}_{ij,\text{div}} * \varphi^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt ist $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ und es gilt

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \mathbb{P}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} - \nabla p \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

wobei $p = \Delta^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = -\Gamma * \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}$. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^p} + \|\nabla p\|_{\boldsymbol{L}^p} \leq c \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^p}. \tag{3.4}$$

Beweis Aus der Definition von $\boldsymbol{u}$ und den Eigenschaften der Faltung ergibt sich $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Hieraus schließt man

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_i} * \boldsymbol{\varphi} = 0.$$

Als nächstes bemerken wir, dass

$$\Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD} = \delta_{ij}\Gamma - \Gamma_{ij,\mathrm{grad}}^{HD} = \Gamma\delta_{ij} + \frac{1}{2\omega_n(n-2)(n-4)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{|x|^{n-4}}.$$

Dies zeigt,

$$u^i = \Gamma * \varphi^i + \frac{1}{2\omega_n(n-2)(n-4)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|x|^{n-4}} * \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wendet man $-\Delta$ auf die obige Gleichung an, so ergibt sich mit $-\Delta \frac{1}{|x|^{n-4}} = 2(n-4)\frac{1}{|x|^{n-2}}$

$$-\Delta u^i = \varphi^i + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma * \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \varphi^i - \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}.$$

Aus (2.14) (vgl. Beweis von Satz 2.10) und Satz 2.22 folgt (3.4). ∎

Lemma 3.5 *Seien* $f_{ij} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (i,j = 1, \ldots, n)$. *Wir definieren*

$$u^i = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_k} * f_{jk} = \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD} * \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_k}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt ist $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, *so dass*

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{f} - \nabla p \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$p = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} * \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\boldsymbol{f} - \sum_{i,j=1}^n T_{K_{ij}} f_{ij}. \tag{3.5}$$

Sei $1 < q < +\infty$. *Dann existiert* $c = c(n,q)$, *so dass*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|p\|_{L^q} \leq c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q}. \tag{3.6}$$

Beweis Dies Behauptung des Lemmas folgt leicht aus Lemma 3.4 unter Verwendung der Eigenschaften der Faltung. Die Formel (3.5) ergibt sich aus (2.19).

Ferner setzen wir

$$K_{ij}^{kl} = \frac{\partial^2 \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_k \partial x_l}, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,n$$

Dann ist K_{ij}^{kl} singulärer Kern homogen vom Grad $-n$. Aus der Definition von u folgt

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_l} = \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_l} * \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_k}, \quad i,l = 1,\ldots,n.$$

Aus (2.12) (vgl. Bemerkung 2.9) folgt

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_l} = \sum_{k,j=1}^{n} T_{K_{ij}^{kl}} f_{jk} + \sum_{k,j=1}^{n} f_{jk} \int\limits_{S_{n-1}} y_k \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_l}(y) dS$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_l}(y) = -\delta_{ij} \frac{y_l}{2\omega_n |y|^n} + \frac{\delta_{il} y_j + \delta_{jl} y_i}{2\omega_n |y|^n} - \frac{n}{2\omega_n} \frac{y_i y_j y_l}{|y|^{n+2}}.$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S_{n-1}} y_k \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_l}(y) dS &= -\frac{\delta_{ij}}{2\omega_n} \int\limits_{S_{n-1}} y_k y_l dS + \frac{1}{2\omega_n} \int\limits_{S_{n-1}} \delta_{il} y_j y_k + \delta_{jl} y_i y_k dS \\
&\quad - \frac{n}{2\omega_n} \int\limits_{S_{n-1}} y_i y_j y_k y_l dS \\
&= -\frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{2n} + \frac{\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik}}{2n} - \frac{n}{2\omega_n} \int\limits_{B_1} \delta_{ij} y_k y_l + \delta_{ik} y_j y_l + \delta_{il} y_j y_k dy \\
&= -\frac{\delta_{ij}\delta_{kl}}{2n} + \frac{\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik}}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned}$$

Somit berechnet man

$$\int\limits_{S_{n-1}} y_k \frac{\partial \Gamma_{ij,\mathrm{div}}^{HD}}{\partial x_l}(y) dS = -\frac{n+1}{n(n+2)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{n(n+2)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{3.7}$$

Setzt man (3.7) oben ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^i}{\partial x_l} &= T_{K_{ij}^{kl}} f_{jk} - \frac{n+1}{n(n+2)} f_{il} + \frac{1}{n(n+2)} f_{il} + \frac{\delta_{il}}{n(n+2)} \mathrm{tr}\boldsymbol{f} \\
&= T_{K_{ij}^{kl}} f_{jk} - \frac{1}{n+2} f_{il} + \frac{\delta_{il}}{n(n+2)} \mathrm{tr}\boldsymbol{f} \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

■

Satz 3.6 *Sei $1 < q < +\infty$. 1. Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^n)$ existiert genau ein $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{2,q}(\mathbb{R}^n) \times \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, so dass*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f} \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|\nabla p\|_{\boldsymbol{L}^q} \leq c\|\boldsymbol{f}\| \tag{3.9}$$

wobei $c = c(n, q)$
2. 1. Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^n)$ existiert genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^n) \times \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^n)$, von

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \quad -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^n.$$

Ferner gilt

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|p\|_{\boldsymbol{L}^q} \leq c\|\boldsymbol{f}\| \tag{3.10}$$

wobei $c = c(n, q)$.

3.4 Die Stokesgleichung im Halbraum

Wir betrachten die Stokesgleichung im Halbraum $\mathbb{R}^n_+$. Wir setzen $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n = 0\}$,

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} &= -\nabla p + \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\phi} \quad \text{auf} \quad \Sigma. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Wir beschränken uns auf den Fall $n = 3$. Wir erinnern

$$\Gamma_{ij}(x) = \Gamma^{HD}_{ij,\mathrm{div}}(x) = \frac{1}{8\pi}\Big(\frac{\delta_{ij}}{|x|} + \frac{x_i x_j}{|x|^3}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (i, j = 1, \ldots, 3).$$

Sei $\boldsymbol{\phi} \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$. Wir definieren

$$u^i(x) = 2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{x_i - y_i}{4\pi|x - y|^3}\phi^3(y') + \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial y_3}(x - y')\phi^k(y') + \frac{\partial \Gamma_{i3}}{\partial y_k}(x - y')\phi^k(y')dy'$$

$$p(x) = -4 \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_k \partial y_3}(x - y')\phi^k(y')dy'$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \Delta u^i(x) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^3}{\partial y_3 \partial y_i \partial y_k} \Delta|x - y'|\phi^k(y')dy' \\ &= -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_k}\frac{1}{|x - y'|}\phi^k(y')dy' \\ &= -4\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial y_3 \partial y_k}(x - y')\phi^k(y')dy'. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla p, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Wir zeigen nun, dass $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\phi}$ auf Σ. Nach Voraussetzung gibt es ein $R > 0$, so dass $\operatorname{supp}(\boldsymbol{\phi}) \subset B'_R(0)$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} u^i(x) = \frac{3x_3}{2\pi} \int\limits_{B'_R} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} (\phi^k(y') - \phi^k(x')) dy' \\ + \frac{3x_3}{2\pi} \phi^k(x') \int\limits_{B'_R} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} dy'. \end{aligned}$$

Unter Verwendung des Mittelwertsatzes bekommt man

$$\begin{aligned} &\Bigg| \int\limits_{B'_R} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} (\phi^k(y') - \phi^k(x') dy' \Bigg| \\ &\leq c \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x' - y'|^3}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} dy' = 2\pi c \int\limits_0^R \frac{r^4}{(|r|^2 + x_3^2)^{5/2}} dr \\ &\leq 2\pi c \int\limits_0^R \frac{r}{(|r|^2 + x_3^2)} dr \leq 2\pi c (\log(R^2 + x_3^2) - \log x_3). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{x_3 \to 0^+} \frac{3x_3}{2\pi} \int\limits_{B'_R} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} (\phi^k(y') - \phi^k(x')) dy' = 0.$$

Als nächstes berechnen wir für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \int\limits_{B'_R} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} dy' &= \frac{\delta_{ik}}{2} \int\limits_0^R \frac{|x' - y'|^2}{(|x' - y'|^2 + x_3^2)^{5/2}} dy' \\ &= \delta_{ik} \pi \int\limits_0^R \frac{r^3}{(r^2 + x_3^2)^{5/2}} dy' \\ &= \delta_{ik} \pi \int\limits_0^R \frac{r}{(r^2 + x_3^2)^{3/2}} dy' - x_3^2 \frac{\delta_{ik}}{2} \int\limits_{B'_R} \frac{r}{(r^2 + x_3^2)^{5/2}} dy' \\ &= \delta_{ik} \pi \Big(- (r^2 + x_3^2)^{-1/2} |_0^R + \frac{x_3^2}{3} (r^2 + x_3^2)^{-1/3} |_0^R \Big) \\ &= \delta_{ik} \pi \Big(- (R^2 + x_3^2)^{-1/2} + \frac{x_3^2}{3} (R^2 + x_3^2)^{-3/2} + \frac{2}{3x_3} \Big) \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{3x_3}{2\pi}\phi^k(x')\int\limits_{B'_R}\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{5/2}}dy' \\
&=\phi^i(x')\frac{3x_3}{2}\Big(-(R^2+x_3^2)^{-1/2}+\frac{x_3^2}{3}(R^2+x_3^2)^{-3/2}+\frac{2}{3x_3}\Big) \\
&\to \phi^i(x') \quad \text{für} \quad x_3\to 0^+.
\end{aligned}$$

Analog erhält man für $i=3$, wegen $y_3=0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B'_R}\frac{x_3(x_k-y_k)}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{5/2}}dy' &= \delta_{3k}x_3^2\int\limits_{B'_R}\frac{1}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{5/2}}dy' \\
&= \delta_{3k}2\pi x_3^2\int\limits_0^R\frac{r}{(r^2+x_3^2)^{5/2}}dy' \\
&= \delta_{3k}\frac{2\pi}{3}\Big(-x_3^2(R^2+x_3^2)^{-3/2}+\frac{1}{x_3}\Big).
\end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned}
\frac{3x_3}{2\pi}\phi^k(x')\int\limits_{B'_R}\frac{x_3(x_k-y_k)}{(|x'-y'|^2+x_3^2)^{5/2}}dy' &= \phi^3(x')\Big(-x_3^3(R^2+x_3^2)^{-3/2}+1\Big) \\
&\to \phi^3(x') \quad \text{für} \quad x_3\to 0^+.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{x_3\to 0^+}\boldsymbol{u}(x)=\boldsymbol{\phi}(x').$$

Bemerkung 3.7 Aus der Definition von p ergibt sich unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes, dass

$$\begin{aligned}
p(x) &= -4\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial^3\Gamma}{\partial y_3^2\partial y_k}(x-y)\phi^k(y)dy \\
&= 4\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Gamma(x-y)\Big(\frac{\partial^2\phi_*^k}{\partial x_1^2}(y)+\frac{\partial^2\phi_*^k}{\partial x_2^2}(y)\Big)dy,
\end{aligned}$$

wobei

$$\phi_*^k(x)=\begin{cases}0 & \text{falls} \quad x\in\mathbb{R}^3_+ \\ \phi^k(x^*) & \text{falls} \quad x\in\mathbb{R}^3_-\end{cases}$$

Folglich ist

$$p=\operatorname{div}\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^3_+}, \quad -\Delta\boldsymbol{h}=4\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}_*}{\partial x_1^2}+4\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}_*}{\partial x_2^2} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3 \tag{3.12}$$

Satz 3.8 *Sei* $\boldsymbol{\phi} \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}^3}_+)$. *Ferner sei* $\boldsymbol{u}, p$ *wie oben definiert. Dann gilt* $p \in W^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)$, $\boldsymbol{u} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{2,q}(\mathbb{R}^3_+)$ *und* $(\boldsymbol{u}, p)$ *löst das Stokes-System* (3.11) *in* $\mathbb{R}^3_+$.

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} + \|p\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} \le c\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)}, \tag{3.13}$$

$$\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} + \|\nabla p\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} \le c\|\nabla^2 \boldsymbol{\phi}\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)}. \tag{3.14}$$

Hierbei ist $c = c(n, p)$.

Beweis Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\frac{x_i - y_i}{4\pi|x-y|^3}\phi^3(y) + \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial y_3}(x-y)\phi^k(y) + \frac{\partial \Gamma_{i3}}{\partial y_k}(x-y) \\
&= \Big(\delta_{3k}\frac{x_i - y_i}{4\pi|x-y|^3} + \delta_{ki}\frac{x_3 - y_3}{4\pi|x-y|^3} + \delta_{i3}\frac{x_k - y_k}{4\pi|x-y|^3}\Big)\phi^k(y) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^3}{\partial y_3 \partial y_i \partial y_k}|x-y|\phi^k(y) \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big(Q_{ik}(x-y) - \frac{\partial^3 L}{\partial y_3 \partial y_i \partial y_k}(x-y)\Big)\phi^k(y),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
Q_{ik}(x-y) &= \delta_{3k}\frac{x_i - y_i}{4\pi|x-y|^3} + \delta_{ki}\frac{x_3 - y_3}{4\pi|x-y|^3} + \delta_{i3}\frac{x_k - y_k}{4\pi|x-y|^3}, \\
L(x-y) &= |x-y|.
\end{aligned}$$

Man beachte außerdem, dass

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 L}{\partial y_3 \partial y_i \partial y_k}(x-y) \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k}\frac{x_3 - y_3}{|x-y|} \\
&= \delta_{i3}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} - \frac{\partial}{\partial y_k}\frac{(x_3 - y_3)(x_i - y_i)}{|x-y|^3} \\
&= \delta_{i3}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} + \delta_{k3}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^3} + \delta_{ik}\frac{x_3}{|x-y|^3} - 3\frac{x_3(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{|x-y|^3}. \\
&= Q_{ik}(x-y) - 3\frac{x_3(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{|x-y|^3}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung partieller Integration berechnet man

$$u^i(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3_-} \frac{\partial Q_{ik}}{\partial y_3}(x-y)\phi^k_*(y) - \frac{\partial^4 L}{\partial y_3 \partial y_3 \partial y_i \partial y_k}(x-y)\phi^k_*(y)dy$$

Für $l = 1, 2$ folgt unter Vertauschung der Differentiation und Integration sowie partieller Integration

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_l}(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3_-} \frac{\partial Q_{ik}}{\partial y_3}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_l}(y) - \frac{\partial^4 L}{\partial y_3 \partial y_3 \partial y_i \partial y_k}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_l}(y)dy.$$

Für $i = 1, 2$ und $l = 3$ erhält man unter Beachtung von

$$\frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial^2 y_3}(x-y) = -\frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial y_1^2}(x-y) - \frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial y_2^2}(x-y)$$

und nach Anwendung partieller Integration

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^i}{\partial x_3}(x) = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial y_1}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_1}(y)dy - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial y_2}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_2}(y)dy \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial^4 L}{\partial y_3\partial y_3\partial y_3\partial y_k}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_i}(y)dy.\end{aligned}$$

Sowohl $\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_l}$ als auch $\frac{\partial^4 L}{\partial^2 x_3 \partial x_i \partial x_j}$ sind singuläre Kerne homogen vom Grad -3. Gemäß Satz 2.7 bestätigt man

$$\left\|\frac{\partial u^i}{\partial x_l}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} \leq c\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+)} \quad \forall\, i, l = 1, 2, 3.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass $\frac{\partial u^3}{\partial x_3} = -\frac{\partial u^1}{\partial x_1} - \frac{\partial u^2}{\partial x_2}$.

Es bleibt noch des Druck p abzuschätzen. Aus der Definition von p zusammen mit dem Gaußschen Integralsatz ergibt sich

$$p(x) = -4\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y_k \partial y_3}(x-y')\phi^k(y')dy' = -4\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial y_k\partial y_3\partial y_3}(x-y)\phi^k_*(y)dy.$$

Wegen $\Delta\Gamma = 0$ bekommt man unter Verwendung partieller Integration

$$p(x) = -4\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial y_k\partial y_1}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_1}(y)dy - 4\int\limits_{\mathbb{R}^3_-}\frac{\partial^3 \Gamma}{\partial y_k\partial y_2}(x-y)\frac{\partial \phi^k_*}{\partial y_2}(y)dy.$$

Wie oben folgt aus Satz 2.7

$$\|p\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} \leq c\|\nabla\boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+)}.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ∎

Unter Verwendung der Abschätzung (3.13) bekommt man

Folgerung 3.9 *Für jedes* $\boldsymbol{\phi} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)$ *existiert genau ein* $(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{\gamma}_0) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+) \times \mathbb{R}$, *so dass*

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\gamma}_0 \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_0(\mathbb{R}^3_+)$$

und $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma}_0, p)$ *eine schwache Lösung von*

$$-\Delta(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma}_0) + \nabla p = 0 \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^3_+, \quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\phi} \quad \textit{auf} \quad \Sigma.$$

ist. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+)} + \|p\|_{L^q(\mathbb{R}^3_+)} \leq c\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+)}. \tag{3.15}$$

Beweis Man wähle eine Folge $\boldsymbol{\phi}_m \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\overline{\mathbb{R}^3}_+)$ so dass

$$\nabla \boldsymbol{\phi}_m \to \nabla \boldsymbol{\phi} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+) \quad \text{für} \quad m \to +\infty.$$

Sei $(\boldsymbol{u}_m, p_m)$ Lösung des Stokes-Systems gemäß Satz 3.8. Dann ist $(\boldsymbol{u}_m - (\boldsymbol{u}_m)_{B_1^+}, p_m)$ eine Cauchy-Folge in $\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$. Folglich existiert ein Grenzwert $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ mit

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} p \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx \quad \forall \boldsymbol{v} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+).$$

Wegen $\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{\phi}_m$ auf Σ und $\boldsymbol{u}_m \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^3_+)$ haben wir $\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{\phi}_m \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)$. Folglich existiert ein $\boldsymbol{w} \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)$, so dass

$$\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{\phi}_m \to \boldsymbol{w} \quad \text{in} \quad \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)\text{für} \quad m \to +\infty.$$

Insbesondere, $\nabla \boldsymbol{u} - \nabla \boldsymbol{\phi} = \nabla \boldsymbol{w}$. Folglich existiert eine Konstante $\boldsymbol{\gamma}_0$, so dasss

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{\gamma}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\phi} + \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{w} \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+).$$

Wegen der schwachen Uhst. der Norm folgt

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|p\|_{L^q} \leq c\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q}.$$

■

Definition 3.10 (**Schwache Lösung**). Seien $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^3_+)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$. Das Paar $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ heißt *schwache Lösung* von

$$(SP) \qquad \begin{aligned} -\nabla \boldsymbol{u} + \nabla p &= \operatorname{div} \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} &= g \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+, \\ \boldsymbol{u} &= 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma \end{aligned}$$

falls

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} p \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx - \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{v} dx \quad \forall \boldsymbol{v} \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+). \tag{3.16}$$

und $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = g$ fast überall in $\mathbb{R}^3_+$.

Satz 3.11 *Für jedes* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^n_+)$ *existiert genau eine schwache Lösung* $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ *gemäß Def. 3.10 (mit* $g = 0$*), so dass*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|p\|_{L^q} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q}. \tag{3.17}$$

Für jedes $\boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$ *existiert genau eine starke Lösung* $(\boldsymbol{u}, p) \in$ $bu \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{2,q}(\mathbb{R}^3_+) \times \widehat{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3_+)$ *von*

$$\begin{aligned} -\nabla \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \quad &, \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad \textit{in} \quad \mathbb{R}^3_+, \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad &\textit{auf} \quad \Sigma \end{aligned}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|\nabla^2 \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|\nabla p\|_{L^q} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q}. \tag{3.18}$$

Beweis 1. Wir setzen $\boldsymbol{f}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^3$ fort und bezeichnen diese Fortsetzung ebenfalls mit $\boldsymbol{f}$. Gemäß Satz 3.6 existiert genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{\phi}, \pi) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3) \times L^q(\mathbb{R}^3)$ Lösung von

$$-\Delta \boldsymbol{\phi} = -\nabla \pi + \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3$$

zusammen mit der Abschätzung

$$\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|\pi\|_{L^q} \le c\|\boldsymbol{f}\|. \tag{3.19}$$

Als nächstes gibt es nach Folg 3.9 genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{w}, s, \boldsymbol{\gamma}_0) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}(\mathbb{R}^3) \times L^q(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$ von

$$-\Delta \boldsymbol{w} + \nabla s = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+, \quad \boldsymbol{w} + \boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\phi} \quad \text{auf} \quad \Sigma.$$

Außerdem haben wir zusammen mit (3.19)

$$\|\nabla \boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|s\|_{L^q} \le c\|\nabla \boldsymbol{\phi}\|_{\boldsymbol{L}^q} \le c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q}. \tag{3.20}$$

Setzt man $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\gamma}_0$ und $p = \pi - s$, so folgt $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ ist schwache Lösung von

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+ \quad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma.$$

Aufgrund von (3.19) und (3.20) ergibt sich die Behauptung (3.17).

2. Die zweite Aussage beweist man analog. ■

Bemerkung 3.12 1. Aus Satz 3.11 folgt sofort, dass für alle $\boldsymbol{F} \in (\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+))^*$ existiert genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}_0^{1,q}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ von

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{F}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+ \quad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma.$$

In der Tat, aus Folg. 2.15 bekommt man $\boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$, so dass

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{v} \in \widehat{W}^{1,q'}_0(\mathbb{R}^3_+)$$

und

$$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q} \leq c \|\boldsymbol{F}\|_{(\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'})^*}.$$

2. Ist $\boldsymbol{u} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx \quad \forall \, \boldsymbol{v} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+).$$

Dann ist $\boldsymbol{u} = 0$. Denn gemäß Satz 3.11 existiert eine schwache Lösung $(\boldsymbol{v}, \pi) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}_0(\mathbb{R}^3_+) \times L^{q'}(\mathbb{R}^3_+)$ von

$$-\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \pi = \mathrm{div}(|\nabla \boldsymbol{u}|^{q-2} \nabla \boldsymbol{u}), \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+ \quad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma.$$

Dann folgt nach Voraussetzung

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \boldsymbol{u}|^{q-2} \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} |\nabla \boldsymbol{u}|^q dx.$$

Somit ist $\boldsymbol{u} = \mathrm{const} = 0$.

3. Wir definieren

$$\widehat{\boldsymbol{W}}^{-1,q}_{\mathrm{grad}}(\mathbb{R}^3_+) = \{\nabla p \in (\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+))^* \,|\, p \in L^q(\mathbb{R}^3_+)\}.$$

Hierbei bedeutet

$$\langle \nabla p, \boldsymbol{v} \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{v} \in L^q(\mathbb{R}^3_+).$$

Dann ist $\widehat{\boldsymbol{W}}^{-1,q}_{\mathrm{grad}}(\mathbb{R}^3_+)$ ein abgeschlossener Teilraum von $(\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+))^*$. In der Tat, sei (p_m) eine Folge in $L^q(\mathbb{R}^3_+)$ mit

$$\nabla p_m \to \mathrm{div}\, \boldsymbol{f} \quad \text{in} \quad (\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+))^* \quad \text{für} \quad m \to +\infty$$

für ein $\boldsymbol{f} \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$. Dann folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{v} dx = 0 \quad \forall \, \boldsymbol{v} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+).$$

Gemäß Satz 3.11 existiert eine schwache Lösung $(\boldsymbol{u}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^3_+) \times L^q(\mathbb{R}^3_+)$ von

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3_+ \quad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \Sigma.$$

Wegen 2. ist $\boldsymbol{u} = 0$, also $\operatorname{div} \boldsymbol{f} = \nabla p \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{-1,q}_{\mathrm{grad}}(\mathbb{R}^3_+)$.

Der Operator $\nabla : L^p(\mathbb{R}^3_+) \to (\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+))^*$ ist beschränkt und hat abgeschlossenes Bild. Außerdem ist ∇ injektiv. Mithilfe des Satzes vom abgeschlossenen Bild ist $\nabla^* = -\operatorname{div} : \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+) \to L^q(\mathbb{R}^3_+)$. surjektiv. Somit haben wir den folgenden wichtigen

Satz 3.13 *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass*

$$\|p\|_{L^q} \le c\|\nabla p\|_{(\widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'})^*} \quad \forall\, p \in L^q(\mathbb{R}^3_+). \tag{3.21}$$

Satz 3.14 *Sei $1 < q < +\infty$. Für jedes $p \in L^q(\mathbb{R}^3_+)$ existiert ein $\boldsymbol{u} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q'}(\mathbb{R}^3_+)$ mit*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = p, \qquad \|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} \le c\|p\|_{L^q}. \tag{3.22}$$

Satz 3.15 *Für jedes $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^q(\mathbb{R}^n_+)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^n_+)$ existiert genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{u}, q) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n_+) \times L^q(\mathbb{R}^n_+)$ von (ST). Ferner gilt die Abschätzung*

$$\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|p\|_{L^q} \le c(\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q} + \|g\|_{L^q}).$$

wobei $c = c(n, q)$.

Beweis Gemäß Satz 3.14 existiert ein $\boldsymbol{w} \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_0(\mathbb{R}^n_+)$, so dass $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = g$ und

$$\|\nabla \boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}^q} \le c\|g\|_{L^q}.$$

Gemäß Satz existiert genau eine schwache Lösung $(\boldsymbol{v}, p) \in \widehat{\boldsymbol{W}}^{1,q}_{0,\mathrm{div}}(\mathbb{R}^n_+) \times L^q(\mathbb{R}^n_+)$ von (SP) mit $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$. Dann ist $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ die gesuchte Lösung. ■

4 Die stationären Navier-Stokes Gleichungen

4.1 Orthogonale Zerlegung für $\boldsymbol{W}^{1,2}_0(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Mit $W^{2,2}(\Omega)$ bezeichnen wir die Abschließung von $C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\nabla^2 u\|_{L^2}$. Dann ist $W^{2,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum, ausgestattet mit dem Skararprodukt

$$(u, v)_{W^{2,2}} = \int\limits_\Omega \nabla^2 u : \nabla^2 v dx = \int\limits_\Omega \Delta u : \Delta v dx$$

Wir setzen $\boldsymbol{V} = W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann ist $\boldsymbol{V}$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \int\limits_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad u, v \in \boldsymbol{V}$$

und der Norm $\|\boldsymbol{u}\| = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}))^{1/2}$.
Ferner ist $L^2(\Omega)$ mit dem üblichen Skalarprodukt $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} dx$ und der Norm $|\boldsymbol{u}| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2}$ ein Hilbertraum.
Wir definieren die beiden abgeschlossenen Teilräume von $L^2(\Omega)$

$$A^2(\Omega) = \{p_0 \Delta v \,|\, v \in W_0^{2,2}(\Omega)\},$$
$$B^2(\Omega) = \{p_h \in L^2(\Omega) \,|\, \Delta p_h = 0\}.$$

Man sieht leicht das

Lemma 4.1 *Es gilt die orthogonale Zerlegung* $L^2(\Omega) = A^2(\Omega) \oplus B^2(\Omega)$.

Beweis Seien $p_0 \in A^2(\Omega)$ und $p_h \in B^2(\Omega)$. Dann existiert eine Folge $\phi_m \in C^\infty(\Omega)$ so dass $\Delta\phi_m \to p_0$, für $m \to +\infty$. Dann folgt mithilfe partieller Integration

$$(p_0, p_h) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \Delta\phi_m p_h dx = 0.$$

Also sind A^2 und B^2 orthogonal. Es bleibt also nur noch die Dichtheit zu zeigen. Sei $p \in L^2(\Omega)$ mit $(p, p_0 + p_h) = 0$ für alle $p_0 + p_h \in A^2 \oplus B^2(\Omega)$. Insbesondere, gilt

$$\int\limits_\Omega p\Delta\phi dx = 0 \quad \forall\, \phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega).$$

Nach dem Weylschen Lemma ist $p \in B^2(\Omega)$, also $p = 0$. ■

Als nächstes definieren wir den Raum

$$\boldsymbol{G}_h = \Big\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \cap \Big| \, \exists p_h \text{ harmonisch : } ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -(p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega) \Big\}.$$

Bemerkung 4.2 1. Sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$. Dann heißt p_h der zu $\boldsymbol{u}$ gehörige *harmonische Druck*. Hierbei ist ∇p_h eindeutig bestimmt.
2. Unter Verwendung der Differenzenquotientenmethode zeigt man $\boldsymbol{G}_h \subset \boldsymbol{W}_{\mathrm{loc}}^{2,2}(\Omega)$ und $((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -(p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})$ ist äquivalent zu

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \nabla p_h \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Insbesonere ist $\boldsymbol{G}_h \subset \boldsymbol{C}^\infty(\Omega)$.

Lemma 4.3 *1. Für jedes* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *existiert eine Konstante* $c_{\Omega'} > 0$*, so dass*

$$\|\nabla p_h\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega')} \le C_{\Omega'} \|\boldsymbol{u}\| \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h, \tag{4.1}$$

wobei $((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = -(p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{v})$ *für alle* $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. [5)]
2. Für jedes $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$ *ist* $\Delta \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$.
3. $\boldsymbol{G}_h(\Omega)$ *ist ein abgeschlossener Teilraum von* $\boldsymbol{V}$

Beweis 1. Fixiere $\Omega' \subset\subset \Omega$. Man wähle $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\zeta \equiv 1$ auf $\overline{\Omega'}$. Unter Verwendung partieller Integration findet man

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 p_h \zeta^2\|_{L^2}^2 &= -4 \int_\Omega D_i p_h D_i D_k p_h \zeta^3 D_k \zeta dx \\ &\le 4 \|\nabla^2 p_h \zeta^2\|_{L^2} \|\nabla^2 p_h \zeta\|_{L^2}\end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|\nabla^2 p_h \zeta^2\|_{L^2}^2 \le 16 \|\nabla p_h \zeta\|_{L^2}^2. \tag{4.2}$$

Ebenfalls unter Verwendung partieller Integration, Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zusammen mit (4.2) bekommt man

$$\begin{aligned}\|\nabla p_h \zeta\|_{L^2}^2 &= -(p_h, \operatorname{div}(\nabla p_h \zeta^2)) \\ &= ((\boldsymbol{u}, \nabla p_h \zeta^2)) \\ &= \int_\Omega D_i u^k D_i D_k p_h \zeta^2 dx + 2 \int_\Omega D_i u^k D_k p_h \zeta D_i \zeta dx \\ &\le \|\boldsymbol{u}\| \|\nabla^2 p_h \zeta^2\|_{L^2} + c \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{u}\| \|\nabla p_h \zeta\|_{L^2} \\ &\le c \|\boldsymbol{u}\| \|\nabla p_h \zeta\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Dies bestätigt (4.1).
2. Sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$ mit Druck p_h. Dann folgt mit $\boldsymbol{v} = \nabla \phi$ für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ wegen $\Delta p_h = 0$

$$\begin{aligned}0 = -(\Delta p_h \phi) = -(p_h, \operatorname{div} \nabla \phi) = ((\boldsymbol{u}, \nabla \phi)) = -\int_\Omega u^k D_k D_i D_i \phi dx \\ = \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{u} \Delta \phi dx.\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Weylschen Lemma.
3. $\boldsymbol{G}_h$ *ist abgeschlossen.* Sei $(\boldsymbol{u}_m)$ eine Folge in $\boldsymbol{G}_h$ mit entsprechenden Druckfolge $(p_{h,m})$ harmonischer Funktionen, die in $\boldsymbol{V}$ gegen ein $\boldsymbol{u}$ konvergiert. Seien $\Omega_l \subset \Omega_{l+1} \subset\subset \Omega$ mit $\cup_{l=1}^\infty \Omega_l = \Omega$. Gemäß (4.1) haben wir

$$\|\nabla p_{h,m} - \nabla p_{h,k}\|_{\boldsymbol{L}^2(\Omega_l)} \le \|\boldsymbol{u}_m - \boldsymbol{u}_k\| \to 0 \quad \text{für} \quad m, k \to +\infty.$$

Also ist $(\nabla p_{h,m})$ eine Cauchy-Folge in $\boldsymbol{L}^2(\Omega_l)$. Folglich existiert ein $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\nabla p_{h,m} \to \boldsymbol{w} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{L}^2(\Omega_l) \quad \text{für} \quad m \to +\infty \quad (l \in \mathbb{N}).$$

[5)] Wir bemerken, dass ∇p_h eindeutig ist.

Auf der anderen Seite haben wir für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^\infty_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\varphi}) = \lim_{m\to\infty} (\nabla p_{h,m}, \boldsymbol{\varphi}) = 0.$$

Nach dem Fundamentallemma existiert ein $p_h \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, so dass $\boldsymbol{w} = \nabla p_h$ fast überall in Ω. Auf der anderen Seite haben wir für $\phi \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$

$$(\nabla p_h, \nabla\phi) = \lim_{m\to\infty} (\nabla p_{h,m}, \nabla\phi) = 0.$$

Nach dem Weylschen Lemma ist p_h harmonisch. Außerdem haben wir für $\boldsymbol{\varphi} \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\lim_{m\to\infty} (p_{h,m}, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}) = \lim_{m\to\infty} (\nabla p_{h,m}, \boldsymbol{\varphi}) = -(p_h, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}).$$

Somit ist $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$. ■

Nun setzen wir $\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} = \boldsymbol{W}^{1,2}_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ und definieren

$$\boldsymbol{G}_0 = \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \,\middle|\, \exists p_0 \in A^2(\Omega) :\ ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = -(p_0, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \right\}.$$

Satz 4.4 *Es gilt die orthoganale Zerlegung*

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} \oplus \boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h.$$

Beweis Wie man leicht sieht, ist $\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\boldsymbol{V}$. Man zeigt außerdem, dass $\boldsymbol{G}_0$ abgeschlossen ist. Ist nähmlich $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_0$ mit zugehörigem Druck $p_0 = \Delta\phi \in A^2(\Omega)$, so gilt

$$|p_0|^2 = (p_0, \operatorname{div}\nabla\phi) = -((\boldsymbol{u}, \nabla\phi)) \le \|\boldsymbol{u}\| \|\nabla\phi\| = \|\boldsymbol{u}\| |\Delta\phi| = \|\boldsymbol{u}\| |p_0|.$$

Folglich

$$|p_0| \le \|\boldsymbol{u}\| \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_0. \tag{4.3}$$

Nun seien $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_0$ mit Druck $p_0 \in A^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{G}_h$ mit harmonischen Druck p_h. Aus Lemma 4.2 folgt $\Delta \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, also $\operatorname{div}\boldsymbol{v} \in B^2(\Omega)$. Gemäß Lemma 4.1 haben wir

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = -(p_0, \operatorname{div}\boldsymbol{v}) = 0.$$

Als nächstes sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$ und $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h$ mit $p_0 \in A^2(\Omega)$ und p_h harmonisch. Sei $\boldsymbol{\varphi}_m \in \boldsymbol{C}^\infty_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ mit $\boldsymbol{\varphi}_m \to \boldsymbol{u}$ in $\boldsymbol{V}$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_h)) &= \lim_{m\to\infty} ((\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_h)) \\ &= -\lim_{m\to\infty} (p_0, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_m) - \lim_{m\to\infty} (p_h, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_m) = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist die Summe der Räume orthogonal. Es bleibt also nur noch die Dichtheit zu zeigen. Sei also $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ mit

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} \oplus \boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h.$$

Dann folgt mit $\boldsymbol{v} = \nabla\phi \in \boldsymbol{G}_0$ für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$0 = ((\boldsymbol{u}, \nabla\phi)) = (\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \Delta\phi).$$

Nach dem Weylschen Lemma ist $\operatorname{div}\boldsymbol{u} \in B^2(\Omega)$. Außerdem findet man unter Verwendung des Rieszschen Darstellungssatz ein $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ mit $((\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})) = -(\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\boldsymbol{v})$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Insbesondere ist $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{G}_h$. Somit haben wir

$$0 = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})) = -(\operatorname{div}\boldsymbol{u}, \operatorname{div}\boldsymbol{u}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0.$$

Ferner haben wir für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ wegen $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\varphi}) \in \boldsymbol{V}_{\operatorname{div}}$

$$0 = ((\boldsymbol{u}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi})) = (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, \Delta\boldsymbol{\varphi}) = 0.$$

Somit ist $\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{B}^2(\Omega)$. Aus $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ folgt $-\Delta^2\boldsymbol{u} = \Delta\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$, also $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\Omega)$. Nach Voraussetzung haben wir für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{0,\operatorname{div}}^\infty(\Omega)$

$$0 = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int_\Omega \Delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx.$$

Aus dem Fundamentallemma folgt $-\Delta\boldsymbol{u} = \nabla p$ fast überall in Ω, für ein $p \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}(\Omega)$. Beachtet man $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ so ist $\Delta p = 0$. Dies zeigt, dass $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$. Also $\boldsymbol{u} = 0$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

4.2 Darstellungen für $\boldsymbol{W}_0^{-1,2}(\Omega)$

Wir haben $\boldsymbol{V}^* = W^{-1,2}(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|\boldsymbol{F}\|_* = \sup_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}, \|\boldsymbol{v}\|=1} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle.$$

Wir definieren die Operatoren $-\Delta_2 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^*$ und $\nabla_2 p : L^2(\Omega) \to \boldsymbol{V}^*$ gemäß

$$\langle -\Delta_2\boldsymbol{u}, \rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$
$$\langle \nabla_2 p, \boldsymbol{v}\rangle = -((p, \operatorname{div}\boldsymbol{v})), \quad p \in L^2(\Omega), \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Unter Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes findet man

$$\boldsymbol{V}^* = \{-\Delta_2\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}\}.$$

Es gilt der folgende wichtige

Satz 4.5 *Sei $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{V}^*$ mit $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\operatorname{div}}$. Dann existiert ein $p \in L_{\mathrm{loc}}^2(\Omega)$ so dass*

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = -(p, \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}) = \int_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega).$$

Insbesondere haben wir die Darstellung $p = p_0 + p_h$, wobei $p_0 \in A^2(\Omega)$ und p_h harmonisch.

Beweis Sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ die Rieszsche Darstellung von $\boldsymbol{F}$. Gemäß Satz 4.4 ist $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_h \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} \oplus \boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h$. Nach Voraussetzung haben wir

$$0 = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \|\boldsymbol{v}\|^2.$$

Folglich gilt für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = ((\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{\varphi})) = -(p_0 + p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}),$$

wobei $p_0 \in A^2(\Omega)$ zugehörige Druck zu $\boldsymbol{u}_0$ und p_h der zu $\boldsymbol{u}_h$ gehörige harmonische Druck. ■

Satz 4.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet sternförmig bezüglich einer Kugel $\overline{B} \subset \Omega$, das heißt*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \Omega \quad \forall\, x \in \Omega, y \in B.$$

Dann existiert für jedes $f \in L_0^2(\Omega)$ ein $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = f \quad \mathit{in} \quad \Omega.$$

Beweis Sei Ω sternförmig bezüglich einer Kugel $\overline{B} \subset \Omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $B = B_1(0)$. Sei $\omega \in C^{\infty}(B_1)$, so dass $\int\limits_{B_1} \omega(x)dx = 1$. Sei $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega)$. Dann ist $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), \partial\Omega) > 0$. Wir setzen

$$\boldsymbol{u}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{K}(x,y) f(y) dx$$

wobei

$$\boldsymbol{K}(x,y) = \frac{x-y}{|x-y|^n} \int\limits_0^{\infty} \omega\Big(x + r\frac{x-y}{|x-y|}\Big)(|x-y| + r)^{n-1} dr.$$

Aus $z = x + r\frac{x-y}{|x-y|} \in B_1$ folgt $r \in [0, r_0]$

$$x = \frac{|x-y|}{|x-y| + r} z + \frac{r}{|x-y| + r} y \in \Omega.$$

Dies zeigt, dass $\operatorname{supp}(\boldsymbol{u}) \subset \Omega$, denn sonst gäbe es $y_m \in \operatorname{supp}(f)$ mit $y_m \to y$, $x_m \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(f)$ mit $x_m \to x \in \partial\Omega$ und $r_m \in [0, r_0]$ mit $r_m \to r$. So dass

$$z_m = x_m + r\frac{x_m - y_m}{|x_m - y_m|} \to x + r\frac{x-y}{|x-y|} \in B_1.$$

Dann folgt

$$x = \frac{|x-y|}{|x-y|+r} z + \frac{r}{|x-y|+r} y \in \Omega.$$

was im Widerspruch zu $x \in \partial\Omega$ steht.

Satz 4.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet, so dass $\boldsymbol{V}_{\text{div}} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$, dann sind die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $\operatorname{div} : \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$ *ist surjektiv.*

2. Es gilt die schwache Poincaré-Ungleichung.

(4.4) $\qquad \|p - p_\Omega\|_{L^2} \leq \|\boldsymbol{F}\|_*.$

3. $\boldsymbol{G}_h = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \exists p_h \in B^2(\Omega) : \quad ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = -(p_h, \operatorname{div} \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}.$

4. Ist $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{V}^*$ mit $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$. Dann $\exists p \in L^2(\Omega)$, mit $\boldsymbol{F} = \nabla_2 p$.

Beweis 1. $\Rightarrow$ 2. Nach Voraussetzung hat $\operatorname{div} : \boldsymbol{V} \to L^2(\Omega)$ abgeschlossenes Bild. Folglich hat $-\nabla_2 = (\operatorname{div})^* : L^2(\Omega) \to \boldsymbol{V}^*$ ebenfalls abgeschlossenes Bild. Dann folgt

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} |p + a| \leq c \|\nabla_2 p\|_* \quad \forall p \in L^2(\Omega).$$

Folglich gilt

$$|p - p_\Omega|^2 = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |p(x) - p(y)|^2 dx dy \leq 4 \inf_{a \in \mathbb{R}} |p - a|^2 \leq 4c^2 \|\nabla_2 p\|_*^2,$$

was die Behauptung beweist.

2. $\Rightarrow$ 3. Wir setzen $\widetilde{\boldsymbol{G}}_h = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \exists p_h \in B^2(\Omega) : \ -\Delta_2 \boldsymbol{u} = \nabla_2 p_h\}$. Aus 2. folgt, dass $\widetilde{\boldsymbol{G}}_h$ abgeschlossen ist. Wegen $A^2(\Omega) \oplus B^2(\Omega) = L^2(\Omega)$ haben wir $\boldsymbol{G}_0 \oplus \widetilde{\boldsymbol{G}}_h = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \exists p \in L^2(\Omega) : \ -\Delta_2 \boldsymbol{u} = \nabla_2 p\}$. Sei $(\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_0 \oplus \widetilde{\boldsymbol{G}}_h)^\perp$. Sei $p \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ mit $-\Delta_2 \boldsymbol{v} = \nabla_2 p$, dann ist $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{G}_0 \oplus \widetilde{\boldsymbol{G}}_h$ und es gilt

$$0 = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = -(\operatorname{div} \boldsymbol{u}, p) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Also $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$. Somit gilt $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\text{div}} \otimes \boldsymbol{G}_0 \oplus \widetilde{\boldsymbol{G}}_h$. Gemäß Satz 4.4 haben wir $\widetilde{\boldsymbol{G}}_h = \boldsymbol{G}_h$.

3. $\Rightarrow$ 4. Folgt unmittelbar aus $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\text{div}} \oplus \boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h$.

4. $\Rightarrow$ 1. Wir zeigen, dass $\nabla_2 : L^2(\Omega) \to \boldsymbol{V}^*$ abgeschlossenes Bild hat. Hierfür sei $(\nabla_2 p_m)$ eine Folge im Bild von ∇_2, welche in $\boldsymbol{V}^*$ gegen ein $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{V}^*$ konvergiert. Wie man leicht sieht genügt $\boldsymbol{F}$ der Eigenschaft $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$. Nach Voraussetzung existiert ein $p \in L^2(\Omega)$, so dass $\boldsymbol{F} = \nabla_2 \boldsymbol{F}$. Somit ist das Bild von ∇_2 abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenem Bild hat $\operatorname{div} = -\nabla^* : \boldsymbol{V} \to L^2(\Omega)$ abgeschlossenes Bild und es gilt

$$\operatorname{im}(\operatorname{div}) = \{f \in L^2(\Omega) \mid (f, p) = 0 \quad \forall p \in \ker(\nabla_2) = \mathbb{R}\} = L_0^2(\Omega).$$

Dies bestätigt 1. ∎

Satz 4.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann:*

1. $\operatorname{div} : \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$ *ist surjektiv.*

2. Es gilt die schwache Poincaré-Ungleichung

3. $\boldsymbol{G}_h = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \exists p_h \text{ harmonisch } -\Delta_2 \boldsymbol{u} = \nabla_2 p_h\}$

4. Ist $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{V}^*$, *dann* $\exists p \in L_0^2(\Omega)$, *so dass* $\boldsymbol{F} = \nabla_2 p$ *und*

$$\|p\| \leq c\|\boldsymbol{F}\|_*.$$

Beweis Wir zeigen als erstes die Gültigkeit von 3. aus Satz 4.7. Sei also $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{G}_h$ mit $-\Delta \boldsymbol{u} = -\nabla p_h$ für eine harmonische Funktion p_h. Sei $x_0 \in \partial\Omega$. Dann existiert eine Umgebung U von x_0, so dass $\Omega_0 = \Omega \cap U$ sternförmig bezüglich einer Kugel ist. Wir bemerken zunächst, dass $\boldsymbol{W}_{0,\mathrm{div}}^{1,2}(\Omega_0) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$, also der Voraussetzung von Satz 4.7 genügt.

Wir definieren $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{W}^{-1,2}(\Omega_0)$, gemäß

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v} \rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})), \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega_0) \subset \boldsymbol{V}.$$

Dann ist $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$ für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{0,\mathrm{div}}^{\infty}(\Omega_0)$. Aus Satz 4.6 und Satz 4.7 folgt $F = \nabla_2 p$ für ein $p \in L_0^2(\Omega_0)$. Dies impliziert $p_h = p + \text{const}$. Also $p|_{\Omega_0} \in L^2(\Omega_0)$. Da $\partial\Omega$ kompact ist und $p_h \in L_{\mathrm{loc}}^2(\Omega)$ sieht man $p_h \in L^2(\Omega)$. Somit ist $\boldsymbol{G}_0 \oplus \boldsymbol{G}_h = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \exists p \in L^2(\Omega) : -\Delta_2 \boldsymbol{u} = \nabla_2 p\}$. Aus Satz 4.6 ergibt sich $\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0\}$. Insbesondere genügt Ω der Voraussetzung von Satz 4.7. Die restlichen Aussagen folgen nunmehr aus Satz 4.7. ∎

4.3 Schwache Lösung der stationären Navier-Stokes Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet ($n = 2, 3, 4$).

Wir betrachten

$$\begin{aligned} u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} - \Delta u^i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial f_j^i}{\partial x_j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{NSG$_{\mathrm{st}}$}$$

Definition 4.9 Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Ein Vektorfeld $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$ heißt *schwache Lösung* von $(\mathrm{NSG})_{\mathrm{st}}$, falls

$$\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{v} dx = -\int_\Omega \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{v} dx \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}.$$

Satz 4.10 *Für jedes* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *existiert eine schwache Lösung* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$ *von (NSG)*$_{\mathrm{st}}$. *Ist außerdem* $\partial\Omega$ *Lipschitz, dann existiert ein* $p \in L^2_0(\Omega)$, *so dass*

$$\int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}) : \nabla \boldsymbol{v} dx = \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Beweis Sei $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$. Wir definieren $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} \to \boldsymbol{V}^*_{\mathrm{div}}$ durch

$$\langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}.$$

Man beachte, dass für $n \leq 4$ gilt $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{L}^4(\Omega)$. Mithilfe der Hölderschen Ungleichung findet man

$$\langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v} \rangle \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{L}^4} \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^4} \|\boldsymbol{v}\| \leq (\|\boldsymbol{u}\| + c\|\boldsymbol{w}\| \|\boldsymbol{u}\|).$$

Dies zeigt, dass $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}$ ist beschränkter linearer Operator, mit

$$\|\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}\| \leq (1 + c\|\boldsymbol{w}\|).$$

Außerdem gilt

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \nabla |\boldsymbol{u}|^2 dx = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}.$$

In der Tat, sei $\boldsymbol{w}_m \in \boldsymbol{C}^\infty_{0,\mathrm{div}}(\Omega)$ mit $\boldsymbol{w}_m \to \boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{V}$. Dann $\boldsymbol{w}_m \to \boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{L}^4(\Omega)$. Somit haben wir

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{u} dx = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega \boldsymbol{w}_m \cdot \nabla |\boldsymbol{u}|^2 dx = - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2} \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{w}_m |\boldsymbol{u}|^2 dx = 0.$$

Dies impliziert

$$\langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}. \tag{4.5}$$

Unter Verwendung des Satzes von Lax-Milgram bestätigt man, dass $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}$ ein Isomorphismus ist.

Nun sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Wir definieren $\boldsymbol{u}^* \in \boldsymbol{V}^*_{\mathrm{div}}$ durch

$$\langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v} \rangle = - \int_\Omega \boldsymbol{f} : \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}.$$

Setzen $M = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}} \,|\, \|\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{f}\|\}$. Da $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}$ Isomorphismus ist gibt es zu jedem $\boldsymbol{w} \in M$ genau ein $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$, so dass $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$. Unter Verwendung von (4.5) bekommt man

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = \langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u} \rangle \leq \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2} \|\boldsymbol{u}\|.$$

Folglich $\|\boldsymbol{u}\| \le \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ und mithin $\boldsymbol{u} \in M$. Also $T : M \to M$.

(i) $T(M) \subset \boldsymbol{V}$ *kompakt*. Sei $(\boldsymbol{u}_m) = (T(\boldsymbol{w}_m))$ Folge in $T(M)$. Aufgrund der Reflexivität von $\boldsymbol{V}_{\text{div}}$ gibt es Teilfolgen $(\boldsymbol{w}_{m_j})$ und $(\boldsymbol{u}_{m_j})$, so dass

$$\boldsymbol{w}_{m_j} \to \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{u}_{m_j} \to \boldsymbol{u} \quad \text{schwach in} \quad \boldsymbol{V}_{\text{div}} \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wegen $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ kompakt folgt

$$\boldsymbol{w}_{m_j} \otimes \boldsymbol{u}_{m_j} \to \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{L}^1(\Omega).$$

Für $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^\infty_{0,\text{div}}(\Omega)$ bekommt man

$$\langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}_{m_j}} \boldsymbol{u}_{m_j}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\varphi} \rangle.$$

Somit ist $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$ und mithin $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{w})$. Unter Verwendung von (4.5) zeigt man

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}\|^2 &= \langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u} \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{u}_{m_j} \rangle \\ &= \lim_{j \to \infty} \langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}_{m_j}} \boldsymbol{u}_{m_j}, \boldsymbol{u}_{m_j} \rangle = \lim_{j \to \infty} \|\boldsymbol{u}_{m_j}\|^2.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\boldsymbol{u}_{m_j} \to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{V}_{\text{div}} \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

(ii) T **ist stetig**. Sei $\boldsymbol{w}_m \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$ mit $\boldsymbol{w}_m \to \boldsymbol{w}$ in $\boldsymbol{V}_{\text{div}}$ für $m \to +\infty$. Da $T(M)$ kompakt ist gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{u}_{m_j})$ so dass

$$\boldsymbol{u}_{m_j} \to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{V}_{\text{div}} \qquad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Wie man leicht sieht ist $\boldsymbol{u} = T(\boldsymbol{w})$. Da der Grenzwert eindeutig ist konvergiert die gesamte Folge. Also ist T stetig.

Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz existiert ein $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$, so dass $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$, was äquivalent ist zu $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*$. Hieraus folgt, dass $\boldsymbol{u}$ schwache Lösung von $(\text{NSG})_{\text{st}}$ ist.
2. Wir definieren $\boldsymbol{G} \in \boldsymbol{V}^*$

$$\langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{v} \rangle = \int_\Omega (\nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}) : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Da $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$, schwache Lösung von $(\text{NSG})_{\text{st}}$ ist haben wir $\langle \boldsymbol{G}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ für alle $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}$. Gemäß Satz 4.8 existiert ein $p \in L^2_0(\Omega)$, so dass $\boldsymbol{G} = -\nabla_2 p$. ■

5 Die instationären Navier-Stokes Gleichungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beliebige offene Menge. Sei $0 < T < +\infty$. Wir setzen $Q_T = \Omega \times]0, T[$. Wir betrachten

$$(\text{NSG})_{\text{inst}} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} - \Delta \boldsymbol{u} = \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad Q_T, \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{auf} \quad \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Bezeichnungen: Sei $\boldsymbol{V}$ die Abschließung von $\boldsymbol{C}_c^\infty(\Omega)$ in $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$. Dann ist $\boldsymbol{V}$ ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \int_\Omega \nabla\boldsymbol{u} : \nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}dx, \quad \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}.$$

Wir setzen $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Dann ist $\boldsymbol{V}\subset\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{V}^*$ ein Gelfand-Tripel, wobei $i:\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{V}^*$ gegeben ist durch

$$\langle i(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle = \int_\Omega \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}dx = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{H}}, \quad \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}.$$

Dann folgt $\|i(\boldsymbol{u})\|_* \le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}}$.

Ferner sei $\boldsymbol{V}_{\text{div}}$ die Abschließung von $\boldsymbol{C}^\infty_{0,\text{div}}(\Omega)$ in $\boldsymbol{W}^{1,2}(\Omega)$ und $\boldsymbol{H}_{\text{div}} = \boldsymbol{L}^2_{\text{div}}(\Omega)$. Dann ist $\boldsymbol{V}_{\text{div}}\subset\boldsymbol{H}_{\text{div}}\subset\boldsymbol{V}^*_{\text{div}}$ ebenfalls ein Gelfand-Tripel.

Definition 5.1 1. Sei $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_{\text{div}}$, $\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$. Eine Vektorfunktion $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\text{div}})$ heißt *schwache Lösung* von $(\text{NSG})_{inst}$ falls

$$\int_\Omega -\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + (\nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}) : \nabla\boldsymbol{\varphi}dxdt = \int_\Omega \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varphi}(\cdot,0)dx$$

für alle $\boldsymbol{\varphi}\in\boldsymbol{C}^1_{\text{c}}(\Omega\times[0,T[)$ mit $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0$.

2. Eine schwache Lösung $\boldsymbol{u}$ heißt *Lösung mit beschränkter Energie*, falls außerdem $\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})$ gilt.

3. Eine schwache Lösung $\boldsymbol{u}$ heißt *Leray-Hopf Lösung* , falls $\boldsymbol{u}\in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})$ und es gilt.

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \int_0^t \|\nabla\boldsymbol{u}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2}ds \le \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int_0^t\int_\Omega \boldsymbol{f} : \nabla\boldsymbol{u}dxds \quad \text{f.f.a.} \quad t\in]0,T[.$$

4. Eine Leray-Hopf Lösung $\boldsymbol{u}$ heißt *turbulente Lösung*, falls eine Nullmenge $N\subset[0,T]$ existiert, so dass

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \int_s^t \|\nabla\boldsymbol{u}(\tau)\|^2_{\boldsymbol{L}^2}d\tau \le \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(s)|^2 - \int_s^t\int_\Omega \boldsymbol{f} : \nabla\boldsymbol{u}dxd\tau$$

für alle $s,t\in]0,T[\setminus N$ mit $s<t$.

Bemerkung 5.2 1. Sei $\boldsymbol{u}\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\text{div}})$ schwache Lösung von NSG_{inst} mit beschränkter Energie, so folgt unter Verwendung des Sobolevschen Einbettungssatzes wegen $\boldsymbol{u}\in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^6(\Omega))$, dass

$$\boldsymbol{u}\in L^\alpha(0,T;\boldsymbol{L}^\beta(\Omega)) \quad \forall\,\alpha,\beta\in[2,+\infty] \quad \text{mit} \quad \frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\beta} = \frac{3}{2}.$$

2. Wir definieren $B : \boldsymbol{L}^3_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$, durch

$$B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^3_{\mathrm{div}}(\Omega), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Unter Verwendung partieller Integration unter Berücksichzigung der Einbettung $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{L}^6(\Omega)$ findet man $B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ für alle $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$.

Sei $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^3_{\mathrm{div}}$. Wie im stationären Fall setzen wir

$$\langle \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \int\limits_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u}) : \nabla \boldsymbol{v} dx = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{L}^2} + B(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(Q_T)$. Sei $t \in]0, T[$, so dass $\boldsymbol{f}(t) \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$. Wir definieren $\boldsymbol{F}(t) \in V^*$ durch

$$\langle \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{v} \rangle = -\int\limits_{\Omega} \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Dann ist $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; \boldsymbol{V})$ schwache Lösung von $(\mathrm{NSG})_{inst}$, genau dann wenn

$$\begin{cases} -\int\limits_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}) \eta'(t) dt = (\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\psi}) \eta(0) + \int\limits_0^T \langle -\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}(t)} \boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi} \rangle \eta(t) dt \\ \forall \, \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}, \eta \in C^1_{\mathrm{c}}([0, T[). \end{cases}$$

Aus der Abschätzung

$$\| - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}(t)} + \boldsymbol{F}(t)) \|_{\boldsymbol{V}^*} \le c(1 + \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\boldsymbol{L}^2})$$

folgt

$$i(\boldsymbol{u})' = -\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F} \in L^1(0, T; \boldsymbol{V}^*),$$

wobei $i : \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}} \subset \boldsymbol{V}^*_{\mathrm{div}}$ definiert ist durch

$$\langle i(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varphi} dx, \quad \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}.$$

Folglich existiert $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in C([0, T]; \boldsymbol{V}^*_{\mathrm{div}})$ mit $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = i(\boldsymbol{u}(t))$ für fast alle $t \in]0, T[$. Außerdem gilt $\widetilde{\boldsymbol{u}}(0) = i(\boldsymbol{u}_0)$. Es gilt nähmlich

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(0) + \int\limits_0^t i(\boldsymbol{u})'(s) ds = \widetilde{\boldsymbol{u}}(0) + \int\limits_0^t (-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F})(s) ds \quad \forall \, t \in [0, T].$$

Aus der Definition der schwachen Lösung folgt dann

$$\langle i(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{\psi} \rangle = \langle \widetilde{\boldsymbol{u}}(0), \boldsymbol{\psi} \rangle \quad \forall \, \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}.$$

3. Ist $\boldsymbol{u}$ eine Lösung mit beschränkter Energie, das heißt $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}_{\text{div}})$, dann existiert ein Vertreter $\boldsymbol{u}C_w([0,T];\boldsymbol{H}_{\text{div}})$, so dass $i(\boldsymbol{u}(t)) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)$ für alle $t \in [0,T]$.

Beweis (i) $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = i(\boldsymbol{\xi})$ *für ein* $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}_{\text{div}}$: Sei $t \in [0,T[$. Wir setzen $\boldsymbol{u}_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_t^{t+\lambda} \boldsymbol{u}(s)ds$ $(0 < \lambda < T-t)$. Nach Voraussetzung ist $(\boldsymbol{u}_\lambda(t))$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ beschränkt. Da $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ reflexiv ist, existiert eine Folge $\lambda_j \to 0$ für $j \to +\infty$ und ein $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}_{\text{div}}$, so dass $\boldsymbol{u}_{\lambda_j}(t) \rightharpoonup \boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $j \to +\infty$. Auf der anderen Seite folgt aus $\widetilde{\boldsymbol{u}} = i(\boldsymbol{u}) \in C([0,T];\boldsymbol{V}^*_{\text{div}})$, dass $i(\boldsymbol{\xi}) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)$. Da $\boldsymbol{V}_{\text{div}}$ dicht in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ ist $\boldsymbol{\xi}$ eindeutig. Somit gilt $\boldsymbol{u}_\lambda(t) \rightharpoonup \boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $\lambda \to 0^+$. Ferner haben wir $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = i(\boldsymbol{\xi})$. Analog zeigt man mit $-T\lambda < 0$, dass $\widetilde{\boldsymbol{u}}(T) = i(\boldsymbol{\xi})$ für ein $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}_{\text{div}}$.
Berücksichtigt man außerdem, dass $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = i(\boldsymbol{u}(t))$ für fast alle $t \in]0,T[$ so findet man einen Vertreter $\boldsymbol{u} : [0,T] \to \boldsymbol{H}_{\text{div}}$, so dass $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = i(\boldsymbol{u}(t))$ für alle $t \in [0,T]$. In den folgenden Betrachtung werden wir stets diesen Vertreter auswählen. Wir bemerken noch, dass für diesen Vertreter dann gilt:

$$|\boldsymbol{u}(t)| \leq \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

(ii) Schwache Stetigkeit: Sei $t \in [0,T]$. Sei (t_m) eine Folge in $[0,T]$ mit $t_m \to t$. Nach (i) ist $(\boldsymbol{u}(t_m))$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ beschränkt. Wie oben gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{u}(t_{m_j}))$ und ein $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{H}_{\text{div}}$, so dass $\boldsymbol{u}(t_{m_j}) \rightharpoonup \boldsymbol{\xi}$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $j \to +\infty$. Wegen $i(\boldsymbol{u}) \in C([0,T];\boldsymbol{V}^*_{\text{div}})$ gilt aber $i(\boldsymbol{\xi}) = i(\boldsymbol{u}(t))$ und mithin $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{u}(t)$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt $\boldsymbol{u}(t_m) \rightharpoonup \boldsymbol{u}(t)$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $m \to +\infty$.

4. Sei $\boldsymbol{u}$ schwache Lösung Leray-Hopf Lösung von $(\text{NSG})_{\text{inst}}$, mit Vertreter $\boldsymbol{u} \in C_w([0,T];\boldsymbol{H}_{\text{div}})$, dann gilt

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int\limits_0^t \|\nabla \boldsymbol{u}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} ds + \int\limits_0^t \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}(s)\rangle ds \quad \forall\, t \in [0,T] \tag{5.1}$$

und $\boldsymbol{u}(t_m) \to \boldsymbol{u}_0$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $m \to 0^+$.

Beweis (i) Sei $t \in]0,T]$. Nach Voraussetzung existiert eine Folge (t_m) in]0,T[mit $t_m \to t$ und

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_m)|^2 \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int\limits_0^{t_m} \|\nabla \boldsymbol{u}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} ds + \int\limits_0^{t_m} \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}(s)\rangle ds \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Aus der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm folgt wegen $\boldsymbol{u}(t_m) \rightharpoonup \boldsymbol{u}_0$ in $\boldsymbol{H}_{\text{div}}$ für $m \to +\infty$ die Behauptung aus der obigen Gleichung nach Ausführung des Grenzübergangs $m \to +\infty$.

(ii) Sei (t_m) eine Folge in $]0,T[$ mit $t_m \to 0$. Aus der Energieungleichung (5.1) folgt

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_m)|^2 \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int\limits_0^{t_m} \|\nabla \boldsymbol{u}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} ds + \int\limits_0^{t_m} \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}(s)\rangle ds$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Aus der obigen Ungleichung und der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm ergibt sich

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_m)|^2 \leq \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t_m)|^2,$$

was impliziert, dass $|\boldsymbol{u}_0| = \lim_{m\to\infty} |\boldsymbol{u}(t_m)|$. Zusammen mit der schwachen Konvergenz folgt die starke Konvergenz.

5.1 Druckdarstellung für schwache Lösungen

Wir erinnern an das Gelfand-Tripel $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{V}^*$, wobei die Einbettung $i : \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{V}^*$ gegeben ist durch

$$\langle i(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}.$$

Offensichtlich gilt

$$\|i(\boldsymbol{u})\|_{\boldsymbol{V}^*} \leq |\boldsymbol{u}| = \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{H}}.$$

Mit $\boldsymbol{J} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}^*$ bezeichnen wir die Dualitätsabbildung

$$\langle \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})), \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

welche eine Isometrie ist. Wir beweisen nun das folgende Fundamentallemma.

Lemma 5.3 *Es gilt* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}^{\perp} \iff \exists p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, *so dass*

$$\langle \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{\text{c}}^{\infty}(\Omega).$$

Beweis $\Leftarrow$: Folgt sofort aus der Dichtheit von $\boldsymbol{C}^\infty_{0,\text{div}}(\Omega)$ in $\boldsymbol{V}_{\text{div}}$.
$\Rightarrow$: Wir wählen eine Folge von Kugeln $B_k \subset \Omega$ $(k \in \mathbb{N})$, so dass $\cup_{k=1}^\infty B_k = \Omega$ und für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Menge $\Omega_j := \bigcup_{k=1}^{j} B_k$ zusammenhängend ist. Wegen $\boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega_j) \subset \boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}^{1,2}_{0,\text{div}}(\Omega_j) \subset \boldsymbol{V}_{\text{div}}$ ist $\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}|_{\boldsymbol{W}_0^{1,2}(\Omega_j)} \in \boldsymbol{W}^{-1,2}(\Omega_j)$ mit

$$\langle \boldsymbol{F}_j, \boldsymbol{v}\rangle = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}^{1,2}_{0,\text{div}}(\Omega_j).$$

Unter Verwendung von Satz 4.6 findet man ein $p_j \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_j)$ mit $(p_j)_{B_1} = 0$, so dass

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int_\Omega p_j \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}_{\text{c}}^{\infty}(\Omega_j)^{\,6)}.$$

Wegen $(p_{j+1} - p_j)|_{\Omega_j} = \text{const} = 0$ folgt $p_{j+1}|_{\Omega_j} = p_j$. Somit existiert ein $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $p_{B_1} = 0$ und $p|_{\Omega_j} = p_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Außerdem haben wir

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int\limits_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{v} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}_{\text{c}}(\Omega).$$

■

Sei $B \subset\subset \Omega$ beliebig, aber fixiert. Mit $L^2_{B,\text{loc}}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $p \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ mit $p_B = 0$ und es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\int\limits_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx \le c\|\boldsymbol{\varphi}\| \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}_{\text{c}}(\Omega).$$

Dann existiert für jedes $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}^{\perp}_{\text{div}}$ ein eindeutig bestimmtes $p = \mathscr{P}(\boldsymbol{u}) \in L^2_{B,\text{loc}}(\Omega)$, so dass

$$((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int\limits_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}_{\text{c}}(\Omega).$$

Mit $\boldsymbol{Q} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ bezeichnen wir den Projektor auf $\boldsymbol{V}^{\perp}_{\text{div}}$. Sei $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$. Setzt man $p = \mathscr{P}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}))$ folgt

$$\langle \boldsymbol{J}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = ((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varphi})) = -\int\limits_{\Omega} p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dx \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^{\infty}_{\text{c}}(\Omega). \tag{5.2}$$

Die Funktion p heißt der zu $\boldsymbol{u}$ gehörige *Druck*. Es gilt außerdem die Abschätzunng

$$\int\limits_{\Omega} p^2 dx \le c|\Omega'| \int\limits_{\Omega'} (p - p_{\Omega'})^2 dx \le c_{\Omega'} \|\boldsymbol{u}\|^2,$$

für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Wir haben nun den zentralen

Satz 5.4 *Seien $\boldsymbol{u} \in L^s(0,T; \boldsymbol{H}_{\text{div}})$ $\quad (1 \le s \le +\infty)$ und $\boldsymbol{F} \in L^1(0,T; \boldsymbol{V}^*)$, so dass*

$$-\int\limits_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi})_{\boldsymbol{H}} \eta'(t) dt = \int\limits_0^T \langle \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi}\rangle \eta(t) dt \quad \forall\, \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_{\text{div}}, \eta \in C^{\infty}_{\text{c}}(]0,T[)$$

Dann existieren $p_0 \in L^1(0,T; L^2_{B,\text{loc}}(\Omega))$ und $p_h \in L^s(0,T; L^2_{B,\text{loc}}(\Omega))$ mit $\Delta p_h = 0$, so

[6] Das Gebiet Ω_j braucht nicht Lipschitzstetig zu sein, ist aber endliche Vereinigung von Kugeln, welche trivialerweise sternförmig bezüglich ihrer halben Kugeln sind. Ähnlich wie im Beweis von Satz 4.8 zeigt man mit Hilfe von Satz 4.6, dass $\operatorname{div} : \boldsymbol{W}^{1,2}_0(\Omega_j) \to L^2_0(\Omega_j)$ surjektiv ist.

dass

$$\begin{cases} -\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\boldsymbol{u}(t) + \nabla p_h(t)) \cdot \boldsymbol{\psi} dx \eta'(t) dt \\ \quad = \int\limits_0^T \langle \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi} \rangle \eta(t) dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega p_0(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx \eta(t) dt \\ \forall\, \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega),\ \eta \in C_{\mathrm{c}}^\infty(]0,T[). \end{cases}$$

Dies zeigt, dass

$$(i(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{J}\mathscr{P}^{-1}(p_h))' = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{J}\mathscr{P}^{-1}(p_0) \quad \textit{in} \quad \boldsymbol{V}^*.$$

Beweis Sei $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$. Dann $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_\sigma + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi}$, wobei $\boldsymbol{\psi}_\sigma = (I - \boldsymbol{Q})\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}$. Aus der Voraussetzung folgt dann

$$-\int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1} i(\boldsymbol{u})(t), \boldsymbol{\psi}_\sigma)) \eta'(t) dt = \int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi}_\sigma)) \eta(t) dt.$$

Somit

$$\begin{aligned} &-\int\limits_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi}) \eta'(t) dt \\ &\quad = -\int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}(i(\boldsymbol{u}))(t), \boldsymbol{\psi}_\sigma)) \eta'(t) dt - \int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}(i(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi})) \eta'(t) dt \\ &\quad = \int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi}_\sigma)) \eta'(t) dt - \int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}(i(\boldsymbol{u})), \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi})) \eta'(t) dt \\ &\quad = \int\limits_0^T ((\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi})) \eta(t) dt - \int\limits_0^T ((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi})) \eta(t) dt \\ &\qquad - \int\limits_0^T ((\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}(i(\boldsymbol{u}))(t), \boldsymbol{\psi})) \eta'(t) dt. \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathscr{P}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{F})), \\ p_h &= -\mathscr{P}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}(i(\boldsymbol{u}))), \end{aligned}$$

so folgt zusammen mit (5.2)

$$-\int_0^T (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\psi})\eta'(t)dt + \int_0^T \int_\Omega p_h(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx \eta'(t)dt$$
$$= \int_0^T \langle \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{\psi}\rangle dt + \int_0^T \int_\Omega p_0(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx \eta(t)dt.$$

Insbesondere gilt für fast alle $t \in]0, T[$

$$\int_\Omega p_h(t) \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx = \int_\Omega \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\psi} dx \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}^1(\Omega). \tag{5.3}$$

Wegen $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(t) = 0$ und $\boldsymbol{Q}(\nabla\phi) = \nabla\phi$ für alle $\phi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$ schließt man, dass p_h harmonisch ist. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der obigen Identität unter Verwendung partieller Integration ■

Folgerung 5.5 *Ist $\boldsymbol{u} \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}})$ schwache Lösung der (NSG)$_{\mathrm{inst}}$, so gilt*

$$-\int_{Q_T} (\boldsymbol{u} + \nabla p_h)\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} dxdt + \int_{Q_T} (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dxdt$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \boldsymbol{\varphi}(0) dx + \int_Q p_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} dxdt$$

für alle $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1(\Omega \times [0, T[)$, wobei

$$p_0 = -\mathscr{P}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{F})),$$
$$p_h = -\mathscr{P}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^{-1} i(\boldsymbol{u})).$$

5.2 Existenz schwacher Leray-Hopf Lösungen

Satz 5.6 *Sei $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}$ und $\boldsymbol{f} \in L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$. Dann existiert eine schwache Leray-Hopf Lösung $\boldsymbol{u} \in L^\infty(0, T; \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}) \cap L^2(0, T; \boldsymbol{V}_{\mathrm{div}})$ von (NSG)$_{\mathrm{inst}}$.*

Beweis Plan:
1. Konstruktion einer Näherungslösung und a-priori Abschätzungen
2. Kompaktheit
3. Druckabschätzungen
4. Grenzübergang
5. Energieungleichung

1. Wähle $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le a \le 1$, $a = 1$ auf $]-\infty, 1[$, $a = 0$ auf $]2, +\infty[$. Setzen $a_\varepsilon(\tau) = a(\tau/\varepsilon)$. Dann $a_\varepsilon \to 1$. Wir setzen

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -\int_\Omega \boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{u} a_\varepsilon(|\boldsymbol{u}|) : \nabla \boldsymbol{v} dx, \quad \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^3_{\mathrm{div}}(\Omega), \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

und für $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}^3_{\mathrm{div}}(\Omega)$ definiert man

$$\langle \boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = B_\varepsilon(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}.$$

Wie man leicht sieht, gilt

$$\langle \boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}.$$

Wir definieren $\mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} : L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}) \to L^2(0,T;\boldsymbol{V}^*_{\mathrm{div}})$, durch

$$\langle \mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \int\limits_0^T \langle \boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}(t)} \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)\rangle dt, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}).$$

Dann ist $\mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}}$ ein beschränkter linearer Operator mit

$$\langle \mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \int\limits_0^T \|\nabla \boldsymbol{u}(t)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} dt \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}).$$

Hiermit ist $\mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}}$ monoton. Aus der Theorie der parabolischen Operatorgleichgungen bekommt man eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{w}) \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}) \cap C([0,T];\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}})$, der Operatorgleichung

$$i(\boldsymbol{v})' + \mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{u}_0,$$

wobei $\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = -\int\limits_{Q_T} \boldsymbol{f} : \nabla \boldsymbol{\varphi} dxdt$ für $\boldsymbol{\varphi} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$. Insbesondere gilt die Energiegleichung

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}(t)|^2 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int\limits_0^t \|\nabla \boldsymbol{v}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} + \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{v}(s)\rangle ds \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Dies liefert die Abschätzung

$$\|\boldsymbol{v}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} \le c(|\boldsymbol{u}_0| + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2}) =: K_0.$$

Setzen $M = \{\boldsymbol{v} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}) \,|\, \|\boldsymbol{v}\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} \le K_0\}$. Ähnlich wie im stationären Fall zeigt man, dass $T : M \to M$ stetig ist und kompaktes Bild hat. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz hat T einen Fixpunkt $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}})$, so dass

$$(\boldsymbol{u}_\varepsilon)' + \mathscr{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon} \boldsymbol{u}_\varepsilon = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{u}_\varepsilon(0) = \boldsymbol{u}_0.$$

Darüber hinaus, gilt die Energiegleichung

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)|^2 = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 - \int\limits_0^t \|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} + \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}_\varepsilon(s)\rangle ds \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{5.4}$$

und die a-priori Abschätzung

$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})} + \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} \le K_0 = c(|\boldsymbol{u}_0| + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^2}).$$

Aus der Reflexivität und dem Satz von Banach-Alaoglu gibt es eine Folge $\varepsilon_j \to 0$ und ein $\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}) \cap L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}})$, so dass

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \rightharpoonup \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad L^2(0,T;\boldsymbol{V}_{\mathrm{div}}) \quad \text{für} \quad j \to +\infty, \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \tag{5.6}$$

2. Kompaktheit: Aus der Definition von $\boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon}$ folgt

$$\|\boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)}\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\|_{\boldsymbol{V}^*} \le c(1 + \|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\|^2) \quad \text{für fast alle} \quad t \in]0,T[,$$

Hiermit schließt man

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)}\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{F}(t)\|_{\boldsymbol{V}^*} dt &\le c(1 + \|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V})} + \|\boldsymbol{f}\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2)}) \\ &\le c(1 + K_0^2).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Gemäß Satz 5.4 haben wir

$$(i(\boldsymbol{u}_\varepsilon) - \boldsymbol{JQJ}^{-1}(i(\boldsymbol{u}_\varepsilon)))' = (I - \boldsymbol{JQJ}^{-1})(-\boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon}\boldsymbol{u}_\varepsilon + \boldsymbol{F}).$$

Dies zeigt, zusammen mit (5.7), dass

$$\begin{aligned}\|(i(\boldsymbol{u}_\varepsilon) - \boldsymbol{JQJ}^{-1}(i(\boldsymbol{u}_\varepsilon)))'\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{V}^*)} &\le \| - \boldsymbol{A}^\varepsilon_{\boldsymbol{u}_\varepsilon}\boldsymbol{u}_\varepsilon + \boldsymbol{F}\|_{L^1(0,T;\boldsymbol{V}^*)} \\ &\le c(1 + K_0^2).\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Satzes von J. Simon und $\boldsymbol{JQJ}^{-1}(\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}) \sim -\nabla p_{h,\varepsilon_j}$ folgt

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} + \nabla p_{h,\varepsilon_j} \to \boldsymbol{u} + \nabla p_h \quad \text{in} \quad L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty,$$

wobei $p_{h,\varepsilon} = -\mathscr{P}\boldsymbol{QJ}^{-1}(i(\boldsymbol{u}_\varepsilon))$ und $p_h = -\mathscr{P}\boldsymbol{QJ}^{-1}i(\boldsymbol{u})$.

3. Druckabschätzungen Wir zeigen nun, dass

$$\nabla p_{h,\varepsilon_j} \to \nabla p_h \quad \text{in} \quad L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Sei $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$ fixiert. Gemäß Satz 4.8 /4. existiert ein $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}^{1,2}_0(B_r)$ mit $\operatorname{div} \boldsymbol{w} = p_{h,\varepsilon_j} - (p_{h,\varepsilon_j})_{B_r}$ und

$$\|\nabla \boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{V}} \le c\|p_{h,\varepsilon_j}(t) - (p_{h,\varepsilon_j}(t))_{B_r}\|_{L^2(B_r)}.$$

Zusammen mit der Identität (5.3) erhält man

$$\begin{aligned}\int_{B_r} (p_{h,\varepsilon_j}(t) - (p_{h,\varepsilon_j}(t))_{B_r})^2 dx &= \int_\Omega (p_{h,\varepsilon_j}(t) - (p_{h,\varepsilon_j}(t))_{B_r}) \operatorname{div} \boldsymbol{w} dx \\ &= \int_\Omega \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(t) \cdot \boldsymbol{Qw} dx \\ &\le \|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(t)\|_{\boldsymbol{H}}\|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{V}} \\ &\le K_0\|p_{h,\varepsilon_j}(t) - (p_{h,\varepsilon_j}(t))_{B_r}\|_{L^2(B_r)}.\end{aligned}$$

Da p_{h,ε_j} harmonisch ist, bekommen wir

$$\|\nabla p_{h,\varepsilon_j}(t)\|_{\boldsymbol{L}^2(B_{r/2})} \leq cr^{-1}\|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{H})} \leq C.$$

Insbesondere folgt hieraus aufgrund der Reflexivität und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes

$$\nabla p_{h,\varepsilon_j}(t) \rightharpoonup \nabla p_h(t) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{L}^2(B_{r/2}) \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Unter Verwendung der Mittelwertformel für harmonische Funktionen folgt schließlich

$$\nabla p_{h,\varepsilon_j}(x_0,t) \to \nabla p_h(x_0,t) \quad \text{für} \quad j \to +\infty \quad \forall\,(x_0,t) \in Q_T.$$

Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$. Nochmalige Anwendung der Mittelwerteigenschaft zeigt, dass

$$\sup_{\Omega' \times [0,T]} |\nabla p_{\varepsilon_j}| \leq C$$

unabhängig von j. Nach dem Konvergenzsatz von Vitali folgt die gewünschte Konvergenzeigenschaft.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \to \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \tag{5.8}$$

Indem man g.g.f. zu einer Teilfolge übergeht gilt

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \to \boldsymbol{u} \quad \text{fast überall in } Q_T \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Dies impliziert, dass

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} a_{\varepsilon_j}(|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}|) \to \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \quad \text{fast überal in } Q_T \quad \text{für} \quad j \to +\infty.$$

Mithilfe einer Folgerung des Satzes von Lebesgue über majorisierte Konvergenz sieht man

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} a_{\varepsilon_j}(|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}|) \to \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} \quad \text{in} \quad L^1(0,T;\boldsymbol{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)) \quad \text{für} \quad j \to +\infty. \tag{5.9}$$

4. Grenzübergang $\varepsilon_j \to 0$. Sei $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{C}^1_{\mathrm{c}}(\Omega \times [0,T[)$ mit $\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = 0$. Da $\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}$ schwache Lösung der Näherungsgleichung der (NSG) ist, haben wir

$$-\int_{Q_T} \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} dxdt + \int_{Q_T} (\nabla \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} - \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} \otimes \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j} a_{\varepsilon_j}(|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}|) + \boldsymbol{f}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dxt$$
$$= \int_\Omega \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) dx.$$

Mithilfe von (5.5) und (5.9) folgt nach Ausführung des Grenzüberganges $\varepsilon_j \to 0$ in der obigen Identität, dass

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{Q_T} \boldsymbol{u}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} dxdt + \int\limits_{Q_T} (\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}) : \nabla \boldsymbol{\varphi} dxt \\
= \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(0) dx.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $\boldsymbol{u}$ eine schwache Lösung von $(\mathrm{NSG})_{\mathrm{inst}}$ mit beschränkter Energie.

5. Energieungleichung Aus (5.8) erhält man eine Menge $N \subset]0,T[$ vom Maß 0, so dass $\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(t) \to \boldsymbol{u}(t)$ in $\boldsymbol{L}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ für alle $t \in]0,T[\backslash N$. Sei $t \in]0,T[\backslash N$. Dann folgt aus der Reflexivität von $\boldsymbol{H}_{\mathrm{div}}$, dass

$$
\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(t) \rightharpoonup \boldsymbol{u}(t) \quad \text{in} \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{div}} \quad \text{für} \quad j \to +\infty.
$$

Aus der Energiegleichung (5.4) folgt dann wegen der schachen Unterhalbstetigkeit der Norm, dass

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \int\limits_0^t \|\nabla \boldsymbol{u}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} ds &\leq \liminf_{j\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(t)|^2 + \int\limits_0^t \|\nabla \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(s)\|^2_{\boldsymbol{L}^2} ds \right\} \\
&= \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 + \lim_{j\to\infty} \int\limits_0^t \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}_{\varepsilon_j}(s)\rangle ds \\
&= \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}_0|^2 + \int\limits_0^t \langle \boldsymbol{F}(s), \boldsymbol{u}(s)\rangle ds.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

- ENDE -