Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II

Institut für Mathematik

Diplomarbeit

Das Martingalmaß mit minimaler relativer Entropie für Lévy-Prozesse

eingereicht von Katja Krol
geb. am 08.07.1981 in Kursk

Betreuer: **Prof. Dr. Uwe Küchler**

Berlin, 24. April 2007

Erklärung zur Urheberschaft

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Einverständniserklärung

Hiermit erkläre ich mich einverstanden, dass ein Exemplar meiner Diplomarbeit in der Bibliothek des Instituts für Mathematik verbleibt.

Berlin, 24. April 2007

Katja Krol

Ich danke ganz herzlich Herrn Professor Küchler für die exzellente Betreuung meiner Diplomarbeit, Herrn Professor Föllmer, Herrn Professor Imkeller und Herrn Professor Küchler für all das Wissen, das sie mir in den Bereichen Stochastik und Finanzmathematik vermittelt haben. Während meiner Studienzeit habe ich ihre pädagogischen Fähigkeiten und wissenschaftliche Kompetenz schätzen gelernt.

Weiterhin bedanke ich mich bei Dr. Stefan Ankirchner, Gregor Heyne, Michael Högele und Thomas Knispel für ihre Hilfe beim Feinschliff meiner Formulierungen.

INHALTSVERZEICHNIS

0. EINLEITUNG

Für lange Zeit spielte das klassische Modell von Black und Scholes eine dominierende Rolle in der Finanzmathematik. Der Preisprozess einer Aktie wird in diesem Modell durch die folgende Differenzialgleichung beschrieben

$$dS_t = S_t \left(\mu\, dt + \sigma\, dW_t\right), \quad S_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},\ t \in [0,T],\ T > 0,$$

mit Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. W_t ist eine Standard Brownsche Bewegung. Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist gegeben durch die sogenannte geometrische Brownsche Bewegung

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t\right\}, \quad t \in [0,T].$$

Leider wird durch den Prozess S das wirkliche Geschehen am Finanzmarkt nur unzureichend beschrieben. Zum einen beobachtet man, dass die Aktienkurse Sprünge machen, die Pfade der geometrischen Brownschen Bewegung sind dagegen stetig. Ferner, betrachtet man die logarithmierten Renditen $\ln \frac{S_t}{S_u}$, $t > u$ (log-Returns), so folgt aus der obigen Darstellung der geometrischen Brownschen Bewegung, dass sie normalverteilt mit dem Erwartungswert $\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-u)$ und der Varianz $\sigma^2(t-u)$ sind. Die Abweichung von der Normalität lässt sich jedoch empirisch bestätigen. Die Verteilung der log-Returns ist leptokurtisch: es liegt mehr Masse in den Tails der Verteilung als im Fall einer normalverteilten Zufallsgröße, was großen Preisschwankungen eine signifikante Wahrscheinlichkeit zuweist. Der empirische Wert für den Schiefeparameter ist negativ, während im Gaußschen Fall für diesen Wert Null zu erwarten wäre. Die Verschiebung der Masse bei relativ großen Werten (es gibt Börsentage mit extremen Kursverlusten) führt zu einer Gewinn/Verlust-Asymmetrie.
In der „risikoneutralen Welt“ beobachtet man, dass die implizite Volatilität, d.h. der Wert des Parameters σ im Black-Scholes-Modell, berechnet aus den Marktpreisen für z.B. Call-Optionen $(S_T - K)^+$, weder für verschiedene Ausübungspreise K, noch für verschiedene Maturitäten T, konstant ist. Das Modell von Black und Scholes führt aber auf konstante implizite Volatilität.

Aus diesen und anderen Gründen gewinnen Lévy-Prozesse eine immense Popularität in der modernen Finanzmathematik. Verallgemeinert man das Black-Scholes-Modell, indem man die geometrische Brownsche Bewegung durch das Exponential eines Lévy-Prozesses X,

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad t \in [0,T],$$

ersetzt, so erhält man ein Modell, das sowohl besser zu den Markdaten passt, als auch die obigen Phänomene zu erklären im Stande ist. Einerseits sind die Lévy-Prozesse sehr vielseitig, bieten also viel Flexibilität bei der Modellierung der Preisprozesse. Andererseits sind sie analytisch leicht zu handhaben, denn ihre Verteilungseigenschaften sind bereits eindeutig durch ihr charakteristisches Tripel beschrieben.

Der Übergang von der geometrischen Brownschen Bewegung zum exponentiellen Lévy-Modell bringt jedoch einige Schwierigkeiten in der Optionsbewertung mit sich. Das klassische Black-Scholes-Modell ist vollständig: jedes Finanzderivat kann durch ein selbstfinanzierendes Portfolio, bestehend aus Aktie und Bond, repliziert werden. Dies ist im arbitragefreien Modell äquivalent zur Existenz eines eindeutigen Martingalmaßes, d.h. eines zum objektiven Maß äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes, unter dem der Preisprozess einer Aktie ein Martingal ist. Der faire Preis einer Option kann dann als Erwartungswert des abdiskontierten Derivats unter dem neuen Maß angegeben werden.
Lévy-Prozesse führen allerdings generell zu unvollständigen Märkten: nicht alle Derivate können repliziert werden und es existieren, falls der Markt arbitragefrei ist, im Allgemeinen unendlich viele äquivalente Martingalmaße. Es ist daher unklar, wie der faire Preis eines Derivats bestimmt werden soll.

Ein sehr beliebter Ansatz ist, aus der Klasse der äquivalenten Martingalmaße ein bestimmtes Maß als Instrument zur Berechnung von Optionspreisen zu wählen. Der Preis eines Derivats wird dann analog zum vollständigen Markt als Erwartungswert unter diesem Maß berechnet. In der Literatur findet man eine Vielzahl von Ansätzen zur Bestimmung eines Martingalmaßes, das gemäß eines bestimmten Kriteriums optimal ist. Definiert man z.B. eine bestimmte Abstandsfunktion zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen, so entsteht in einigen Fällen ein duales Problem in der Nutzentheorie: Die Optionspreise hängen von Präferenzen eines Investors ab, die Suche nach dem fairen Preis besteht daher in der Aufgabe, die Nutzenfunktion des Investors zu bestimmen. Der Preis, bei dem der maximale Nutzen erzielt wird, entspricht dann dem Erwartungswert, berechnet unter einem risikoneutralen Maß, das einen bestimmten Abstand zum objektiven Maß minimiert.

Zu den bekanntesten Ansätzen gehören die Esscher-Transformation von Gerber und Shiu [GS94] das minimale Martingalmaß von Föllmer und Schweizer [FS91], das Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie, untersucht von Chan in [Cha99], Miyahara in [Miy99], Frittelli in [Fri00], Fujiwara und Miyahara in [FM03] und Esche und Schweizer in [ES05].

Der wahrscheinlich einfachste Weg, ein äquivalentes Martingalmaß zu finden, ist die Esscher-Maßtransformation. Aus der exponentiellen Familie des Lévy-Prozesses X wird dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß ausgewählt, das den abdiskontierten Preisprozess der Aktie zu einem

Martingal macht. Solche Maßwechsel werden lediglich durch einen Parameter beschrieben, der aus der Martingalbedingung bestimmt werden soll.
Ein weiterer sehr verbreiteter Ansatz ist, aus der Menge der äquivalenten Martingalmaße dasjenige auszuwählen, das den sogenannten Kullback-Leibler-Abstand, auch als relative Entropie bekannt, zum objektiven Maß minimiert.

Beide Methoden sind wie bereits erwähnt eng mit der Nutzentheorie verbunden. Die Suche nach einem Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie kann als duales Problem zur Maximierung einer exponentiellen Nutzenfunktion betrachtet werden, [Fri00], [GR01]. Trifft ein repräsentativer Investor seine Entscheidungen gemäß einer Potenz-Nutzenfunktion, so entspricht der Preis unter dem Esscher-Martingalmaß demjenigen Preis, bei dem es für den Investor optimal ist, keine Einheiten des Derivats zu kaufen oder zu verkaufen, [GS94].

In dieser Arbeit studieren wir die beiden oben genannten Ansätze zur Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes für das exponentielle Lévy-Modell. Die Dualitätsdarstellung des Preisprozesses durch das stochastische Exponential eines anderen Lévy-Prozesses liefert einen engen Zusammenhang zwischen den beiden Maßtransformationen. Wir beschränken uns daher nicht auf exponentielle Lévy-Modelle, sondern liefern allgemein gültige Resultate für Lévy-Prozesse, die auch in vielen anderen Bereichen, die sich mit der Problematik der Minimierung der Entropie unter Nebenbedingungen beschäftigen, Anwendung finden können. Anschließend machen wir von der Dualitätsdarstellung Gebrauch und übersetzen unsere Resultate für den Spezialfall eines exponentiellen Lévy-Modells.
Wir präsentieren neue Ergebnisse, die eine vollständige Charakterisierung des Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie ermöglichen. Es wird gezeigt, dass die aus der Literatur bekannten hinreichenden Bedingungen (z.B. [FM03], Theorem 3.1 oder [ES05], Theorem B) für die Existenz dieses Martingalmaßes auch notwendig sind (Theorem 2.7). Ebenfalls gewinnen wir, unabhängig von der Existenz dieses Maßes, eine Darstellung des Infimums der relativen Entropie durch die kumulantenerzeugende Funktion des Lévy-Prozesses (Theorem 2.6), die eine einfache Methode zur Bestimmung dieser Größe liefert.

Diese Arbeit ist in drei Kapitel unterteilt.

- Im ersten Kapitel werden Lévy-Prozesse und exponentielle Lévy-Modelle vorgestellt.
- Im zweiten Kapitel wird erst der Zusammenhang zwischen der Esscher-Maßtransformation in der Finanzmathematik und dem äquivalenten Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie über die Exponentialfamilien hergestellt. Anschließend fassen wir die Ergebnisse aus [ES05] für den Fall eines reellwertigen Lévy-Prozesses zusammen und beweisen die Umkehrungen einiger dieser Resultate.

- In der nachfolgenden Diskussion vergleichen wir unsere Ergebnisse mit denen von Hubalek und Sgarra, [HS06], die eine ähnliche Fragestellung, allerdings nur für den Fall eines exponentiellen Lévy-Prozesses, betrachtet haben. Wir diskutieren außerdem einige Stellen im Beweis des Hauptresultats von [HS06], die aus unserer Sicht unklar sind.

- Appendix A gibt einen kurzen Überblick über die relative Entropie und die Esscher-Transformation in der Versicherungsmathematik.

Längere Beweise sind zur besseren Lesbarkeit der Arbeit im Appendix B notiert. Ein Symbolverzeichnis befindet sich im Appendix C.

1. LÉVY-PROZESSE UND EXPONENTIELLE LÉVY-MODELLE

1.1 Lévy-Prozesse: Definitionen und erste Eigenschaften

Es sollen hier nur einige grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der Lévy-Prozesse präsentiert werden. Für eine ausführliche Darstellung sei auf das Buch von Cont und Tankov [CT03] oder von Sato [Sat99] verwiesen. Im Sinne der einheitlichen Notation verwenden wir die Bezeichnungen aus [CT03].

Definition 1.1 ([CT03], Definition 3.1). Ein reellwertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ heißt *Lévy-Prozess*, falls er folgenden Bedingungen genügt.

1. Für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsgrößen $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ unabhängig (unabhängige Zuwächse).
2. $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. (der Prozess startet in Null).
3. Für $s, t \geq 0$ hängt die Verteilung von $X_{t+s} - X_s$ nicht von s ab (stationäre Zuwächse).
4. Für alle $t \geq 0$ und alle $\epsilon > 0$ gilt
$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \epsilon) = 0 \quad \text{(stochastische Stetigkeit).}$$
5. Es existiert ein $\Omega_0 \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$, so dass für alle $\omega \in \Omega_0$ die Funktion $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsstetig ist und linksseitige Limes besitzt (càdlàg-Pfade).

Bemerkung 1.1. Die Bedingung 4. impliziert, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prozess zu einem beliebigen festen Zeitpunkt einen Sprung ausführt, gleich Null ist.

Bemerkung 1.2. In dieser Arbeit treffen wir immer folgende Vereinbarungen, um Wiederholungen und umständliche Formulierungen möglichst zu vermeiden:

- Der Zeithorizont T ist endlich, d.h. wir betrachten den Lévy-Prozess auf dem Zeitintervall $[0, T]$.

- Als Filtration nehmen wir die $\mathbb{P}$-Vervollständigung der von X erzeugten Filtration und bezeichnen diese mit $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$, d.h.

  $$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s \,:\, s \le t) \vee \mathscr{N}, \text{ für } \mathscr{N} = \{N \subseteq \Omega \,:\, \exists B \in \mathscr{F} \,:\, N \subseteq B\,, \mathbb{P}(B) = 0\}.$$

  Jeder Lévy-Prozess ist auch ein Feller-Prozess, also genügt $\mathbb{F}^X$ den üblichen Bedingungen.

- Es gelte $\mathscr{F}_0$ ist trivial und $\mathscr{F}_T^X = \mathscr{F}$.

Das einfachste Beispiel eines Lévy-Prozesses ist eine lineare Funktion der Zeit. Die Brownsche Bewegung ist der einzige (nichtdeterministische) Lévy-Prozess mit stetigen Pfaden. Weitere Beispiele sind der Poisson- und der zusammengesetzte Poisson-Prozess. Wir werden sehen, dass die Klasse dieser Prozesse sehr vielfältig ist und sehr unterschiedliche Prozesse beinhaltet. Betrachtet man einen Lévy-Prozess zu einer Zeit $t \in (0,T]$ und wählt man eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,t]$ der Länge Δt, so kann man X_t als folgende Summe unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen auffassen:

$$X_t = \sum_{n=1}^{t/\Delta t} \left(X_{n\Delta t} - X_{(n-1)\Delta t}\right).$$

Es gilt $X_{n\Delta t} - X_{(n-1)\Delta t} \sim X_{\Delta t}$ für $n = 1, \ldots, t/\Delta t$. Daraus erhält man eine wichtige Eigenschaft der Lévy-Prozesse: Ihre Verteilung ist unbegrenzt teilbar im Sinne der folgenden Definition.

Definition 1.2 ([CT03], Definition 3.2). Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine reellwertige Zufallsgröße. Die Verteilung μ von X auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ heißt *unbegrenzt teilbar*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ unabhängige identisch verteilte reellwertige Zufallsgrößen $Y_1, \ldots, Y_n$ auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ existieren, so dass μ die Verteilung von $Y_1 + \ldots + Y_n$ ist.

Äquivalent kann man sagen, dass μ genau dann unbegrenzt teilbar ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Verteilung $\mu^{1/n}$ existiert, so dass

$$\mu = \underbrace{\mu^{1/n} * \ldots * \mu^{1/n}}_{n\text{-mal}}$$

gilt. So wie die Verteilung eines Lévy-Prozesses zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in (0,T]$ unbegrenzt teilbar ist, so kann man auch jeder unbegrenzt teilbaren Verteilung einen Lévy-Prozess zuordnen kann.

Proposition 1.1 ([CT03], Proposition 3.1). *Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess. Dann ist die Verteilung von X_t für jedes $t \in [0,T]$ unbegrenzt teilbar. Ist μ eine unbegrenzt teilbare Verteilung, so existiert ein Lévy-Prozess X mit X_1 verteilt gemäß μ.*

Um fundamentale Ergebnisse der Theorie der Lévy-Prozesse präsentieren zu können, benötigen wir einige allgemeine Begriffe.

Definition 1.3 ([CT03], Definition 2.2). Es sei $E \subseteq \mathbb{R}$. Ein Maß μ auf $(E, \mathscr{B}(E))$ heißt *Radonmaß*, falls $\mu(B) < \infty$ für jede kompakte Menge $B \in \mathscr{B}(E)$ gilt.

Definition 1.4 ([CT03], Definition 2.18). Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und μ ein Radonmaß auf $(E, \mathscr{B}(E))$. Ein *Poissonsches Zählmaß M auf E mit Intensitätsmaß μ* ist ein Zufallsmaß (also ein Maß, das vom Zufall abhängt) mit Werten in $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M : \Omega \times \mathscr{B}(E) &\to \mathbb{N} \\ (\omega, A) &\mapsto M(\omega, A), \end{aligned}$$

so dass

1. $M(\omega, \cdot)$ ein Radonmaß auf $(E, \mathscr{B}(E))$ mit Werten in $\mathbb{N}$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ ist,
2. $M(A) := M(\cdot, A)$ eine Poisson-verteilte Zufallsgröße mit Intensitätsparameter $\mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{B}(E)$ ist, d.h.
$$\mathbb{P}(M(A) = k) = \frac{e^{-\mu(A)}\mu(A)^k}{k!},$$
3. für $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{B}(E)$ paarweise disjunkt, die Zufallsgrößen $M(A_1), \dots, M(A_n)$ unabhängig sind.

Das *kompensierte Poissonsche Zählmaß* $\tilde{M}$ ist durch die Vorschrift

$$\tilde{M}(A) := M(A) - \mu(A), \quad A \in \mathscr{B}(E),$$

definiert.
Es seien nun E das kartesische Produkt $E = [0, T] \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und M ein Poissonsches Zählmaß auf $(E, \mathscr{B}(E))$ mit dem Intensitätsmaß μ. Für ein festes $\omega \in \Omega$ ist $M(\omega, \cdot)$ ein Maß auf E. Ferner kann man für jede reellwertige messbare Funktion $f : E \to \mathbb{R}_+$, die

$$\int_{[0,T]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |f(s, y)| \mu(ds, dy) < \infty \tag{1.1.1}$$

erfüllt, durch maßtheoretische Standardargumente den folgenden Integralprozess definieren:

$$Y_t := \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(s, y) M(ds, dy), \quad t \in [0, T].$$

Die Bedingung (1.1.1) liefert die Wohldefiniertheit des Integrals.

Für einen beliebigen Lévy-Prozess X werden das folgende Sprungmaß

$$J_X([s, t] \times A) := \#\{u \in [s, t] \,:\, \Delta X_u \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

und das *Lévy-Maß* ν auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ([CT03], Definition 3.4)

$$\nu(A) := \mathbb{E}\left(\#\{t \in [0,1] \,:\, \Delta X_t \in A\}\right), \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

definiert, wobei $\Delta X_t(\omega) := X_t(\omega) - \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$, $t \in (0,T]$ für festes $\omega \in \Omega$ den Sprung des Prozesses zur Zeit t bezeichnet. Das Maß $\nu(A)$ beschreibt die erwartete Anzahl von Sprüngen im Intervall der Länge 1 mit Sprunghöhen in der Menge A.

Das nächste Theorem ist die berühmte Lévy-Itô-Zerlegung der Trajektorien eines Lévy-Prozesses. Diese besagt, dass jeder Lévy-Prozess aus der Superposition einer deterministischen linearen Funktion, einer Brownschen Bewegung und einem Sprungprozess besteht. Der Sprunganteil lässt sich in die Summe großer Sprünge und die kompensierte Summe kleiner Sprünge zerlegen. Die Sprungzeiten und -höhen sind durch das Poissonsche Zählmaß J_X festgelegt, als Intensitätsmaß tritt dabei $dt \otimes \nu(\,dx)$ auf.

Theorem 1.2 (Lévy-Itô-Zerlegung, [CT03], Proposition 3.7). *Es sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem Lévy-Maß ν. Dann gilt*

- *ν ist ein Radonmaß auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (x^2 \wedge 1)\nu(\,dx) < \infty. \tag{1.1.2}$$

- *Das Sprungmaß J_X ist ein Poissonsches Zählmaß auf $[0,T]\times\mathbb{R}$ mit dem Intensitätsmaß $dt\nu(\,dx)$.*

- *Es existiert ein $\gamma \in \mathbb{R}$, ein $\sigma \geq 0$ und eine Standard Brownsche Bewegung W_t, so dass gilt*

$$\begin{aligned}
X_t &= \gamma t + \sigma W_t + X_t^l + \lim_{\epsilon \downarrow 0} X_t^\epsilon, \quad t \in [0,T], \text{ wobei} \\
X_t^l &:= \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (x - h(x)) J_X(\,ds,\,dx), \\
X_t^\epsilon &:= \int_{(0,t]} \int_{|x|\geq\epsilon} h(x)[J_X(\,ds,\,dx) - \,ds\nu(\,dx)] = \int_{(0,t]} \int_{|x|\geq\epsilon} h(x)\tilde{J}_X(\,ds,\,dx).
\end{aligned}$$

  Die Summanden sind unabhängig und X_t^ϵ konvergiert für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig in t auf $[0,T]$, $\mathbb{P}$-fast sicher.

Bemerkung 1.3. Die Abbildung h ist die sogenannte *Abschneidefunktion*, d.h. eine beschränkte messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = O(|x|)$ für $x \to 0$. In der modernen Literatur wird meistens direkt mit $h(x) = x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$ gearbeitet. Eine andere Wahl der Abschneidefunktion verändert nur den Parameter $\gamma =: \gamma(h)$. Dagegen sind der Diffusionsparameter σ^2 und das Lévy-Maß ν unabhängig von der Wahl von h.

Das Tripel, bestehend aus den drei Parametern $(\sigma^2, \nu, \gamma(h))$ bestimmt die Verteilung des Prozesses eindeutig und wird deshalb das *charakteristische Tripel von X (bezüglich der Abschneidefunktion h)* genannt. Im Folgenden fixieren wir eine beliebige Abschneidefunktion h und sprechen zur besseren Übersichtlichkeit der Arbeit einfach von dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ) von X.

Fast direkt aus der Lévy-Itô-Darstellung folgt das zweite fundamentale Resultat der Theorie der Lévy-Prozesse: die Lévy-Khinchin-Formel. Dieses Theorem kann auch unabhängig von der Lévy-Itô-Zerlegung gezeigt werden und liefert unter anderem die vollständige Charakterisierung der unbegrenzt teilbaren Verteilungen durch konkrete Angabe ihrer charakteristischen Funktion.

Theorem 1.3 ([CT03], Theorem 3.1). *Es sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{iuX_t}) &= e^{t\psi(u)}, \quad t \in [0,T], \quad \textit{mit} \\ \psi(u) &= i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{iux} - 1 - iuh(x)\right) \nu(\,dx). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Die Funktion ψ wird *Lévy-Exponent* des Prozesses X genannt. Aus dieser Darstellung folgt auch, dass die Verteilung eines Lévy-Prozesses zu jedem Zeitpunkt $t \in (0,T]$ bereits durch die Verteilung zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in (0,T]$ eindeutig bestimmt ist.

Sowohl die Lévy-Itô-Zerlegung, als auch die Lévy-Khinchin-Formel zeigen einerseits die Vielfältigkeit der Lévy-Prozesse, andererseits auch deren analytische Einfachheit: Die Verteilung eines solchen Prozesses ist bereits durch das Tripel (σ^2, ν, γ) eindeutig charakterisiert. Sind andererseits $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ und ein Radonmaß ν, das die Integrabilitätsbedingung (1.1.2) erfüllt, gegeben, so ist es wohlbekannt, dass ein Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ existiert, dessen charakteristische Funktion zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0,T]$ durch (1.1.3) gegeben ist.

Viele Eigenschaften eines Lévy-Prozesses lassen sich aus der Beschaffenheit des Lévy-Maßes ν ablesen.
Man sagt, dass ein Lévy-Prozess *von endlicher Variation* ist, falls seine Trajektorien Funktionen mit endlicher Variation mit Wahrscheinlichkeit Eins sind. Folgendes Theorem charakterisiert solche Lévy-Prozesse:

Theorem 1.4 ([CT03], Proposition 3.9). *Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Der Prozess X ist genau dann von endlicher Variation, wenn*

$$\sigma^2 = 0 \quad \textit{und} \quad \int_{0<|x|\le 1} |x|\nu(\,dx) < \infty,$$

gilt.

In diesem Fall kann der Prozess als lineare Drift und Summe der Sprünge dargestellt werden (ist $\int_{0<|x|\leq 1}|x|\nu(dx) < \infty$, so kann auch $h \equiv 0$ als Abschneidefunktion gewählt werden): $X_t = \gamma t + \sum_{s\leq t}\Delta X_s$.

Die Existenz der Momente ist bedeutend in der Finanzmathematik, sie ist z.B. für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes entscheidend.

Theorem 1.5 ([CT03], Propositionen 3.13 und 3.14). *Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ).*

1. *Es sei $p \in \mathbb{R}_+$. Es gilt $(\mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty$ für ein $t \in (0, T]$ (und damit für alle $t \in [0, T]$) genau dann, wenn*
$$\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|^p \nu(dx) < \infty \text{ erfüllt ist.}$$
2. *Es sei $u \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathbb{E}(e^{uX_t}) < \infty$ für ein $t \in (0, T]$ (und damit für alle $t \in [0, T]$) genau dann, wenn*
$$\int_{\{|x|\geq 1\}} e^{ux} \nu(dx) < \infty \text{ erfüllt ist.}$$
In diesem Fall ist $\mathbb{E}(e^{uX_t}) = e^{t\psi(-iu)}$, wobei ψ der Lévy-Exponent von X bezeichnet.

Aus der Lévy-Itô-Darstellung kann man mit Hilfe des letzten Resultats eine einfache Bedingung formulieren, wann ein Lévy-Prozess ein Martingal ist. Der Prozess X muss integrierbar sein und der Trend muss verschwinden. Durch das charakteristische Tripel des Prozesses können diese Bedingungen folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|\nu(dx) < \infty \text{ und } \gamma + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (x - h(x))\nu(dx) = 0. \tag{1.1.4}$$

Später werden wir sehen, dass für einen Lévy-Prozess X auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^X, \mathbb{P})$ genau dann ein äquivalentes Martingalmaß existiert, wenn die Trajektorien von X weder monoton fallend, noch monoton wachsend sind. Monoton wachsende Lévy-Prozesse bezeichnet man als *Subordinatoren* (X ist genau dann monoton fallend, wenn $-X$ ein Subordinator ist). Die nächste Proposition bietet eine ausführliche Charakterisierung solcher Prozesse.

Proposition 1.6 ([CT03], Proposition 3.10). *Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

1. *$X_t \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein $t \in (0, T]$.*

2. *$X_t \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $t \in [0, T]$.*

3. *Für $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt $X_s \leq X_t$ $\mathbb{P}$-f.s.*

4. *Das charakteristische Tripel von X erfüllt*

$$\sigma^2 = 0, \quad \nu((-\infty, 0)) = 0, \quad \int_0^\infty (x \wedge 1)\nu(\,dx) < \infty, \quad b \geq 0,$$

wobei $b = \gamma - \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)\nu(\,dx)$ gesetzt wurde.

Der Prozess X ist genau dann monoton wachsend, wenn er keine Gaußsche Komponente, nur positive Sprünge endlicher Variation und einen nichtnegativen linearen Anteil aus der Lévy-Itô-Darstellung

$$X_t = bt + \sum_{0 \leq s \leq t} \Delta X_s, \quad t \in [0, T],$$

besitzt.

Abschließend präsentieren wir eines der wichtigsten Hilfsmittel der stochastischen Integration und Analysis: die Itô-Formel. Sie ermöglicht auch eine elegante Darstellung von Funktionen eines Lévy-Prozesses.

Theorem 1.7 ([CT03], Proposition 8.15). *Es seien $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ) und f eine Funktion mit $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dann gilt für $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) = &\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(x, X_{s-})\,dX_s + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\right) ds \\ &+ \sum_{\substack{s \leq t \\ \Delta X_s \neq 0}} \left(f(s, X_{s-} + \Delta X_s) - f(s, X_{s-}) - \Delta X_s \frac{\partial f}{\partial x}(x, X_{s-})\right). \end{aligned}$$

Der erste Summand in der obigen Darstellung von $f(t, X_t)$ ist ein sogenanntes *stochastisches Integral*. Für die genaue Definition wird auf [CT03], Kapitel 8, verwiesen.

1.2 Exponentielle Lévy-Modelle

In finanzmathematischen Modellen wird häufig angenommen, dass der Preisprozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ einer Aktie durch einen Lévy-Prozess $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ getrieben wird. Hierbei spielen die exponentiellen Lévy-Modelle, in denen $S_t = e^{X_t},\ t \in [0,T]$, gesetzt wird, eine zentrale Rolle.

Definition 1.5. Es sei X ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ) auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^X, \mathbb{P})$. Man bezeichnet die Familie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^X, \mathbb{P}, S)$, wobei $S = e^X$ der *exponentielle Lévy-Prozess* ist, als *exponentielles Lévy-Modell*.

Bemerkung 1.4. In dieser Arbeit betrachten wir einen Bond $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ mit konstanter Zinsrate, dessen Wertentwicklung durch

$$B_t = e^{rt}, \quad t \in [0,T],$$

beschrieben wird. Ist man an abdiskontierten Aktienkursen interessiert, wie etwa bei der Berechnung von Optionspreisen als Erwartungswert des abdiskontierten Derivats unter einem äquivalenten Martingalmaß, so kann man zum Prozess $\tilde{X}$, definiert durch $\tilde{X}_t = X_t - rt,\ t \in [0,T]$, übergehen. Hierbei ist $\tilde{X}$ wieder ein Lévy-Prozess und besitzt das charakteristische Tripel $(\sigma^2, \nu, \gamma - r)$. Es gilt

$$\tilde{S}_t := \frac{1}{B_t} S_t = e^{X_t - rt} = e^{\tilde{X}_t}, \quad t \in [0,T].$$

Die Abdiskontierung erfolgt elementar durch die Transformation der Drift von X. Im Folgenden wird, falls nicht explizit anders notwendig, der Fall $r = 0$ betrachtet.

Wir fassen einige Ergebnisse über exponentielle Lévy-Prozesse zusammen. Die Itô-Formel liefert zunächst folgende Darstellung von S zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} S_t &= 1 + \int_0^t S_{u-}\, dX_u + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_{u-}\, du + \sum_{\substack{u\le t\\ \Delta X_u \neq 0}} \left(e^{X_{u-}+\Delta X_u} - e^{X_{u-}} - \Delta X_u e^{X_{u-}} \right) \\ &= 1 + \int_0^t S_{u-}\, dX_u + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_{u-}\, du + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} S_{u-}\,(e^x - 1 - x)\, J_X(\,du,\, dx). \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich $\mathbb{E}(|S_t|) < \infty$, oder äquivalent dazu $\int_{|x|\ge 1} e^x \nu(\,dx) < \infty$, so kann man S_t in eine Summe, bestehend aus einem Martingal

$$1 + \sigma \int_0^t S_{u-}\, dW_u + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} S_{u-}(e^x - 1) \tilde{J}_X(\,du,\, dx)$$

und einem Driftterm

$$\int_0^t S_{u-} \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - h(x))\, \nu(\,dx) \right) ds$$

zerlegen. Aus dieser Darstellung folgt, dass S genau dann ein Martingal ist, wenn der Driftterm verschwindet, d.h.

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - h(x))\,\nu(\,dx) = 0 \text{ gilt.} \tag{1.2.1}$$

Da dieses elementare Ergebnis für uns von großer Bedeutung sein wird, fassen wir es in einem Korollar zusammen.

Korollar 1.1. *Es sei X ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Der Prozess S definiert durch $S = \exp\{X\}$, ist genau dann ein $\mathbb{P}$-Martingal, wenn*

$$\int_{|x|\geq 1} e^x \nu(\,dx) < \infty \quad \textit{und} \quad \gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - h(x))\,\nu(\,dx) = 0$$

gilt.

1.2.1 Das stochastische Exponential

In diesem Abschnitt wird die duale Darstellung eines exponentiellen Lévy-Prozesses $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ vorgestellt. Es stellt sich später heraus, dass sich die Repräsentation von S durch das stochastische Exponential eines anderen Lévy-Prozesses $R = (R_t)_{t\in[0,T]}$ als sehr nützlich erweist.
In dem klassischen Modell von Black und Scholes wird der Preisprozess einer Aktie durch das Exponential einer Brownschen Bewegung modelliert:

$$S_t = S_0 \exp\{W_t^0\}, \quad W_t^0 = \mu t + \sigma W_t,\ t \in [0,T].\ (W_t \text{ - Standard Brownsche Bewegung})$$

Mit Hilfe der Itô-Formel erhält man die folgende stochastische Differenzialgleichung für S:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW_t = dW_t^1, \quad W_t^1 = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t, \quad t \in [0,T],$$

oder

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u\, dW_u^1, \quad t \in [0,T].$$

Ist es möglich in der letzten Gleichung die Brownsche Bewegung W_t^1 durch einen Lévy-Prozess X zu ersetzen, so ist S das sogenannte stochastische Exponential, auch Doleans-Dade-Exponential von X genannt.

Theorem 1.8 ([CT03], Proposition 8.21). *Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Dann existiert ein (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutiger càdlàg-Prozess $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$, so dass*

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_{u-}\, dX_u,$$

gilt. Der Prozess Z wird stochastisches Exponential von X *genannt, in Notation $Z = \mathscr{E}(X)$, und ist gegeben durch*

$$Z_t = \exp\left\{X_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\} \prod_{0<u\le t} (1+\Delta X_u)e^{-\Delta X_u}, \quad t \in [0,T]. \tag{1.2.2}$$

Bemerkung 1.5. Das stochastische Exponential kann auch für Semimartingale definiert werden und ist kein Lévy-Prozess (z.B. da es in 1 startet), aber ein Semimartingal.

Die Abbildung $X \mapsto \mathscr{E}(X)$ kann für Semimartingale invertiert werden:

Lemma 1.1 (Lemma 2.2 [KS02]). *Es sei $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$ ein Semimartingal, so dass Z und Z_- nur Werte in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ annehmen. Dann existiert ein (bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutiges) Semimartingal X mit $X_0 = 0$ und $Z = Z_0\mathscr{E}(X)$. Der Prozess X ist gegeben durch*

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}}\, dZ_s, \quad t \in [0,T].$$

Definition 1.6 ([KS02], Definition 2.3). Der Prozess X aus dem letzten Lemma wird *stochastischer Logarithmus von Z*, in Notation $\mathscr{L}(Z) = X$, genannt.

Der Prozess $\mathscr{L}(Z)$ hat folgende Darstellung (siehe [KS02], Lemma 2.4) für $t \in [0,T]$:

$$\mathscr{L}(Z)_t = \log\left(\left|\frac{Z_t}{Z_0}\right|\right) + \int_0^t \frac{1}{2Z_{u-}^2}\, d\langle Z^c, Z^c\rangle_u - \sum_{0\le u\le t}\left(\log\left(\left|\frac{Z_u}{Z_{u-}}\right|\right) + 1 - \frac{Z_u}{Z_{u-}}\right).$$

Für die Modellierung der Aktienkurse sind folgende zwei Prozesse von Interesse:

Definition 1.7 ([KS02], Definition 2.5).

1. Es sei X ein Lévy-Prozess. Man nennt den Prozess R, definiert durch

   $$R := \mathscr{L}(\exp\{X\}),$$

   die Exponentialtransformierte von X.

2. Umgekehrt nennt man den Prozess X, definiert durch

   $$X := \log(\mathscr{E}(R)),$$

   die Logarithmustransformierte eines Lévy-Prozesses R mit $\Delta R > -1$.

Chan hat in [Cha99] vorgeschlagen, den Aktienkurs S durch das stochastische Exponential eines Lévy-Prozesses R zu modellieren. Allerdings ist $\mathscr{E}(R)$ im Allgemeinen kein positiver Prozess, wie man leicht aus der Darstellung (1.2.2) sieht. Genauer, ist $\mathscr{E}(R)$ genau dann positiv, wenn die Sprünge von R größer als -1 sind, oder äquivalent, $\nu((-\infty,-1])=0$ gilt. Goll und Kallsen zeigen in ihrer Arbeit [GK00], dass die Prozesse X und R aus der Darstellung

$$S_t = \exp\{X_t\} = \mathscr{E}(R)_t, \quad t \in [0,T],$$

eng zusammenhängen. Ist X ein Lévy-Prozess, so ist es auch seine Exponentialtransformierte R. Insbesondere gilt $\Delta R_t > -1$, $t \in [0,T]$, damit ist X die Logarithmustransformierte von X.

Theorem 1.9 ([GK00], Lemma 5.8). *1. Es sei X ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel $(\sigma_X^2, \nu_X, \gamma_X)$. Dann ist die Exponentialtransformierte R von X wieder ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel $(\sigma_R^2, \nu_R, \gamma_R)$, gegeben durch:*

$$\gamma_R = \gamma_X + \frac{\sigma_X^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h(e^x-1) - h(x))\nu_X(\,dx), \tag{1.2.3}$$

$$\sigma_R = \sigma_X, \tag{1.2.4}$$

$$\nu_R(\,dx) = (\nu_X \circ g^{-1})(\,dx). \tag{1.2.5}$$

2. Umgekehrt ist die Logarithmustransformierte X eines Lévy-Prozesses R mit $\Delta R > -1$ und dem charakteristischen Tripel $(\sigma_R^2, \nu_R, \gamma_R)$ wieder ein Lévy-Prozess mit dem Tripel $(\sigma_X^2, \nu_X, \gamma_X)$, wobei

$$\gamma_X = \gamma_R - \frac{\sigma_R^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h(\log(1+x)) - h(x))\nu_R(\,dx), \tag{1.2.6}$$

$$\sigma_X = \sigma_R, \tag{1.2.7}$$

$$\nu_X(\,dx) = (\nu_R \circ g)(\,dx), \tag{1.2.8}$$

gilt. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $g(x) = e^x - 1$.

Für die Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes, das gemäß eines bestimmten Kriteriums optimal ist, erweist sich das nächste Resultat von einer großen Nützlichkeit. Der Prozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$, darstellbar als stochastisches Exponential des Prozesses R, ist genau dann ein (lokales) Martingal, wenn R ein (lokales) Martingal ist. Möchte man zum Beispiel einen gewissen Abstand des objektiven Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ zu der Menge der äquivalenten Martingalmaße minimieren, so ist es unterschiedslos, welche Darstellung von S man betrachtet. Es wird sich zeigen, dass es z.B. für die Bestimmung des Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie, viel bequemer ist, zuerst den Prozess R zu betrachten, die Bedingungen für die Existenz und konkrete Form des Maßes durch das charakteristische Tripel von R auszudrücken und dann mit Hilfe des Theorems 1.9 die Bedingungen für das charakteristische Tripel von X zurück zu übersetzen.

Theorem 1.10. *Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^X, \mathbb{P}, S)$ ein exponentielles Lévy-Modell. Es gilt:*

1. *S besitzt eine Darstellung als stochastisches Exponential eines Lévy-Prozesses R mit $\Delta R_t > -1$ für alle $t \in [0,T]$.*

2. *S ist genau dann ein (lokales) Martingal, wenn R ein (lokales) Martingal ist.*

3. *Ist S (bzw. R) ein lokales Martingal, so ist es ein Martingal.*

Beweis:
Der erste Punkt des Theorems wurde bereits diskutiert. Es sei S ein lokales Martingal. Aus dem Lemma 1.1 erhalten wir die folgende Darstellung von R:

$$R_t = \int_0^t \frac{1}{S_{u-}}\, dS_u.$$

Das Semimartingal S ist ein càd-Prozess, also ist nach Proposition 1.28 aus [JS87] $\tau_n := \inf\{t \in [0,T] \,:\, S_t < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Stoppzeit. Es gilt $\tau_n \uparrow T$, $n \to \infty$, und $\frac{1}{S_{t\wedge\tau_n}}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt. $\frac{1}{S_-}$ ist also ein lokalbeschränkter, vorhersehbarer Prozess und es folgt aus der Eigenschaft 4.34 (b), [JS87], dass das stochastische Integral auch ein lokales Martingal ist.
Es sei nun R ein lokales Martingal. Es gilt

$$S_t = 1 + \int_0^t S_{u-}\, dR_u.$$

Mit gleichen Argumenten ist S auch ein lokales Martingal und der zweite Punkt des Theorems ist gezeigt. Aus der Arbeit [Sid79] folgt, dass der Lévy-Prozess R und der exponentieller Lévy-Prozess $S = e^X$ echte Martingale sind, falls sie lokale Martingale sind. $\square$

1.3 Maßtransformation für Lévy-Prozesse

Die zwei Grundausteine der klassischen Optionsbewertung sind *Arbitragefreiheit* und *risikoneutrale Bewertung*. Wird der (abdiskontierte) Preisprozess eines risikobehafteten Finanzproduktes durch einen stochastischen Prozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ modelliert, so wird in einem arbitragefreien Markt, also einem Markt, der keinen risikolosen Gewinn zulässt, der Preis eines Derivats als abdiskontierte erwartete Auszahlung unter einem bestimmten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß bestimmt. Wir werden sehen, dass diese Begriffe mathematisch durch äquivalente Maßtransformationen, die S zu einem Martingal machen, beschrieben werden.

Es sei $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ ein reellwertiges Semimartingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{F} = \mathbb{F}^S$ die Vervollständigung der von S erzeugten Filtration bezeichnet. Die Familie $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ nennen wir *Finanzmarktmodell*.

Definition 1.8. Eine *(selbstfinanzierende) Strategie* π ist ein Paar (x, H), bestehend aus einer Konstanten $x \in \mathbb{R}$ und einem $(\mathscr{F}_t)$-vorhersehbaren S-integrierbaren Prozess $H = (H_t)_{t\in[0,T]}$ (d.h. das Integral $\int_0^t H_u\, dS_u$ ist wohldefiniert), dessen *Kapitalprozess* $V^\pi = (V_t^\pi)_{t\in[0,T]}$ der Darstellung

$$V_t^\pi = x + \int_0^t H_u\, dS_u, \quad t \in [0,T]. \tag{1.3.1}$$

genügt.

Das stochastische Integral in (1.3.1) kann als Gewinn bzw. Verlust der Strategie π bis zum Zeitpunkt t interpretiert werden. Die Selbstfinanzierungsbedingung bedeutet, dass dem Portfolio nach dem Zeitpunkt $t = 0$ kein Kapital zugefügt oder entzogen wird.

Delbaen und Schachermayer führen in ihrer Arbeit [DS94] das Analogon des Begriffs Arbitragefreiheit in stetiger Zeit ein:

Definition 1.9. Es sei ein Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ gegeben. Eine Folge von Strategien $(\pi_n = (x_n, H_n))_{n\in\mathbb{N}}$ erlaubt eine *Arbitragemöglichkeit mit verschwindendem Risiko*, falls gilt

1. $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
2. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{P}(\forall\, t \in [0,T] \,:\, V_t^{\pi_n} \geq a_n) = 1,$$

3. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$V_T^{\pi_n} \geq -\frac{1}{n} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

4. es existiert eine Konstante $\delta > 0$, so dass

$$\mathbb{P}(V_T^{\pi_n} > \delta) > \delta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wir sagen, dass das Modell die *NFLVR-Bedingung* (no free lunch with vanishing risk condition) erfüllt, falls eine solche Folge $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht existiert.

Im zeitdiskreten Modell ist eine Arbitragemöglichkeit als eine selbstfinanzierende Strategie mit

$$x = 0, \quad V_T^{\pi} \geq 0 \ \mathbb{P}\ \text{-f.s. und} \quad \mathbb{P}(V_T^{\pi} > 0) > 0$$

definiert, und die Abwesenheit von Arbitrage ist gemäß des ersten Fundamentalsatzes der Wertpapierbewertung gleichbedeutend mit der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes für S. Im zeitstetigen Modell genügt jedoch der Ausschluss eines derartigen „free lunch“ nicht, um die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes zu sichern. Stattdessen erhält man eine Version des ersten Fundamentalsatzes, wenn man sowohl Strategien, die einer Arbitragemöglichkeit beliebig nahe kommen (Eigenschaften 1, 3 und 4 der Definition 1.8), als auch Strategien, die nach unten beschränkt sind, also keine beliebig hohe Schulden erlauben (Eigenschaft 2 der Definition 1.8), ausschließt.

Theorem 1.11 (der erste Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung, 1. FTAP). *Das Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ erfüllt genau dann die NFLVR-Bedingung, wenn auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ existiert, unter dem $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ ein σ-Martingal ist.*

Bemerkung 1.6. Man nennt ein Semimartingal $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein *σ-Martingal*, falls ein lokales Martingal M und ein M-integrierbarer Prozess H mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s \, dM_s, \quad t \in [0, T]$$

existieren. Ansel und Stricker [AS94] zeigen, dass ein nach unten beschränktes σ-Martingal ein lokales Martingal ist. Umgekehrt folgt unmittelbar, dass jedes lokale Martingal ein σ-Martingal ist. Folglich ist ein exponentieller Lévy-Prozess genau dann ein σ-Martingal unter $\mathbb{Q}$, wenn er ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist (Theorem 1.10).

Definition 1.10. Das Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ heißt *vollständig*, falls für jede beschränkte $\mathscr{F}$-messbare Funktion f eine selbstfinanzierende Strategie $\pi = (x, H)$ existiert, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Es existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$\mathbb{P}(\forall\, t \in [0,T] \,:\, a \leq V_t^\pi \leq b) = 1.$$

2. $f(S_T) = V_T^\pi \quad \mathbb{P}$-f.s.

Gleichung 2. besagt, dass die Auszahlung des Derivats $f(S_T)$ zum Zeitpunkt $T > 0$ als Endwert einer selbstfinanzierenden Strategie dargestellt werden kann. In vollständigen Finanzmarktmodellen besitzt jedes Auszahlungsprofil eine replizierende Strategie.

Theorem 1.12 (der zweite Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung, 2. FTAP). *Das Finanzmarktmodell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ erfülle die NFLVR-Bedingung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Das Modell ist vollständig.*

2. *Das zu $\mathbb{P}$ äquivalente σ-Martingalmaß für S ist eindeutig.*

Für die Beweise dieser Theoreme und eine ausführliche Diskussion wird auf Delbaen und Schachermayer [DS98] verwiesen.

Im Folgenden werden hinreichende und notwendige Bedingungen für die Arbitragefreiheit und die Vollständigkeit im exponentiellen Lévy-Modell präsentiert. Wir werden hierbei sehen, dass dieses Modell in den meisten Fällen zwar arbitragefrei, jedoch nicht vollständig ist. Es sei nun $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ ein exponentielles Lévy-Modell, wobei der triviale Fall $X \equiv 0$ ausgeschlossen wird. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ sei die Vervollständigung der von X erzeugten Filtration. Folgende Resultate und die dazugehörigen Beweise kann man unter anderem in [CS02] finden.

Theorem 1.13 (1. FTAP für das exponentielle Lévy-Modell).

1. *Das exponentielle Lévy-Modell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ erfüllt genau dann die NFLVR-Bedingung nicht, wenn*

   (a) S wachsend oder

   (b) S fallend ist.

2. *Ist S weder fallend noch wachsend, so existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$, so dass gilt:*

(a) X ist ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{Q}$,

(b) X ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

Theorem 1.14 (2. FTAP für das exponentielle Lévy-Modell). *Das exponentielle Lévy-Modell $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ genüge der NFLVR-Bedingung. Dann ist das Modell genau dann vollständig, wenn der Prozess $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ eine der folgenden Darstellungen besitzt:*

1. *$X_t = \mu t + \sigma B_t$, $t \in [0, T]$, wobei $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist und $\sigma \neq 0$ gilt.*

2. *$X_t = \mu t + \sigma N_t$, $t \in [0, T]$, wobei $N = (N_t)_{t \in [0,T]}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ ist und $\mu\sigma < 0$ gilt.*

Modelliert man den Preis eines Wertpapiers durch einen exponentiellen Lévy-Prozess und setzt Arbitragefreiheit voraus, so ist die Menge der lokal äquivalenten Martingalmaße im Allgemeinen unendlich, auch wenn man nur „strukturtreue" Maßwechsel, d.h. Maßwechsel, bei denen man in der Klasse der Lévy-Prozesse bleibt, durchführt. Sind $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ zwei äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$, so besitzt ein $\mathbb{P}$-Lévy-Prozess X unter $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen weder unabhängige noch stationäre Zuwächse. Aus diesem Grund sind die Maßtransformationen, bei denen die Lévy-Eigenschaft erhalten bleibt, von großem Interesse. Wir nennen solche Maßwechsel *Lévy-strukturtreue Maßwechsel*. Das Theorem von Girsanov liefert eine vollständige Charakterisierung solcher Transformationen.

Theorem 1.15 ([CT03], Proposition 9.8). *Es seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$ und X ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ mit den charakteristischen Tripeln (σ^2, ν, γ) bzw. $((\sigma^*)^2, \nu^*, \gamma^*)$. Weiterhin sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ die Vervollständigung der von X erzeugten Filtration, und es gelte $\mathscr{F} = \mathscr{F}_T$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *$\mathbb{P}^*|_{\mathscr{F}_t}$ und $\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$ sind äquivalent für ein $t \in (0, T]$ (und damit für alle $t \in [0, T]$).*

2. *Die charakteristischen Tripel erfüllen*

$$\sigma = \sigma^*,$$
$$\nu \sim \nu^*,$$

wobei die Funktion $y(x)$, definiert durch $\frac{d\nu^*}{d\nu} = y(x)$, folgender Bedingung genügt:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (\sqrt{y(x)} - 1)^2 \nu(\,dx) < \infty. \tag{1.3.2}$$

Im Fall $\sigma = 0$ muss außerdem

$$\gamma^* - \gamma = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} h(x)(\nu^* - \nu)(\,dx)$$

gelten.

Es seien die äquivalenten Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dann ist

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = e^{U_T} \quad \mathbb{P}\text{-}f.s.$$

für einen Lévy-Prozess $U = (U_t)_{t\in[0,T]}$ *mit folgender Darstellung für* $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} U_t &= \eta W_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t + \int_{(0,t]}\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\log y(x) - y(x) + 1) J_X(\,du,\,dx) \\ &\quad + \int_{(0,t]}\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x)-1)\tilde{J}_X(\,du,\,dx) \\ &= \eta W_t - \frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 t + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left(\sum_{\substack{0<s\leq t \\ |\Delta X_s|>\epsilon}} \log y(\Delta X_s) - t\int_{|x|>\epsilon} (y(x)-1)\nu(\,dx) \right). \end{aligned}$$

Gilt $\sigma^2 = 0$, *so ist* $\eta = 0$. *Im Fall* $\sigma^2 > 0$ *ist* $\eta \in \mathbb{R}$ *so gewählt, dass*

$$\gamma^* - \gamma - \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(\nu^* - \nu)(\,dx) = \sigma^2\eta$$

erfüllt ist. Das charakteristische Tripel $(\sigma_U^2, \nu_U, \gamma_U)$ *von* U *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \sigma_U^2 &= \eta^2\sigma^2, \\ \nu_U &= \nu \circ (\log y)^{-1}, \\ \gamma_U &= -\frac{1}{2}\eta^2\sigma^2 - \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - h(x))(\nu\circ(\log y)^{-1})(\,dx). \end{aligned}$$

Definition 1.11. Das Paar $(\eta, y(x))_X$ aus dem letzten Theorem bezeichnen wir als *Girsanov-Parameter* der Maßtransformation.

Bemerkung 1.7. Die Radon-Nikodým-Dichte von $\mathbb{P}^*$ bezüglich $\mathbb{P}$ ist auch als stochastisches Exponential eines anderen Lévy-Prozesses $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ darstellbar:

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = \mathscr{E}(N)_T,$$

wobei N für $t \in [0,T]$ die folgende Darstellung besitzt:

$$N_t = \eta\sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x)-1)\tilde{J}_X(\,du,\,dx).$$

Beweis:
Der Prozess N ist die Exponentialtransformierte von U und wir erhalten somit aus [KS02],

Lemma 2.6:

$$
\begin{aligned}
N_t &= U_t + \frac{1}{2}\sigma_U^2 t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - x) J_U(\,du,\,dx) \\
&= \sigma\eta W_t + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\log y(x) - y(x) + 1) J_X(\,du,\,dx) \\
&+ \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x) - 1) \tilde{J}_X(\,du,\,dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - x) J_U(\,du,\,dx) \\
&= \sigma\eta W_t + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (\log y(x) - y(x) + 1) J_X(\,du,\,dx) \\
&+ \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x) - 1) \tilde{J}_X(\,du,\,dx) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x) - 1 - \log y(x)) J_X(\,du,\,dx) \\
&= \sigma\eta W_t + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x) - 1) \tilde{J}_X(\,du,\,dx), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

□

Wir werden später von der folgenden Modifikation des Theorems von Girsanov, die auch absolutstetige Lévy-strukturtreue Maßwechsel einschließt, Gebrauch machen:

Korollar 1.2. *Es seien $T > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ und y eine Funktion $y : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, die der Integrabilitätsbedingung 1.3.2 genügt. Dann ist der Prozess $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$, gegeben durch*

$$
N_t = \eta\sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x) - 1) \tilde{J}_X(\,du,\,dx), \quad t \in [0,T],
$$

wohldefiniert. Durch

$$
\frac{d\,\mathbb{P}^*}{dP} = \mathscr{E}(N)_T
$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$ definiert. X ist ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}^*$ mit dem charakteristischen Tripel $((\sigma^*)^2, \nu^*, \gamma^*)$, gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\sigma^* &= \sigma, \\
\nu^*(\,dx) &= y(x)\nu(\,dx), \\
\gamma^* &= \gamma + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(\nu^* - \nu)(\,dx) + \sigma^2\eta.
\end{aligned}
$$

Beweis:

Genügt y der Integrabilitätsbedingung 1.3.2, so folgt aus [JS87], Theorem II.1.33d), dass $(y(x) - 1)$ bezüglich $\tilde{J}_X$ integrierbar und damit der Prozess $N = (N_t)_{t\in[0,T]}$ wohldefiniert ist. Der Beweis folgt also aus [KS97], Theorem A.10.2. □

Gemäß Bemerkung 33.3 aus [Sat99] gilt, dass (1.3.2) zu den folgenden drei Bedingungen äquivalent ist:

$$\int_{\{x\,:\,|\log y(x)|\leq 1\}} (\log y(x))^2\,\nu(\,dx) < \infty, \tag{1.3.3}$$

$$\int_{\{x\,:\,\log y(x)<-1\}} \nu(\,dx) < \infty, \tag{1.3.4}$$

$$\int_{\{x\,:\,\log y(x)>1\}} y(x)\nu(\,dx) < \infty. \tag{1.3.5}$$

Es wird sich zeigen, dass für unsere Zielsetzungen die Girsanov-Transformation mit den Girsanov-Parametern $(\eta, y(x))_X = (\vartheta, e^{\vartheta x})$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, von großer Bedeutung ist. Für die Funktion $y(x) = e^{\vartheta x}$ sind die ersten zwei Bedingungen automatisch erfüllt, denn es gilt

$$\int_{\{x\,:\,\log y(x)<-1\}} \nu(\,dx) = \int_{\{\vartheta x<-1\}} \nu(\,dx) \leq \int_{\{|x|>\frac{1}{|\vartheta|}\}} \nu(\,dx) < \infty \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned}\int_{\{x\,:\,|\log y(x)|\leq 1\}} (\log y(x))^2\,\nu(\,dx) &= \vartheta^2 \int_{\{|\vartheta x|\leq 1\}} x^2\nu(\,dx)\\ &\leq \vartheta^2 \int_{\{|x|\leq 1\}} x^2\nu(\,dx) + \int_{\{|x|>1\}} \nu(\,dx) < \infty.\end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der Mengeninklusion

$$\{x\,:\,|\vartheta x|\leq 1\} \subseteq \{|x|\leq 1\} \cup \underbrace{\{|x|>1, |\vartheta x|\leq 1\}}_{\vartheta^2 x^2\leq 1} \subseteq \{|x|\leq 1\} \cup \{|x|>1\}.$$

Außerdem ist

$$\int_{\{x\,:\,\log y(x)>1\}} y(x)\nu(\,dx) < \infty \iff \int_{\{\vartheta x>1\}} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty \iff \int_{\{|x|>1\}} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty.$$

Wir fassen diese Erkenntnisse in einem Korollar zusammen.

Korollar 1.3. *Es seien $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definiert durch*

$$y(x) = e^{\vartheta x},\ \vartheta \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

und ν ein Lévy-Maß. Es gilt genau dann

$$\int_{\mathbb{R}} (\sqrt{y(x)} - 1)^2\nu(\,dx) < \infty,$$

wenn

$$\int_{\{|x|>1\}} y(x)\nu(\,dx) < \infty \quad \textit{erfüllt ist.}$$

Im Folgenden übernehmen wir die Notation aus [ES05] und definieren für einen Lévy-Prozess X folgende Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathscr{F})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_a(X) &:= \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid X \text{ ist ein lokales Martingal unter } \mathbb{Q}\},\\
\mathscr{Q}_e(X) &:= \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid X \text{ ist ein lokales Martingal unter } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathscr{Q}_a(X),\\
\mathscr{Q}_f(X) &:= \{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X) \mid I_t(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) < \infty \; \forall\, t \in [0,T]\},\\
\mathscr{Q}_l(X) &:= \{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X) \mid X \text{ ist ein Lévy-Prozess unter } \mathbb{Q}\}.
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\mathscr{Q}_f(X)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathscr{Q}_a(X)$, deren Entropieprozess für jedes $t \in [0,T]$ endlich ist.

Definition 1.12. Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ definiert man den *Prozess der relativen Entropie* von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$I_t(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\log\left(\frac{d\mathbb{Q}\,|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t}}\right)\right) \in [0,\infty], \quad t \in [0,T].$$

Einen kurzen Überblick über die relative Entropie und ihre Eigenschaften findet der Leser im Appendix A.

2. ESSCHER-MARTINGALMASS UND DAS MARTINGALMASS MIT DER MINIMALEN ENTROPIE

2.1 Exponentialfamilien

In diesem Abschnitt werden die sogenannten Exponentialfamilien vorgestellt und einige nützliche Eigenschaften, vor allem in Bezug auf Lévy-Prozesse, diskutiert. Eine ausführliche Darstellung der Ergebnisse findet man zum Beispiel in Küchler und Sørensen [KS97]. Für unsere Zielsetzung spielen die Exponentialfamilien eine zentrale Rolle, da über sie der Zusammenhang zwischen der Esscher-Maßtransformation und dem Maß mit der minimalen relativen Entropie hergestellt wird.

Es seien $(\Omega, \mathscr{F})$ ein messbarer Raum, μ ein σ-finites Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ und X ein zufälliger Vektor auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Werten in $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mu) := \{\vartheta \in \mathbb{R}^k \ : \ \int_\Omega e^{\langle \vartheta, X\rangle}\, d\mu < \infty\}$$

und setzen voraus, dass $\Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mu)$ einen nichtleeren offenen Kern enthält: $\mathring{\Theta}_{\mathrm{EXP}}(X, \mu) \neq \emptyset$. Dann ist für jedes $\vartheta \in \Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mu)$ durch

$$U^\vartheta := \frac{d\,\mathbb{P}^\vartheta}{d\mu} = \exp\{-\varphi(\vartheta) + \langle \vartheta, X\rangle\} \quad \text{mit} \quad \varphi(\vartheta) = \log \int_\Omega e^{\langle \vartheta, X\rangle}\, d\mu,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\vartheta$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ definiert.

Definition 2.1. Die Menge $\mathscr{P}_X := \left\{\mathbb{P}^\vartheta \ : \ \vartheta \in \Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mu)\right\}$ nennt man eine *Exponentialfamilie* von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathscr{F})$, erzeugt von X und μ.

Dann gilt (siehe [DCD86], Seiten 126-128):

Theorem 2.1.

1. *$\Theta_{EXP}(X, \mathbb{P})$ ist eine konvexe Menge,*
2. *Die Funktion φ, definiert durch $\varphi(\vartheta) = \log \int_\Omega e^{\langle \vartheta, X\rangle}\, d\mu$, $\vartheta \in \Theta_{EXP}(X, \mathbb{P})$, ist konvex,*

3. φ *ist auf* $\mathring{\Theta}_{EXP}(X,\mu)$ *unendlich oft differenzierbar und es gilt für alle* $i_j \geq 0$, $j = 1, \dots, k$,

$$\int_\Omega |X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_k^{i_k}| e^{\langle \vartheta, X\rangle}\, d\mu < \infty,$$
$$\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k}}{\partial\vartheta_1^{i_1}\cdots\partial\vartheta_k^{i_k}} e^{\varphi(\vartheta)} = \int_\Omega X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_k^{i_k} e^{\langle \vartheta, X\rangle}\, d\mu.$$

Insbesondere ist

$$grad\,\varphi(\vartheta) = \mathbb{E}^\vartheta(X),$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta_i\partial\vartheta_j}(\vartheta) = cov^\vartheta(X_i, X_j), \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

4. *Für alle* $\vartheta, \vartheta' \in \Theta_{EXP}(X, \mathbb{P})$ *gilt weiterhin* $\mathbb{P}^\vartheta \sim \mathbb{P}^{\vartheta'}$ *mit*

$$\frac{d\,\mathbb{P}^\vartheta}{d\,\mathbb{P}^{\vartheta'}} = \exp\{\langle \vartheta - \vartheta', X\rangle\}.$$

Analog kann man auch die Exponentialfamilie eines Lévy-Prozesses $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ einführen, indem man $\mathbb{P}^\vartheta$ folgendermaßen definiert:

$$\frac{d\,\mathbb{P}^\vartheta}{d\,\mathbb{P}} := U_T^\vartheta := \exp\{\vartheta X_T - T\varphi(\vartheta)\}, \ \ \vartheta \in \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P}) := \{\vartheta \in \mathbb{R} \,:\, \int_{\{|x|>1\}} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty\}.$$

Hierbei ist φ die kumulantenerzeugende Funktion von X_1 und besitzt die Darstellung

$$\varphi(\vartheta) = \gamma\vartheta + \frac{1}{2}\vartheta^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta h(x)\right) \nu(\,dx), \quad \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P}).$$

Das Theorem 1.5 besagt, dass der Prozess X genau dann das exponentielle Moment zum Parameter ϑ besitzt, wenn das Integral $\int_{\{|x|>1\}} e^{\vartheta x}\nu(\,dx)$ endlich ist. Die Menge $\Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$ ist außerdem unabhängig von t.

Theorem 2.2. *Es seien* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel* (σ^2, ν, γ). $\mathbb{F} = \mathbb{F}^X$ *bezeichne die Vervollständigung der von* X *erzeugten Filtration und es gelte* $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$. *Weiterhin sei*

$$\Theta_{EXP}(X, \mathbb{P}) := \{\vartheta \in \mathbb{R} \,:\, \int_{|x|>1} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty\}.$$

Es gilt $\Theta_{EXP}(X, \mathbb{P}) \neq \emptyset$, *und man kann für* $\vartheta \in \Theta_{EXP}(X, \mathbb{P})$ *den Prozess* $U = (U_t^\vartheta)_{t\in[0,T]}$ *mit*

$$U_t^\vartheta = \exp\{\vartheta X_t - t\varphi(\vartheta)\}, t \in [0, T],$$

definieren. Weiterhin gilt:

1. *U^ϑ ist ein positives Martingal und durch $d\,\mathbb{P}^\vartheta = U_T\,d\,\mathbb{P}$ wird auf $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\vartheta \sim \mathbb{P}$ definiert.*

2. *X ist ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}^\vartheta$ mit dem charakteristischen Tripel $((\sigma^\vartheta)^2, \nu^\vartheta, \gamma^\vartheta)$, gegeben durch:*

$$\gamma^\vartheta = \gamma + \sigma^2\vartheta + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(e^{\vartheta x} - 1)\nu(\,dx), \tag{2.1.1}$$

$$\sigma^\vartheta = \sigma, \tag{2.1.2}$$

$$\nu^\vartheta(\,dx) = e^{\vartheta x}\nu(\,dx). \tag{2.1.3}$$

3. *Gilt $\vartheta \in \mathring{\Theta}_{EXP}(X, \mathbb{P})$, so ist*

$$\mathbb{E}^\vartheta(X_t) = \varphi'(\vartheta)t, \quad var^\vartheta(X_t) = \varphi''(\vartheta)t.$$

4. *Für den Prozess der relativen Entropie gilt*

$$I_t(\mathbb{P}^\vartheta \mid \mathbb{P}) = t\left(\frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(e^{\vartheta x}\vartheta x + 1 - e^{\vartheta x}\right)\nu(\,dx)\right).$$

5. *Existiert ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit*

$$\vartheta^* \in \Theta^1_{EXP}(X, \mathbb{P}) := \{\vartheta \in \mathbb{R} \,:\, \int_{\{|x|>1\}} |x|e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty\} \subseteq \Theta_{EXP}(X, \mathbb{P}) \tag{MEMM1}$$

$$\textit{und } \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(xe^{\vartheta^* x} - h(x))\nu(\,dx) = 0, \tag{MEMM2}$$

so ist $\{P^{\vartheta^*}\} = \mathscr{Q}_e(X) \cap \mathscr{P}_X$.

6. *Existiert ein $\vartheta^\dagger \in \mathbb{R}$ mit*

$$\vartheta^\dagger, \vartheta^\dagger + 1 \in \Theta_{EXP}(X, \mathbb{P}) \quad \textit{und} \tag{ESMM1}$$

$$\varphi(\vartheta^\dagger + 1) - \varphi(\vartheta^\dagger) = \gamma + \sigma^2\left(\vartheta^\dagger + \frac{1}{2}\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(e^{\vartheta^\dagger x}(e^x - 1) - h(x)\right)\nu(\,dx) = 0, \tag{ESMM2}$$

so ist $\{\mathbb{P}^\dagger\} = \mathscr{Q}_e(e^X) \cap \mathscr{P}_X$.

Beweis: Der Beweis dieses Theorems ist im Appendix B zu finden.

Es sei R die Exponentialtransformierte von X, $R = \mathscr{L}(e^X)$. Betrachtet man die duale Darstellung des exponentiellen Lévy-Prozesses $S = e^X$ durch das stochastische Exponential,

$S = \mathscr{E}(R)$, so gilt nach Theorem 2.2 für das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\vartheta^*} \in \mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{P}_R$ (falls existent) auch $\mathbb{P}^{\vartheta^*} \in \mathscr{Q}_e(S)$.
Also liefern die Punkte 5. und 6. des Theorems 2.2 zwei Kandidaten für die risikoneutrale Bewertung der Derivate: Wir werden sehen, dass $\mathbb{P}^{\vartheta^*}$ unter allen absolutstetigen Martingalmaßen die kleinste relative Entropie bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt und $\mathbb{P}^{\vartheta^\dagger}$ das sogenannte Esscher-Martingalmaß ist. In den folgenden Abschnitten werden wir im Einzelnen die Eigenschaften dieser Maßtransformationen untersuchen.

Bemerkung 2.1. Die Bedingung $\vartheta^\dagger, \vartheta^\dagger + 1 \in \Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mathbb{P})$ ist zu den folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

$$\int_{\{x>1\}} e^{(\vartheta^\dagger+1)x} \nu(\,dx) < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\{x<-1\}} e^{\vartheta^\dagger x} \nu(\,dx) < \infty. \tag{2.1.4}$$

2.2 Esscher-Maßtransformation in der Finanzmathematik

Der letzte Punkt des Theorems 2.2 liefert einen Kandidaten für die risikoneutrale Optionsbewertung, denn $\mathbb{P}^{\vartheta^*}$ ist ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, das den Preisprozess $S = e^X$ zum Martingal macht.

Definition 2.2. Existiert ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\vartheta^*, \vartheta^* + 1 \in \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$, das die Gleichung (ESMM2) erfüllt, so nennt man das (eindeutige) Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\vartheta^*} \in \mathscr{P}_X \cap \mathscr{Q}_e(e^X)$ das *Esscher-Martingalmaß*, kurz: ESMM oder $\mathbb{P}^{\text{ESMM}}$ (Esscher martingale measure).

Appendix A gibt einen kurzen Überblick über die Rolle der Esscher-Transformation in der Versicherungsmathematik. Der Zusammenhang zwischen Prämienkalkulation in der Versicherungsmathematik und risikoneutraler Bewertung in der Finanzmathematik via Esscher-Maßtransformation wurde von Gerber und Shiu in [GS94] zum ersten Mal hergestellt. Sie betrachteten einen exponentiellen Lévy-Prozess und schlugen das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\text{ESMM}}$, gemäß des Theorems 2.2 und Definition 2.2, zur Preisbestimmung der Finanzderivate vor. Es stellte sich aber schnell die Frage, warum man aus der Familie $\mathscr{Q}_a(X)$ ausgerechnet das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\text{ESMM}}$ zur risikoneutralen Bewertung verwenden soll. In einer späteren Diskussion lieferten die Autoren eine Begründung für die Wahl dieses Martingalmaßes.

2.2.1 Esscher-Maßtransformation und Nutzentheorie

Man betrachte eine Wirtschaft, lediglich bestehend aus einem risikofreien Bond B, Finanzprodukt S und Derivaten von S. Ein repräsentativer Investor besitzt m Einheiten von S und trifft seine Kaufentscheidungen gemäß einer Potenz-Nutzenfunktion u, gegeben durch:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^{\vartheta+1}}{1+\vartheta} & \text{für } \vartheta \neq -1, \\ \ln x & \text{für } \vartheta = -1. \end{cases}$$

Für ein beliebiges $\vartheta < 0$ ist u eine auf $\mathbb{R}_+$ stetige, strikt konkave, monoton wachsende Funktion.

Betrachtet man eine Option, die zur Zeit $t \in [0, T]$, den Betrag π_t auszahlt, so kann der Gleichgewichtspreis V_0 zur Zeit $t = 0$ als Preis, bei dem es für den Investor am günstigsten ist, Einheiten des Derivats weder zu kaufen noch zu verkaufen, angesehen werden. Mathematisch bedeutet es, dass die Funktion

$$\Phi(\eta) = \mathbb{E}\left(u\left(mS_t + \eta\left(\pi_t - e^{rt}V_0\right)\right)\right)$$

für $\eta = 0$ ihr Maximum erreicht. Man erhält

$$V_0 = e^{-rt}\frac{\mathbb{E}\left(\pi_t S_t^{\vartheta}\right)}{\mathbb{E}\left(S_t^{\vartheta}\right)},$$

indem man $\Phi'(\vartheta) = 0$ setzt. Dies muss für Derivate mit beliebigen Auszahlungen π_t gelten, also auch für $\pi_t = S_t,\ t \in [0, T]$. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, erhält man

$$e^{rt} = \frac{\mathbb{E}\left(S_t^{\vartheta+1}\right)}{\mathbb{E}\left(S_t^{\vartheta}\right)} = \frac{\mathbb{E}\left(e^{X_1(\vartheta+1)t}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{X_1\vartheta t}\right)}$$

oder

$$r = \varphi(\vartheta + 1) - \varphi(\vartheta).$$

Dies entspricht genau der Bedingung (ESMM2) für den Fall eines Zinssatzes $r \neq 0$. Damit stimmt der optimale Preis bei einer solchen Wahl der Nutzenfunktion mit dem Preis unter dem Esscher-Martingalmaß überein.

2.3 Das Martingalmaß mit der minimalen Entropie

Es sei R ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ) bezüglich einer Abschneidefunktion h. In diesem Kapitel geben wir die vollständige Charakterisierung des Wahrscheinlichkeitsmaßes mit der minimalen relativen Entropie, d.h. des zum objektiven Maß $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaßes für R, das den Prozess der relativen Entropie bezüglich $\mathbb{P}$ unter allen $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)$ und für alle $t \in [0, T]$ minimiert.

Definition 2.3. Existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_a(R)$ mit

$$I_t(\mathbb{P}^* \,|\, \mathbb{P}) \leq I_t(\mathbb{Q}| \,\mathbb{P}), \quad \forall\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a, \, \forall\, t \in [0, T],$$

so nennt man $\mathbb{P}^*$ das *zu $\mathbb{P}$ äquivalente Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie*, kurz: MEMM (minimal entropy martingale measure) oder $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$.

Im Folgenden schließen wir den trivialen Fall $R \equiv 0$ aus und nehmen an, dass die Pfade des Prozesses R weder monoton fallend, noch monoton wachsend sind, $\mathbb{P}$-f.s.

Annahme A: $R \not\equiv 0$, die Pfade von R sind $\mathbb{P}$-f.s. nicht monoton.

Bemerkung 2.2. Wir werden sehen, dass die Annahme A die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in der Menge $\mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$ impliziert. Frittelli zeigt in [Fri00], Theorem 2.2, dass unter diesen Voraussetzungen $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$ zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist, falls es existiert. Andererseits folgt aus [ES05], Theorem A, dass R ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$ ist. Damit ist R ein echtes $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$-Martingal. Also ist die Bezeichnung „äquivalentes Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie“ gerechtfertigt.

Bemerkung 2.3. Modelliert man den Preisprozess $S = (S_t)_{t \in [0,T]}$ einer Aktie durch einen exponentiellen Lévy-Prozess, $S = e^X$, so sind die Trajektorien von S genau dann wachsend (bzw. fallend), wenn die Trajektorien von X wachsend (bzw. fallend) sind, d.h. X (bzw. $-X$) ein Subordinator (Proposition 1.6) ist. Aus der Darstellung der charakteristischen Tripel von X und seiner Exponentialtransformierten R (Theorem 1.9) erkennt man, dass X genau dann ein Subordinator ist, wenn R ein Subordinator ist. Es ist also unterschiedslos, ob man die Annahme A für den Prozess R oder den Prozess S fordert. Aus Theorem 1.13 wissen wir dann, dass dies äquivalent zur Arbitragefreiheit im Sinne der NFLVR-Bedingung ist. In einem arbitragefreien Markt kann daher die Annahme A an die Pfade des Prozesses R ohne Einschränkung der Allgemeinheit getroffen werden.

Esche und Schweizer formulieren in ihrer Arbeit [ES05] folgende Ergebnisse. Sie zeigen, dass unter dem MEMM, falls es existiert, R wieder ein Lévy-Prozess ist und formulieren hinreichende Bedingungen für die Existenz des MEMM. Weiterhin beweisen sie, dass das MEMM dann mit dem ESMM übereinstimmt.

Wir präsentieren die Umkehrung einiger Ergebnisse aus [ES05], die uns eine vollständige Charakterisierung des Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie durch die Esscher-Maßtransformation im Fall eines Lévy-Prozesses, der die Annahme A erfüllt, ermöglicht. Ferner berechnen wir auch das Infimum des Prozesses der relativen Entropie auf der Menge $\mathscr{Q}_a(R)$ unabhängig von der Existenz des MEMM und zeigen, dass dieses mit dem negativen Wert des Infimums der kumulantenerzeugenden Funktion des Prozesses R übereinstimmt.
Weiterhin zeigen wir, dass die Bedingungen (MEMM1) und (MEMM2) aus dem Theorem 2.2 sowohl hinreichend als auch notwendig für die Existenz eines Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie sind. Anschließend übertragen wir diese Ergebnisse auf den Fall eines exponentiellen Lévy-Prozesses.
In [HS06] untersuchen Hubalek und Sgarra die Existenz und die Nichtexistenz des MEMM für einen exponentiellen Lévy-Prozess. Die Autoren verwenden in ihren Beweisen Argumente, die explizit die Eigenschaften eines exponentiellen Lévy-Modells benutzen. Auch sind einige Schritte des Beweises ihres Hauptergebnisses nicht vollständig klar. Im nächsten Kapitel gehen wir darauf näher ein und präsentieren einen ausführlichen Vergleich beider Ansätze.

Definition 2.4. Es sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein filtrierter messbarer Raum. Es bezeichne $\mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F})$.

Theorem 2.3 ([CM03], Theorem 2.2.). *Es seien Y eine reellwertige Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $0 \in supp\,(\mathbb{P} \circ Y^{-1})$ und*

$$\mathscr{E} = \{\mathbb{Q} \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}) \,:\, \mathbb{Q} \ll \mathbb{P},\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(|Y|) < \infty,\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Y) = 0\}.$$

Es gilt

1. $\inf\{I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{E}\} = -\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$,
2. *existiert ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ und $\kappa(\vartheta^*) = 0$, dann wird das Infimum von $I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P})$ auf $\mathscr{E}$ für ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^* \in \mathscr{E}$ angenommen und es gilt*

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = const\, e^{\vartheta^* Y}.$$

Ansonsten wird das Infimum von $I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P})$ auf $\mathscr{E}$ nicht angenommen.

Dabei bezeichne φ die kumulantenerzeugende Funktion von Y und die Funktion κ ist durch

$$\kappa(\vartheta) := \frac{\mathbb{E}(Y e^{\vartheta Y})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta Y})} \quad \text{für } \vartheta \in \left\{\zeta \in \mathbb{R} \,:\, \mathbb{E}(|Y|e^{\zeta Y}) < \infty,\, \mathbb{E}(e^{\zeta Y}) < \infty\right\}$$

definiert.

Zuerst präsentieren wir die Hauptresultate aus [ES05], übersetzt für den Fall eines reellwertigen Lévy-Prozesses R.

Theorem 2.4 ([ES05], Theorem A). *Es sei R ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Ferner gelte $\mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R) \neq \emptyset$. Existiert ein $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_a(R)$ mit*

$$I_t(\mathbb{P}^* \,|\, \mathbb{P}) \leq I_t(\mathbb{Q}|\, \mathbb{P}), \quad \forall\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R),\, \forall\, t \in [0,T], \tag{2.3.1}$$

so ist R ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}^*$.

Theorem 2.5 ([ES05], Theorem B). *Es sei R ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Existiert ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |xe^{\vartheta^* x} - h(x)|\nu(\,dx) < \infty, \tag{ES1}$$

$$\gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(xe^{\vartheta^* x} - h(x)\right) \nu(\,dx) = 0, \tag{ES2}$$

so existiert das MEMM und stimmt mit dem ESMM überein.

Auf der Menge

$$\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) := \{\vartheta \in \mathbb{R} \,:\, \int_{\{|x|>1\}} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty\}$$

ist die kumulantenerzeugende Funktion von R_1 gegeben durch

$$\varphi(\vartheta) = \ln \mathbb{E}(e^{\vartheta R_1}) = \gamma\vartheta + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta h(x))\nu(\,dx) < \infty.$$

Aus Notationsgründen definieren wir die Funktion φ auf ganz $\mathbb{R}$, indem wir den Wertebereich auf $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ erweitern.
Auf der Menge

$$\Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) := \{\vartheta \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) \,:\, \int_{\{|x|>1\}} |x|e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty\}$$

betrachten wir folgende Funktion $\kappa \,:\, \Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$,

$$\kappa(\vartheta) := \frac{\mathbb{E}(R_1 e^{\vartheta R_1})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta R_1})}.$$

Das folgende Lemma fasst einige Eigenschaften der kumulantenerzeugenden Funktion φ zusammen und stellt einen Zusammenhang zwischen den Funktionen φ und κ dar.

Lemma 2.1. *Es sei R ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.*

1. *$\Theta_{EXP}(R, \mathbb{P})$ ist ein nichtleeres Intervall.*

2. *Es sei $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}_{EXP}(R, \mathbb{P})$ beliebig gewählt. Dann ist $\vartheta_0 \in \Theta^1_{EXP}(R, \mathbb{P})$ und es gilt $\varphi'(\vartheta_0) = \kappa(\vartheta_0)$.*

Erfüllt der Prozess R zusätzlich die Annahme A, so gilt

3. *φ ist eine auf $\Theta_{EXP}(R, \mathbb{P})$ strikt konvexe Funktion mit $\varphi(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$,*

4. *es existiert ein eindeutiges $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$.*

Beweis: Der Beweis dieses Lemmas ist im Appendix B zu finden.

Das erste Hauptresultat besagt, dass das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(R)$ gleich dem negativen Wert des Infimums der kumulantenerzeugenden Funktion von R_1 ist. Existiert ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$, das die Bedingungen (ES1) und (ES2) erfüllt, so existiert das MEMM. Dieses Ergebnis ist eine einfache Konsequenz aus der Darstellung des Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie durch die Esscher-Martingaltransformierte. Neu im Vergleich zu den uns bisher bekannten Ergebnissen ist, dass wir eine Darstellung des Infimums der relativen Entropie unabhängig von den Bedingungen (ES1) und (ES2) und sogar unabhängig von der Existenz des MEMM gewinnen.

Theorem 2.6. *Es gilt*

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)\} = -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Beweis: Der Beweis dieses Theorems ist im Appendix B zu finden.

Das zweite Hauptergebnis charakterisiert die Existenz des MEMM vollständig: Erfüllt $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$ die Bedingung $\kappa(\vartheta^*) = 0$, so existiert das MEMM und stimmt mit dem ESMM überein. Anderenfalls wird das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(R)$ nicht angenommen. Wir werden anschließend zeigen, dass die Bedingung $\kappa(\vartheta^*) = 0$ zu den beiden Anforderungen (ES1) und (ES2) äquivalent ist. Esche und Schweizer zeigen im [ES05], Theorem B, dass (ES1) und (ES2) hinreichend für die Existenz des MEMM sind. Ähnliche Ergebnisse wie in [ES05] für den Fall eines exponentiellen Lévy-Prozesses sind auch in [Miy99] und [FM03] zu finden. Wir komplettieren dieses Theorem, indem wir zeigen, dass im Fall eines Prozesses R, der die Annahme A erfüllt, die Voraussetzungen (ES1) und (ES2) auch notwendig für die Existenz des Martingalmaßes mit der minimalen relativen Entropie sind. Damit erhalten wir die folgende vollständige Charakterisierung des MEMM durch die Esscher-Martingaltransformierte.

Theorem 2.7. *Es sei* $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ *mit* $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$. *Gilt* $\kappa(\vartheta^*) = 0$, *so existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$ *mit*

$$I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) \leq I_t(\mathbb{Q} | \mathbb{P}), \quad \forall\, t \in [0, T],\, \forall\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R).$$

$\mathbb{P}^*$ *ist das ESMM, seine Radon-Nikodým-Dichte bezüglich* $\mathbb{P}$ *ist also gegeben durch*

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = e^{\vartheta^* R_T - T\varphi(\vartheta^*)}.$$

Ist κ *in* ϑ^* *nicht definiert oder gilt* $\kappa(\vartheta^*) \neq 0$, *so wird das Infimum der relativen Entropie auf* $\mathscr{Q}_a(R)$ *nicht angenommen.*

Bemerkung 2.4. Betrachtet man einen Lévy-Prozess $R = (R_t)_{t \geq 0}$ auf einem unendlichen Zeithorizont, so gelten die Aussagen der Theoreme 2.6 und 2.7, wenn man die Eigenschaften „äquivalent“ und „absolutstetig“ durch „lokal äquivalent“ und „lokal absolutstetig“ ersetzt. Die Beweise unserer Resultate kann man ohne Probleme für einen unendlichen Zeithorizont erweitern.

Ist $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ ein nicht entartetes Intervall und ist ϑ^* ein innerer Punkt, so erhalten wir $\varphi'(\vartheta^*) = \kappa(\vartheta^*) = 0$ aus der notwendigen Bedingung an das Minimum und das MEMM existiert in diesem Fall. Gehört ϑ^* zum Rand von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, so ist die einseitige Ableitung $\lim_{\vartheta \to \vartheta^*} \varphi'(\vartheta)$, $\vartheta \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, im Allgemeinen nicht Null, auch wenn diese mit $\kappa(\vartheta^*)$ übereinstimmt. Wir geben ein Beispiel eines Lévy-Prozesses R mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ) an, für den in Abhängigkeit von γ beide Fälle eintreten können: $\kappa(\vartheta^*) = \lim_{\vartheta \to \vartheta^*} \varphi'(\vartheta) < 0$ und $\kappa(\vartheta^*) = \lim_{\vartheta \to \vartheta^*} \varphi'(\vartheta) = 0$. Die Minimumstelle ϑ^* ist in unserem Beispiel der rechte Randpunkt von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, also können die Fälle $\lim_{\vartheta \to \vartheta^*} \varphi'(\vartheta) > 0$ bzw. $\lim_{\vartheta \to \vartheta^*} \varphi'(\vartheta) = -\infty$ wegen der Minimalität von φ in ϑ^*, bzw. der Konvexität von φ nicht eintreten.

Beispiel 2.1. Es sei R ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ), gegeben durch

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &> 0 \quad \text{beliebig,} \\
\gamma &= -2\left(\int_0^1 \frac{e^{ax} - 1}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx\right) - 2\sigma^2 a < 0, \\
\nu(\,dx) &= \begin{cases} x^{-2}, & 0 < x \leq 1, \\ e^{-ax} x^{-3}, & x > 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

für ein $a > 0$. Als Abschneidefunktion h wählen wir $h(x) = x\mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$. Es ist $\sigma^2 > 0$, also erfüllt R die Annahme A.
Für ein beliebiges $\vartheta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(\vartheta) < \infty \Longleftrightarrow \int_1^\infty \frac{e^{(\vartheta - a)x}}{x^3}\, dx < \infty \Longleftrightarrow \vartheta \leq a.$$

Also ist $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) = (-\infty, a]$. Für ein beliebiges $\vartheta \in (0, a)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\varphi'(\vartheta) &= \gamma + \sigma^2\vartheta + \int_0^1 \frac{e^{\vartheta x} - 1}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{e^{(\vartheta - a)x}}{x^2}\, dx \\ &\leq \gamma + \sigma^2 a + \int_0^1 \frac{e^{ax} - 1}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{\gamma}{2} < 0.\end{aligned}$$

Die Funktion φ ist auf $(0, a)$ streng monoton fallend, also auch auf $(-\infty, a]$, da φ strikt konvex ist. Somit ist der rechte Randpunkt a von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ die Minimumstelle von φ. Mit dem Satz über monotone Konvergenz erhalten wir

$$\lim_{\vartheta \uparrow a} \varphi'(\vartheta) = \gamma + \sigma^2 a + \int_0^1 \frac{e^{ax} - 1}{x}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{\gamma}{2} < 0.$$

Aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\frac{\mathbb{E}(R_1 e^{aR_1})}{\mathbb{E}(e^{aR_1})} = \frac{\gamma}{2} < 0.$$

Damit existiert das Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie nach Theorem 2.7 nicht. Aus dem Theorem 2.6 erhalten wir folgende Darstellung des Infimums der relativen Entropie:

$$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)} I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) = -t\varphi(a) = -t\left(\gamma a + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 + \int_0^1 \frac{e^{ax} - 1 - ax}{x^2}\, dx + \int_1^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{x^3}\, dx\right).$$

$\diamond$

Dieses Beispiel zeigt unter anderem, dass neben den Parametern σ^2 und ν, auch γ für die Existenz des Martingalmaßes mit der minimalen Entropie eine große Rolle spielt. Definiert man einen weiteren Lévy-Prozess Y durch das charakteristische Tripel $(\sigma^2, \nu, \gamma/2)$, so ist a die Infimumstelle der kumulantenerzeugenden Funktion von Y_1 und es gilt $\kappa(a) = 0$. Also existiert das MEMM. Andererseits haben wir anhand dieses Beispiels gesehen, dass die Feststellungen des Theorems 2.7 uns ein neues und einfaches Kriterium für die Nichtexistenz des MEMM bieten.

Wird das Infimum der relativen Entropie nicht angenommen, so liefert der Beweis des Theorems 2.6 zumindest eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_a(R)$, deren Entropieprozesse gegen das Infimum konvergieren. Dabei ist R ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}_n^*$, $n \in \mathbb{N}$. Wir formulieren dieses Ergebnis in einem Lemma:

Lemma 2.2. *Wird das Infimum der relativen Entropie* $\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)\}$ *auf* $\mathscr{Q}_a(R)$ *nicht angenommen, so existiert eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen* $(\mathbb{P}^*_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_a(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$*, so dass*

$$\lim_{n\to\infty} I_t(\mathbb{P}^*_n \,|\, \mathbb{P}) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathscr{Q}_a(R)} I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}), \quad \forall t \in [0,T] \quad \textit{gilt.}$$

Wir präsentieren eine Klasse von Lévy-Prozessen für die das Infimum der relativen Entropie nicht angenommen wird. Das Theorem 2.6 ermöglicht uns dennoch diese Größe zu bestimmen und eine Folge von Maßen $(\mathbb{P}^*_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_a(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$ zu konstruieren, deren Entropieprozesse das Infimum approximieren.

Beispiel 2.2 (α-stabile Lévy-Prozesse). Ein Lévy-Prozess R heißt *α-stabil*, wenn gilt

$$\forall\, a > 0 \,:\, \exists\, c \in \mathbb{R} \,:\, (R_{at})_{t\in[0,T]} \stackrel{d}{=} (a^{1/\alpha} R_t + ct)_{t\in[0,T]}, \quad \text{für ein } \alpha \in (0,2].$$

Das charakteristische Tripel (σ^2, ν, γ) eines α-stabilen Lévy-Prozesses kann explizit angegeben werden (Siehe [CT03], Proposition 3.15). Ist $\alpha \in (0,2)$, so existieren Konstanten $A, B > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma &\in \mathbb{R} \ \text{ beliebig},\\
\sigma^2 &= 0,\\
\nu(\,dx) &= \left(\frac{A}{x^{\alpha+1}}\mathbf{1}_{\{x>0\}} + \frac{B}{|x|^{\alpha+1}}\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right) dx.
\end{aligned}$$

Der Fall $\alpha = 2$ entspricht einer Brownschen Bewegung.
Es seien $\alpha \in (0,2)$ beliebig gewählt und R ein symmetrischer α-stabiler Lévy-Prozess. Das charakteristische Tripel ist also durch $(0, \nu, 0)$ gegeben, wobei für das Maß ν

$$\nu(\,dx) = \left(\frac{A}{x^{\alpha+1}}\mathbf{1}_{\{x>0\}} + \frac{A}{|x|^{\alpha+1}}\mathbf{1}_{\{x<0\}}\right) dx,$$

mit einer Konstanten $A > 0$ gilt. Als Abschneidefunktion h wählen wir $h(x) = \mathbf{1}_{\{|x|\leq 1\}}$.
Es gilt $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) = \{0\}$, also

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)\} = -t \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\} = -t\varphi(0) = 0, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Man betrachte eine Folge von Lévy-strukturtreuen Maßtransformationen mit den Girsanov-Parametern $(0, \mathbf{1}_{\{|x|\leq n\}})_R$. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}^*_n$ gilt: $\mathbb{P}^*_n \ll \mathbb{P}$, $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}^*_n) = \mathbb{R}$ und

$$\mathbb{E}^*_n(R_1) = \int_{\{1<|x|\leq n\}} x\nu(\,dx) = 0.$$

Es ist also $\mathbb{P}_n \in \mathscr{Q}_a(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$. Für den Prozess der relativen Entropie erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_t(\mathbb{P}_n \,|\, \mathbb{P}) = t \int_{[-n,n]^c} 1\nu(\,dx) = &\\
tA \left(\int_n^\infty \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx + \int_{-\infty}^{-n} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}}\,dx\right) &= t\frac{2\alpha A}{n^\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Obwohl die Folge $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_a(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$ das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(R)$ approximiert, existiert kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_a(R)$ mit $I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathscr{Q}_a(R)} I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}), \quad \forall t \in [0,T]$. Die neuen Erkenntnisse des Theorems 2.7 liefern eine notwendige Bedingung für die Existenz des MEMM. Es muss $0 \in \Theta^1_{\text{EXP}}(R,\mathbb{P})$ und $\kappa(0) = 0$ gelten. Doch der Erwartungswert von R_1 unter $\mathbb{P}$ existiert nicht und so wird das Infimum der Entropie nicht angenommen. $\diamond$

Bevor wir zum Beweis von Theorem 2.7 kommen, zeigen wir, dass ein Lévy-Prozess R, dessen charakteristisches Tripel die Annahme A erfüllt, den Voraussetzungen von Theorem A aus [ES05] genügt. Es ist also zu zeigen, dass $\mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R) \neq \emptyset$ gilt.

Theorem 2.8. *Es sei R ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Das charakteristische Tripel (σ^2, ν, γ) von R erfülle die Annahme A. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}_T)$ mit $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$.*

Beweis:
Der Beweis dieses Theorems ist im Appendix B zu finden.

Beweis des Theorems 2.7

Existenz: Es sei $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ und es gelte $\kappa(\vartheta^*) = 0$. Durch

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = e^{\vartheta^* R_T - T\varphi(\vartheta^*)}$$

wird ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ definiert. Aus der Bedingung $\kappa(\vartheta^*) = 0$ folgt, dass $\mathbb{P}^*$ in $\mathscr{Q}_e(R)$ liegt. Der Prozess R ist außerdem ein Lévy-Prozess unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß. Es gilt

$$I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) = \mathbb{E}^*\left(\log\left(\frac{d\,\mathbb{P}^*\,|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t}}\right)\right) = \mathbb{E}^*(\vartheta^* R_t - t\varphi(\vartheta^*)) = -t\varphi(\vartheta^*).$$

Aus Theorem 2.6 wissen wir, dass

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|P) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)\} = -t\varphi(\vartheta^*)$$

gilt. Damit ist $\mathbb{P}^*$ das MEMM.

Nichtexistenz: Es gelte $\kappa(\vartheta^*) \neq 0$ oder $\kappa(\vartheta^*)$ existiere nicht. Angenommen, es existiert das MEMM $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$. Aus Theorem 2.8 folgt $\mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R) \neq \emptyset$, also ist R ein Lévy-Prozess unter $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$, nach Theorem A, [ES05]. Außerdem ist R ein echtes Martingal unter diesem Wahrscheinlichkeitsmaß. Für ein beliebiges $t \in (0,T]$ definieren wir die Menge

$$\mathscr{E}_t = \{\mathbb{Q} \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}_t) \,:\, \mathbb{Q} \ll \mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t},\, R_t \in L^1(\mathbb{Q}),\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(R_t) = 0\}.$$

Es gilt $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}|_{\mathscr{F}_t} \in \mathscr{E}_t$ und aus Theorem 2.3 folgt

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{E}_t\} = -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}. \tag{2.3.2}$$

Das Theorem 2.6 liefert uns folgende Darstellung den Prozess der relativen Entropie von $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$ bezüglich $\mathbb{P}$:

$$I_t(\mathbb{P}^{\text{MEMM}}\,|\,\mathbb{P}) = -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\} \overset{(2.3.2)}{=} \inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{E}_t\}.$$

Also minimiert $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}|_{\mathscr{F}_t}$ die relative Entropie auf der Menge $\mathscr{E}_t$. Mit Theorem 2.3 erhalten wir

$$\frac{\mathbb{E}(R_t e^{\vartheta^* R_t})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta^* R_t})} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta^* \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}.$$

Es gilt also $\kappa(\vartheta^*) = 0$. Dies führt zu einem Widerspruch, das MEMM existiert somit nicht. □

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Bedingungen (MEMM1) und (MEMM2), bzw. (ES1) und (ES2), zu den Existenzvoraussetzungen für das äquivalente Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie äquivalent sind.

Lemma 2.3. *Es sei $\vartheta^* \in \Theta_{EXP}(R, \mathbb{P})$ beliebig. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent*

1. $\kappa(\vartheta^*) = 0$.
2. *Es gilt* $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ *und* $\kappa(\vartheta^*) = 0$.
3. ϑ^* *erfüllt die Bedingungen (MEMM1) und (MEMM2) aus dem Theorem 2.2*
4. ϑ^* *erfüllt die Bedingungen (ES1) und (ES2) aus dem Theorem 2.5*

Beweis: Die Äquivalenz der ersten beiden Punkte ist offensichtlich.

2. → 3. Es gilt $\vartheta^* \in \Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) \subseteq \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ und wir erhalten

$$0 = \kappa(\vartheta^*) = \frac{\mathbb{E}(R_1 e^{\vartheta^* R_1})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta^* R_1})} = \mathbb{E}^*(R_1),$$

wobei $\mathbb{E}^*$ den Erwartungswert unter $\mathbb{P}^{\vartheta^*} \in \mathscr{P}_R$ bezeichnet. Andererseits, da $\mathbb{P}^{\vartheta^*}$ aus $\mathbb{P}$ durch eine Lévy-strukturtreue Maßtransformation mit den Girsanov-Parametern $(\vartheta^*, e^{\vartheta^* x})_R$ entstanden ist, gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(R_1) &= \gamma^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (x - h(x))\nu^*(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\vartheta^* x} - 1)h(x)\nu(\,dx) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (x - h(x))e^{\vartheta^* x}\nu(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (xe^{\vartheta^* x} - h(x))\nu(\,dx).
\end{aligned}$$

Also sind die Bedingungen (MEMM1) und (MEMM2) erfüllt.

3. $\rightarrow$ 2. Es ist $\vartheta^* \in \Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, also existiert der Erwartungswert unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\vartheta^*} \in \mathscr{P}_R$ und es gilt

$$\kappa(\vartheta^*) = \mathbb{E}^*(R_1) = \gamma + \sigma^2 \vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (xe^{\vartheta^* x} - h(x))\nu(\,dx) = 0.$$

Zu zeigen bleibt also, dass ϑ^* die kumulantenerzeugende Funktion minimiert. Es sei $\vartheta_0 \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ mit $\varphi(\vartheta_0) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$. Angenommen, es gilt $\vartheta_0 \neq \vartheta^*$. Ohne Einschränkung sei $\vartheta_0 < \vartheta^*$. Dann ist φ auf dem offenen Intervall $I = (\vartheta_0, \vartheta^*)$ differenzierbar mit $\varphi'(\vartheta) = \kappa(\vartheta)$, $\vartheta \in I$. Weiterhin, da ϑ_0 die Minimalstelle von φ ist, gilt $\kappa(\vartheta) > 0$ auf I. Andererseits ist κ eine streng monoton wachsende Funktion und es gilt $\kappa(\vartheta^*) = 0$, also ist $\kappa(\vartheta) < 0$ für $\vartheta \in I$. Wir erhalten einen Widerspruch, also nimmt φ tatsächlich in ϑ^* ihr Minimum an.

3. $\rightarrow$ 4. Es sei $\vartheta^* \in \Theta^1_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |xe^{\vartheta^* x} - h(x)|\nu(\,dx) \leq \int_{\{|x|\geq 1\}} |x|e^{\vartheta^* x}\nu(\,dx) + \int_{\{|x|\geq 1\}} |h(x)|\nu(\,dx)$$
$$+ \int_{\{|x|<1\}} |xe^{\vartheta^* x} - h(x)|\nu(\,dx).$$

Der erste Summand ist nach Voraussetzung endlich, ebenso der zweite, da h eine beschränkte Funktion ist. Für $x \rightarrow 0$ ist $xe^{\vartheta^* x} - h(x)$ von der Ordnung $O(x^2)$, also auch der letzte Term endlich, und es folgt (ES1).

4. $\rightarrow$ 3. Gilt nun umgekehrt (ES1), so erhalten wir

$$\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|e^{\vartheta^* x}\nu(\,dx) \leq \int_{\{|x|\geq 1\}} |xe^{\vartheta^* x} - h(x)|\nu(\,dx) + \int_{\{|x|\geq 1\}} |h(x)|\nu(\,dx) < \infty$$

und entsprechend $\vartheta \in \Theta^1_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$.

$\square$

2.3.1 Das Martingalmaß mit der minimalen Entropie im Exp-Lévy-Modell

Lemma 2.4. *Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}^X, \mathbb{P}, S)$ ein exponentielles Lévy-Modell. Die Trajektorien von S seien weder monoton fallend noch monoton wachsend, $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann existiert das MEMM genau dann, wenn ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit*

$$\int_{\{x>1\}} e^x e^{\vartheta^*(e^x-1)}\nu(\,dx) < \infty \quad \textit{und} \tag{MEMM1'}$$

$$0 = \gamma + \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \vartheta^*\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} ((e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(x))\nu(\,dx) \tag{MEMM2'}$$

existiert. In diesem Fall ist X ein Lévy-Prozess unter $P^{\vartheta^*} = \mathbb{P}^{MEMM}$ mit dem charakteristischen Tripel $(\sigma^2, \nu^*, \gamma^*)$, wobei

$$\begin{aligned} \nu^*(\,dx) &= e^{\vartheta^*(e^x-1)}\nu(\,dx), \\ \gamma^* &= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(e^{\vartheta^*(e^x-1)} - 1)\nu(\,dx) \end{aligned}$$

gilt. Das Infimum des Entropieprozesses ist gegeben durch

$$I_t(\mathbb{P}^{MEMM}\,|\,\mathbb{P}) = -t\left(\gamma\vartheta^* + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^*(\vartheta^*+1) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(e^{\vartheta^*(e^x-1)} - 1 - \vartheta^* h(x)\right)\nu(\,dx)\right).$$

Beweis:
Betrachtet man die duale Darstellung von S durch das stochastische Exponential eines Lévy-Prozesses R, $S = \mathscr{E}(R)$, mit dem charakteristischen Tripel $(\sigma_R^2, \nu_R, \gamma_R)$, so wissen wir aus Bemerkung 2.3, dass der Prozess R die Annahme A erfüllt. Andererseits ist aus Theorem 1.10 bekannt, dass S genau dann ein (lokales) Martingal ist, wenn R ein (lokales) Martingal ist. Das Theorem 2.7 und das Lemma 2.3 liefern daher sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen für die Existenz des MEMM für S:

$$\kappa_R(\vartheta^*) = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta^* \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_R(\vartheta^*) = \inf\{\varphi_R(\vartheta)\ :\ \vartheta \in \mathbb{R}\}$$

oder Existenz eines $\vartheta^* \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, das die Bedingung

$$\gamma_R + \sigma_R^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (xe^{\vartheta x} - h(x))\nu_R(\,dx) = 0$$

erfüllt. φ_R bezeichne die kumulantenerzeugende Funktion des Lévy-Prozesses R unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Existiert das äquivalente Martingalmaß für S mit der minimalen relativen Entropie, so ist es durch das ESMM für den Prozess R gegeben,

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = e^{\vartheta^* R_T - T\varphi_R(\vartheta^*)}.$$

Sind die Existenzbedingungen (MEMM1) und (MEMM2) für den Prozess R erfüllt, so hat R folgende Charakteristiken unter $\mathbb{P}^*$, ausgedrückt durch das charakteristische Tripel von X:

$$\begin{aligned}
\sigma_R^* &\overset{(2.1.2)}{=} \sigma_R \overset{(1.2.4)}{=} \sigma, \\
\nu_R^*(\,dx) &\overset{(2.1.3)}{=} e^{\vartheta^* x}\nu_R(\,dx) \overset{(1.2.5)}{=} e^{\vartheta^* x}(\nu \circ g^{-1})(\,dx), \\
\gamma_R^* &\overset{(2.1.1)}{=} \gamma_R + \sigma_R^2 \vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(e^{\vartheta^* x} - 1)\nu_R(\,dx) \\
&\overset{(1.2.3)}{=} \gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h\,(e^x - 1) - h(x))\nu(\,dx) + \sigma^2\vartheta^* \\
&+ \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(e^{\vartheta^* x} - 1)(\nu \circ g^{-1})(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \vartheta^*\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h\,(e^x - 1) - h(x))\nu(\,dx) \\
&+ \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(e^x - 1)(e^{\vartheta^*(e^x - 1)} - 1)\nu(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \vartheta^*\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h(e^x - 1)e^{\vartheta^*(e^x - 1)} - h(x))\nu(\,dx).
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass die Voraussetzungen (MEMM1) und (MEMM2) für den Prozess R, ausgedrückt durch das charakteristische Tripel des Prozesses X, genau den Bedingungen (MEMM1') und (MEMM2') entsprechen.

(MEMM1):

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x|\geq 1\}} |x| e^{\vartheta^* x}\nu_R(\,dx) < \infty &\Leftrightarrow \int_{\{x > \log 2\}} (e^x - 1)e^{\vartheta^*(e^x - 1)}\nu(\,dx) < \infty \\
&\Leftrightarrow \int_{\{x > 1\}} (e^x - 1)e^{\vartheta^*(e^x - 1)}\nu(\,dx) < \infty. \qquad (2.3.3)
\end{aligned}$$

Ist das letzte Integral endlich, so ist es auch das Integral $\int_{\{x>1\}} e^{\vartheta^*(e^x - 1)}\nu(\,dx)$. Dies folgt aus der Abschätzung $e^x - 1 > 1$ für $x > 1$. Also gilt

$$\int_{\{|x|\geq 1\}} |x| e^{\vartheta^* x}\nu_R(\,dx) < \infty \Leftrightarrow \int_{\{x > 1\}} e^x e^{\vartheta^*(e^x - 1)}\nu(\,dx)$$

und wir erhalten (MEMM1').

(MEMM2):

$$
\begin{aligned}
&0 = \gamma_R + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (xe^{\vartheta^* x} - h(x))\nu_R(\,dx) \Longleftrightarrow \\
&0 = \gamma + \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \vartheta^*\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} ((e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(e^x-1))\nu(\,dx) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h\,(e^x-1) - h(x))\nu(\,dx) \Longleftrightarrow \\
&0 = \gamma + \sigma^2\left(\frac{1}{2} + \vartheta^*\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} ((e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(x))\nu(\,dx)
\end{aligned}
$$

und wir erhalten (MEMM2').

Schließlich brauchen wir noch die Charakteristiken $((\sigma^*)^2, \nu^*, \gamma^*)$ von X unter $\mathbb{P}^*$. Mit Hilfe des Theorems 1.9.2 bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
\sigma^* &= \sigma, \\
\nu^*(\,dx) &= \Big(\big(e^{\vartheta^* x}(\nu \circ J^{-1})\big) \circ J\Big)(\,dx) = e^{\vartheta^*(e^x-1)}\nu(\,dx) \\
\gamma^* &= \gamma_R^* - \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h\,(\log(1+x)) - h(x))\nu_R^*(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h(e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(x))\nu(\,dx) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (h\,(x) - h(e^x-1))e^{\vartheta^*(e^x-1)}\nu(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(e^{\vartheta^*(e^x-1)} - 1)\nu(\,dx).
\end{aligned}
$$

Für den Prozess der relativen Entropie gilt:

$$
\begin{aligned}
I_t(\mathbb{P}^{\mathrm{MEMM}} \,|\, \mathbb{P}) &= -t\varphi_R(\vartheta^*) = -t\big(\gamma_R\vartheta^* + \frac{1}{2}\sigma^2(\vartheta^*)^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{\vartheta^* x} - 1 - \vartheta^* h(x))\nu_R(\,dx)\big) \\
&= -t\big(\gamma\vartheta^* + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^*(\vartheta^*+1) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(e^{\vartheta^*(e^x-1)} - 1 - \vartheta^* h(x)\Big)\,\nu(\,dx)\big).
\end{aligned}
$$

In [Esc03] ist die folgende Bedingung an Stelle von (MEMM1') formuliert:

$$
\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(e^x-1)|\nu(\,dx) < \infty. \tag{ES1}
$$

Der Autor zeigt, dass aus (ES1) die Voraussetzung (MEMM1') folgt und behauptet, dass die erste Bedingung schwächer ist als die zweite. Im nächsten Korollar beweisen wir die Äquivalenz beider Voraussetzungen.

Korollar 2.1. *Es seien ν ein Lévy-Maß, h eine Abschneidefunktion und $\vartheta \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

$$\int_{\{x>1\}} e^x e^{\vartheta(e^x-1)} \nu(\,dx) < \infty, \tag{MEMM1'}$$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(e^x-1)e^{\vartheta(e^x-1)} - h(e^x-1)|\nu(\,dx) < \infty. \tag{ES1}$$

Beweis:
Die Richtung (ES1)$\Longrightarrow$(MEMM1') ist in [Esc03] gezeigt. Wegen der Integrabilität von $|h(e^x-1)-h(x)|$ bezüglich ν ist (ES1) zu der folgenden Bedingung äquivalent:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(e^x-1)e^{\vartheta^*(e^x-1)} - h(x)|\nu(\,dx) < \infty. \tag{ES1'}$$

Der Integrand in (ES1), $(e^x-1)e^{\vartheta(e^x-1)} - h(e^x-1)$, ist für $x < -1$ beschränkt und man sieht aus der Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion, dass er für $x \to 0$ die Ordnung $O(x^2)$ hat. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} |(e^x-1)e^{\vartheta(e^x-1)} - h(e^x-1)|\nu(\,dx) < \infty \\
\Longleftrightarrow &\int_{\{x>1\}} ((e^x-1)e^{\vartheta(e^x-1)} - h(x))\nu(\,dx) < \infty \\
\Longleftrightarrow &\int_{\{x>1\}} (e^x-1)e^{\vartheta(e^x-1)}\nu(\,dx) < \infty.
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Bedingung (2.3.3). Aus dem Beweis des Lemmas 2.4 wissen wir aber, dass (2.3.3) zu (MEMM1') äquivalent ist. $\square$

2.4 Diskussion

Abschließend möchten wir die Ergebnisse der Theoreme 2.6, 2.7 und des Lemmas 2.4 mit den Ergebnissen von Hubalek und Sgarra [HS06] vergleichen und unklare Stellen im Beweis ihres Hauptresultats (Theorem 8, [HS06]) diskutieren. Zur besseren Lesbarkeit benutzen wir in diesem Abschnitt unsere Notation und fassen die Unterschiede in der unten stehenden Tabelle zusammen.

Zuerst präsentieren wir die Aussagen der Theoreme 8 und 9 aus [HS06], die für den Spezialfall eines exponentiellen Lévy-Prozesses mit unseren Resultaten vergleichbar sind.
Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$ ein exponentielles Lévy-Modell und R bezeichne die Exponentialtransformierte von X.

Theorem 8, [HS06] *Das MEMM für $S = e^X$ existiert genau dann, wenn das ESMM für den Prozess R existiert. Existieren diese Wahrscheinlichkeitsmaße, so stimmen sie überein.*

Es sei $\bar{\vartheta} \in [0, \infty]$ so gewählt, dass $\mathbb{E}(|R_1| e^{\vartheta R_1}) < \infty$ für alle $\vartheta < \bar{\vartheta}$ und $\mathbb{E}(|R_1| e^{\vartheta R_1}) = \infty$ für alle $\vartheta > \bar{\vartheta}$ gilt. Dann ist die Funktion φ_R auf $(-\infty, \bar{\vartheta})$ differenzierbar und es wird $\varphi'(\bar{\vartheta}) = \infty$ gesetzt, falls $\mathbb{E}(|R_1| e^{\bar{\vartheta} R_1}) = \infty$ ist.

Theorem 9, [HS06] *Die Trajektorien eines Lévy-Prozesses X seien weder monoton fallend noch monoton wachsend. Ferner gelte $\varphi'_R(\bar{\vartheta}) < 0$. Dann existiert das MEMM nicht, und das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(e^X)$ ist gegeben durch*

$$\inf_{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(e^X)} I_T(\mathbb{Q} | \mathbb{P}) = -\varphi_R(\bar{\vartheta}) T.$$

Weiterhin gibt es eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_e(e^X) \cap \mathscr{Q}_l(R)$, so dass

$$\lim_{n \to \infty} I_T(\mathbb{P}_n \,|\, \mathbb{P}) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(e^X)} I_T(\mathbb{Q} | \mathbb{P}) \quad \textit{gilt.}$$

Zum Beweis des Theorems 8:
Existiert das ESMM für den Prozess R, so folgt die Aussage aus [ES05], Theorem B, also ist nur die Rückrichtung interessant. Es werden zwei Fälle unterschieden:

Fall 1: Die Sprünge von X sind nach oben beschränkt.

Fall 2: Die Sprünge von X sind nicht nach oben beschränkt.

Der erste Fall wird in [HS06], Lemma 1, Lemma 2 und Korollar 1 behandelt. Mit Argumenten aus unseren Beweisen lässt sich allerdings die Aussage viel einfacher zeigen:

Existiert das MEMM, so sind X und $-X$ keine Subordinatoren, anderenfalls wäre die Menge $\mathscr{Q}_e(e^X)$ leer (Bemerkung 2.3, Theorem 1.13), im Widerspruch zu $\mathbb{P}^{\text{MEMM}} \in \mathscr{Q}_e(e^X)$ (Bemerkung 2.2). Die Sprünge von R sind nach unten durch -1 beschränkt und, da die Sprünge von X nach oben beschränkt sind, trifft dies auch auf die Sprünge von R zu. Es gilt somit $\Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P}) = \mathbb{R}$ und φ_R ist eine strikt konvexe Funktion mit $\varphi_R(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$. Für das eindeutige $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_R(\vartheta^*) = \inf\{\varphi_R(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ erhalten wir

$$0 = \varphi_R'(\vartheta^*) = \frac{\mathbb{E}(R_1 e^{\vartheta^* R_1})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta^* R_1})}.$$

Damit existiert das ESMM für R und stimmt mit dem MEMM überein.

Wir diskutieren nun ausführlich den zweiten Fall.

Proposition 4 in [HS06] liefert einen aus unserer Sicht unvollständigen Beweis für die Existenz des ESMM für den Prozess R. Hubalek und Sgarra benutzen das Ergebnis des Theorems A aus [ES05], welches besagt, dass X unter dem MEMM ein Lévy-Prozess ist. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$ ist also aus $\mathbb{P}$ durch eine Lévy-strukturtreue Maßtransformation mit den Girsanov-Parametern $(\eta_0, y_0(x))_X$ entstanden. Die Martingalbedingung lautet dann

$$\gamma + \sigma^2\left(\eta_0 + \frac{1}{2}\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left((e^x - 1)y_0(x) - h(x)\right)\nu(\,dx) = 0,$$

und die minimale Entropie zum Zeitpunkt $t = 1$ ist gegeben durch

$$I(0) := \frac{1}{2}\sigma^2\eta_0^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(y_0(x)\ln y_0(x) - y_0(x) + 1\right)\nu(\,dx).$$

Die Autoren betrachten eine beliebige kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und wählen $r_1 > \max(A)_+$ und $r_2 > r_1$ so, dass

$$0 < \int_B (e^x - 1)y_0(x)\nu(\,dx) < \infty, \quad B = [r_1, r_2],$$

erfüllt ist. Ein solches Intervall B existiert immer, da die Sprünge von X nach Voraussetzung nicht nach oben beschränkt sind. Es wird weiterhin

$$\alpha := \int_A (e^x - 1)y_0(x)\nu(\,dx), \qquad \beta := \int_B (e^x - 1)y_0(x)\nu(\,dx)$$

und

$$y_\delta(x) := \left(1 + \mathbf{1}_A(x) - \frac{\delta\alpha}{\beta}\mathbf{1}_B(x)\right)y_0(x)$$

gesetzt. Man kann leicht überprüfen, dass für hinreichend kleine $|\delta|$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\delta$, das durch die Girsanov-Transformation mit den Girsanov-Parametern $(\eta_0, y_\delta(x))_X$ entsteht, in $\mathscr{Q}_e(e^X)$ liegt. Die dazu gehörende Entropie zur Zeit $t = 1$ ist durch

$$I(\delta) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(y_\delta(x)\ln y_\delta(x) - y_\delta(x) + 1\right)\nu(\,dx)$$

gegeben und für $\delta = 0$ nach Voraussetzung minimal. Mit dem Theorem von majorisierter Konvergenz erhalten wir

$$I'(0) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(\ln y_0(x) \left(\mathbf{1}_A(x) - \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{1}_B(x) \right) y_0(x) \right) \nu(\,dx) = 0$$

und somit ist

$$\int_A y_0(x) \ln y_0(x) \nu(\,dx) = \frac{\alpha}{\beta} \int_B y_0(x) \ln y_0(x) \nu(\,dx).$$

Setzt man

$$\vartheta^* := \frac{1}{\beta} \int_B y_0(x) \ln y_0(x) \nu(\,dx), \tag{2.4.1}$$

so gilt

$$\int_A (\ln y_0(x) - \vartheta^*(e^x - 1))\, y_0(x) \nu(\,dx) = 0.$$

Also ist $\ln y_0(x) = \vartheta^*(e^x - 1)$ auf der beliebig gewählten kompakten Menge A, und dies impliziert $y_0(x) = e^{\vartheta^*(e^x-1)}$ auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Da die Radon-Nikodým-Dichte von $\mathbb{P}^{\text{MEMM}}$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\mathbb{P}^{\text{MEMM}}}{d\,\mathbb{P}} &= \exp\Big\{ \eta_0 W_T - \frac{\eta_0^2\sigma^2 T}{2} + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\Big(\sum_{0<s\le T} \vartheta^*\big(e^{\Delta X_s} - 1\big) - T \int_{\{|x|>\epsilon\}} \big(e^{\vartheta^*(e^x-1)} - 1\big)\nu(\,dx)\Big)\Big\} \\
&= \exp\Big\{ \eta_0 W_T - \frac{\eta_0^2\sigma^2 T}{2} + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\big(\sum_{0<s\le T} \vartheta^* \Delta R_s - T \int_{\{|x|>\epsilon\}} \big(e^{\vartheta^* x} - 1\big)\nu_R(\,dx)\big)\Big\} \\
&= \exp\Big\{ \vartheta^* R_T - \varphi_R(\vartheta^*) T + (\eta_0 - \vartheta^*) W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T(\eta_0^2 - (\vartheta^*)^2) \Big\}
\end{aligned}$$

gegeben ist, würde das Paar $(\eta_0, y_0(x))_X$ der Esscher-Maßtransformation für R entsprechen, falls wir zeigen könnten, dass $\vartheta^* = \eta_0$ gilt. Dies ist jedoch nicht evident und bedarf einer sorgfältigen Prüfung. Leider bestimmt auch die Zuordnung (2.4.1) nicht den genauen Wert von ϑ^*, denn es gilt

$$\vartheta^* = \frac{\int_B \vartheta^* e^{\vartheta^*(e^x-1)}(e^x - 1)\nu(\,dx)}{\int_B e^{\vartheta^*(e^x-1)}(e^x - 1)\nu(\,dx)} \equiv \vartheta^*.$$

In [HS06] werden nur exponentielle Lévy-Prozesse, $S = e^X$, betrachtet. In diesem Fall hat die Exponentialtransformierte R von X gewisse Eigenschaften (z.B. sind die Sprünge nach unten beschränkt, die kumulantenerzeugende Funktion existiert für $\vartheta < 0$), die einige Beweisschritte stark vereinfachen. Es ist allerdings nicht vollkommen klar, wie man die Methoden von Hubalek und Sgarra für einen beliebigen Lévy-Prozess X verallgemeinern kann, und daher basieren die von uns präsentierten Beweise nicht auf den Aussagen bzw. Beweisschritten aus [HS06].

Unterschiede in der Notation:

Hubalek und Sgarra	Krol	Bedeutung
$\tilde{X}$	R	die Exponentialtransformierte von X
(c, U, b)	(σ^2, ν, γ)	das charakteristische Tripel von X
ψ_0	η_0	der konstante Girsanov-Parameter
$\tilde{\kappa}$	φ_R	die kumulantenerzeugende Funktion von $\tilde{X}$ bzw. R

3. THESEN

Es sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit dem charakteristischen Tripel (σ^2, ν, γ). Die Trajektorien von X seien weder monoton wachsend noch monoton fallend. Es bezeichne φ die kumulantenerzeugende Funktion von X_1 und κ sei durch

$$\kappa(\vartheta) = \frac{\mathbb{E}(X_1 e^{\vartheta X_1})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta X_1})}, \quad \vartheta \in \Theta^1_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P}) = \{\zeta \in \mathbb{R} : \int_{\{|x|>1\}} |x| e^{\zeta x} \nu(\,dx) < \infty\},$$

definiert.
Weiterhin sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$ die Vervollständigung der von X erzeugten Filtration und es gelte $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$.
Wir betrachten folgende Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathscr{F})$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Q}_a(X) &:= \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid X \text{ ist ein lokales Martingal unter } \mathbb{Q}\},\\
\mathscr{Q}_e(X) &:= \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid X \text{ ist ein lokales Martingal unter } \mathbb{Q}\} \subseteq \mathscr{Q}_a(X),\\
\mathscr{Q}_f(X) &:= \{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X) \mid I_t(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) < \infty \; \forall\, t \in [0,T]\},\\
\mathscr{Q}_l(X) &:= \{\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X) \mid X \text{ ist ein Lévy-Prozess unter } \mathbb{Q}\}.
\end{aligned}$$

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ definiert man den *Prozess der relativen Entropie* von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$I_t(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\log\left(\frac{d\mathbb{Q}\,|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t}}\right)\right) \in [0,\infty], \quad t \in [0,T].$$

Theorem 2.6 *Es gilt*

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X)\} = -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}, \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Theorem 2.7 *Es sei $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}$. Gilt $\kappa(\vartheta^*) = 0$, so existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_e(X) \cap \mathscr{Q}_f(X) \cap \mathscr{Q}_l(X)$ mit*

$$I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) \le I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}), \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(X).$$

$\mathbb{P}^*$ ist das Esscher-Martingalmaß, seine Radon-Nikodým-Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ ist also gegeben durch

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}} = e^{\vartheta^* X_T - T\varphi(\vartheta^*)}.$$

Ist κ in ϑ^* nicht definiert oder gilt $\kappa(\vartheta^*) \ne 0$, so wird das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(X)$ nicht angenommen.

ANHANG

A. RELATIVE ENTROPIE UND ESSCHER-TRANSFORMATION

A.1 Relative Entropie

Relative Entropie und vor allem das Problem ihrer Minimierung unter Nebenbedingungen spielen in vielen verschiedenen Disziplinen eine wichtige Rolle: in der Theorie der großen Abweichungen, in statistischer Physik, in der Informationstheorie und in der Finanzmathematik. Eine gute Übersicht über die Bedeutung der Entropie in verschiedenen Bereichen findet man in der Arbeit „On minimization and maximization of entropy in various disciplines" von Cherny und Maslov [CM03].
In der Wahrscheinlichkeitstheorie stellt sich oft die Frage, wie man den Abstand (bzw. den Grad an Verschiedenheit) zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen messen kann. In dem Buch [DCD86] ist der folgende Ansatz präsentiert.
Es seien nun $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$. Für ein $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ dominierendes Wahrscheinlichkeitsmaß (dieses existiert immer, z.B. $\frac{\mathbb{P}+\mathbb{Q}}{2}$) definiere man die entsprechenden Radon-Nikodým-Dichten:

$$p := \frac{d\,\mathbb{P}}{d\nu} \quad \text{und} \quad q := \frac{d\mathbb{Q}}{d\nu}.$$

Möchte man den Grad an Verschiedenheit zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ durch das Integral $\int_{\mathbb{R}} \varphi(p,q)\,d\nu$ für eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \bar{\mathbb{R}}$ messen, so muss φ gewissen Bedingungen genügen, um eine gute Abstandsfunktion zu sein:

- Das Ergebnis darf nicht von dem dominierenden Maß ν abhängen (wir bezeichnen es daher symbolisch mit $\int \varphi(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$). Es gilt $\mathbb{P} + \mathbb{Q} \ll \nu$ und wir setzen $f := \frac{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}{d\nu}$. So erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int \varphi\left(\frac{d\,\mathbb{P}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}, \frac{d\mathbb{Q}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}\right) d(\mathbb{P}+\mathbb{Q}) \\ &\qquad = \int \varphi\left(\frac{d\,\mathbb{P}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}, \frac{d\mathbb{Q}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}\right) f\,d\nu \overset{!}{=} \int \varphi(p,q)\,d\nu. \end{aligned} \quad \text{(A.1.1)}$$

  Andererseits ist

$$p = \frac{d\,\mathbb{P}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})} \cdot \frac{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}{d\nu} = f\frac{d\,\mathbb{P}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}, \text{ und analog } q = f\frac{d\mathbb{Q}}{d(\mathbb{P}+\mathbb{Q})}.$$

Ist φ zum Beispiel homogen, d.h. gilt $\varphi(tx, ty) = t\varphi(x, y)$ für alle $x, y, t \geq 0$, so ist die Gleichung A.1.1 erfüllt.

- Da das Integral den Abstand zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ messen soll, muss φ die Bedingungen $\int \varphi(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = 0$ und $\int \varphi(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) \geq 0$ für alle Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ erfüllen.

- Betrachtet man $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ nur auf einer Teil-σ-Algebra $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$, so darf die Verschiedenheit zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ nur kleiner werden. Es muss also $\int \varphi(\mathbb{P}|_{\mathscr{G}}, \mathbb{Q}|_{\mathscr{G}}) \leq \int \varphi(\mathbb{P}, \mathbb{Q})$ gelten. Ist φ eine konvexe Funktion, so gilt mit der zweidimensionalen Jensen'schen Ungleichung:

$$\mathbb{E}_\nu\big(\varphi(p, q)\big) \geq \mathbb{E}_\nu\Big(\varphi\big(\mathbb{E}_\nu(p \mid \mathscr{G}), \mathbb{E}_\nu(q \mid \mathscr{G})\big)\Big) = \mathbb{E}_\nu\left(\varphi\left(\frac{d\,\mathbb{P}}{d\nu}\Big|_{\mathscr{G}}, \frac{d\mathbb{Q}}{d\nu}\Big|_{\mathscr{G}}\right)\right).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Funktion $\varphi(x, y) = x \log\left(\frac{x}{y}\right)$, definiert auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$ die obigen Bedingungen erfüllt. Setzt man $0 \log 0 := 0 =: 0 \log\left(\frac{0}{0}\right)$, so kann man φ stetig fortsetzen. Wir definieren

$$I(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) := \begin{cases} \int p \log\left(\frac{p}{q}\right) \, d\nu, & \text{falls } \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bedingung $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ impliziert, dass q $\mathbb{P}$-fast sicher ungleich Null ist. In diesem Fall können wir

$$\frac{p}{q} = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

schreiben. Es gilt also

$$I(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\log\left(\frac{d\,\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)\right), & \text{falls } \mathbb{P} \ll \mathbb{Q} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Den oben eingeführten Abstand zwischen $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ bezeichnet man als *relative Entropie von* $\mathbb{P}$ *bezüglich* $\mathbb{Q}$. Diese ist keine Metrik, da im Allgemeinen weder die Symmetrieeigenschaft, noch die Dreiecksungleichung erfüllt sind.
Wir fassen die obigen Eigenschaften der relativen Entropie in einem Lemma zusammen:

Lemma A.1. *Es sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es gilt*

1. $I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \geq 0$ *für alle* $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$*, außerdem ist* $I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) = 0$ *genau dann, wenn* $\mathbb{P}$ *und* $\mathbb{Q}$ *identisch sind.*

2. *Die Funktion* $\mathbb{Q} \mapsto I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P})$ *ist strikt konvex auf* $\mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$.

3. *Ist* $\mathscr{G}$ *eine Teil-*σ*-Algebra von* $\mathscr{F}$*, so gilt*

$$I_{\mathscr{G}}(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) := I(\mathbb{Q}|_{\mathscr{G}}|\,\mathbb{P}|_{\mathscr{G}}) \leq I(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}).$$

Betrachtet man einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, so ist man manchmal an dem gesamten Prozess der relativen Entropie, der durch die Einschränkung der Wahrscheinlichkeitsmaße auf die Teil-σ-Algebren $\mathscr{F}_t$, $t \in [0,T]$, entsteht, interessiert.

Definition A.1. Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ definiert man den *Prozess der relativen Entropie* von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$I_t(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\log\left(\frac{d\mathbb{Q}\,|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t}}\right)\right) \in [0,\infty], \quad t \in [0,T].$$

Es sei nun $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein Lévy-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Ist $\mathbb{P}^*$ durch eine Lévy-strukturtreue Maßtransformation aus $\mathbb{P}$ entstanden, so kann man in diesem Fall den Prozess der relativen Entropie durch die charakteristischen Tripel von X unter $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^*$ ausdrücken.

Proposition A.1 (Proposition 9.10, [CT03]). *Es sei X ein Lévy-Prozess mit den charakteristischen Tripeln (σ^2, ν, γ) unter $\mathbb{P}$ und $(\sigma^2, \nu^*, \gamma^*)$ unter $\mathbb{P}^*$. Es gelte weiterhin $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$. Der Prozess der relativen Entropie $I = (I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}))_{t\in[0,T]}$ ist gegeben durch*

1. $\sigma \neq 0$:

$$I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) = \frac{t}{2\sigma^2}\left(\gamma^* - \gamma - \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(\nu^* - \nu)(\,dx)\right)^2 + t\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(\frac{d\nu^*}{d\nu}\ln\frac{d\nu^*}{d\nu} + 1 - \frac{d\nu^*}{d\nu}\right)\nu(\,dx),$$

2. $\sigma = 0$:

$$I_t(\mathbb{P}^* \mid \mathbb{P}) = t\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left(\frac{d\nu^*}{d\nu}\ln\frac{d\nu^*}{d\nu} + 1 - \frac{d\nu^*}{d\nu}\right)\nu(\,dx).$$

Im folgenden Lemma ist eine Eigenschaft der relativen Entropie dargestellt, von der wir später Gebrauch machen werden.

Lemma A.2 (Lemma 2.1, [FM03]). *Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathscr{G}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathscr{F}$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{G})$, so dass $\mathbb{Q}$ absolutstetig bezüglich $\mathbb{P}$ auf $\mathscr{G}$ ist. Es sei $\mathbb{R}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{G})$, so dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$ auf $\mathscr{G}$ äquivalent sind und $\log\left(\frac{d\mathbb{R}|_{\mathscr{G}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{G}}}\right)$ bezüglich $\mathbb{Q}$ integrierbar ist. Dann gilt*

$$I_{\mathscr{G}}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) \geq \int_\Omega \log\left(\frac{d\mathbb{R}|_{\mathscr{G}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{G}}}\right)\, d\mathbb{Q}.$$

Beweis:
Gilt $I_{\mathscr{G}}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \infty$, so ist die Aussage klar. Sonst folgt aus der Bemerkung zum Theorem 2.1, [Csi75], dass gilt:

$$I_{\mathscr{G}}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = I_{\mathscr{G}}(\mathbb{Q} \mid \mathbb{R}) + \int_{\Omega} \log\left(\frac{d\mathbb{R}|_{\mathscr{G}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{G}}}\right) d\mathbb{Q} \geq \int_{\Omega} \log\left(\frac{d\mathbb{R}|_{\mathscr{G}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{G}}}\right) d\mathbb{Q}$$

und die Aussage ist somit bewiesen. $\square$

A.2 Esscher-Transformation in der Versicherungsmathematik

Der Begriff der Esscher-Transformation ist schon seit den dreißiger Jahren bekannt, lange Zeit vor der Entwicklung der modernen Finanzmathematik. Der Name geht auf den schwedischen Aktuar Fredrik Esscher zurück. In der Versicherungsmathematik ist das Esscher-Prinzip ein weit verbreitetes Instrument für die Prämienkalkulation (siehe [Ess32]). Ein Versicherungsunternehmen übernimmt gegen eine Prämienzahlung des Versicherungsnehmers ein bestimmtes (aber zufälliges) Risiko, d.h. eine nicht-negative Zufallsgröße auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Ein Prämienprinzip ist ein Funktional H auf der Menge χ der nicht-negativen Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$. Die Prämie für ein Risiko R, berechnet gemäß dem Prämienprinzip H, ist $\pi = H(R)$.
Das Esscher-Prämienprinzip ist wie folgt definiert:

$$H(R) = \frac{\mathbb{E}\left(Re^{\vartheta R}\right)}{\mathbb{E}\left(e^{\vartheta R}\right)}, \quad \vartheta > 0.$$

Definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\vartheta} \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ (falls $\mathbb{E}(e^{\vartheta R}) < \infty$) durch die Vorschrift

$$\frac{d\,\mathbb{P}^{\vartheta}}{d\,\mathbb{P}} := \frac{e^{\vartheta R}}{\mathbb{E}\left(e^{\vartheta R}\right)},$$

so gilt $H(R) = \mathbb{E}^{\vartheta}(R)$. Hier ist die Konstante $\vartheta > 0$ frei wählbar und stellt die mittlere Risikoaversion am Markt dar. Die Menge der möglichen Prämien ist gegeben durch $\{\mathbb{E}^{\vartheta}(R) : \vartheta > 0,\ \mathbb{E}(e^{\vartheta R}) < \infty\}$, wobei $\mathbb{E}^{\vartheta}$ den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}^{\vartheta}$ bezeichnet.

B. BEWEISE:

B.1 Beweis des Theorems 2.2

- $\mathbb{P}^\vartheta$ ist aus $\mathbb{P}$ durch eine Lévy-strukturtreue Maßtransformation mit den Girsanov-Parametern $(\eta, y(x))_X = (\vartheta, e^{\vartheta x})$ gewonnen. Dabei genügt $y(x) = e^{\vartheta x}$ der Integrabilitätsbedingung (1.3.2), denn diese ist nach Korollar 1.3 zu der Bedingung $\vartheta \in \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$ äquivalent. Die Aussagen der Punkte 1) und 2) erhält man aus dem Theorem von Girsanov.

- Der dritte Punkt des Satzes folgt sofort aus dem Theorem 2.1.3.

- Die Darstellung des Prozesses der relativen Entropie erhält man aus der Proposition A.1.

- Für den Punkt 5) des Theorems müssen wir die Martingalbedingung (1.1.4) für das charakteristische Tripel $(\sigma^2, \nu^*, \gamma^*)$ von X unter $\mathbb{P}^{\vartheta^*}$ überprüfen. Es muss gelten

$$\begin{aligned}
0 &= \gamma^* + \int (x - h(x))\nu^*(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}} h(x)(e^{\vartheta^* x} - 1)\nu(\,dx) + \int e^{\vartheta^* x}(x - h(x))\nu(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2\vartheta^* + \int_{\mathbb{R}} (xe^{\vartheta^* x} - h(x))\nu(\,dx),
\end{aligned}$$

  und

$$\int_{\{|x|\geq 1\}} |x|\nu^*(\,dx) = \int_{\{|x|\geq 1\}} |x|e^{\vartheta^* x}\nu(\,dx) < \infty.$$

  Das letzte Integral ist genau dann endlich, wenn $\vartheta \in \Theta^1_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$ gilt. Dies entspricht genau den Bedingungen (MEMM1) und (MEMM2).

- Für den letzten Punkt nutzen wir das Korollar 1.1. Es besagt, dass e^X genau dann ein $\mathbb{P}^\dagger$-Martingal ist, wenn $\vartheta^\dagger \in \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P}^\dagger)$, also $\vartheta^\dagger + 1 \in \Theta_{\text{EXP}}(X, \mathbb{P})$ gilt, und wenn die

Martingalgleichung unter dem neuen Maß $\mathbb{P}^*$ erfüllt ist:

$$
\begin{aligned}
0 &= \gamma^\dagger + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^x - 1 - h(x))\, \nu^\dagger(\,dx) \\
&= \gamma + \sigma^2 \left(\vartheta^\dagger + \frac{1}{2}\right) + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{\vartheta^\dagger x}(e^x - 1) - h(x)\right) \nu(\,dx).
\end{aligned}
$$

Dies entspricht genau den Bedingungen (ESMM1) und (ESMM2).

□

B.2 Beweis des Lemmas 2.1

1. Es ist $\varphi(0) = 0$ und $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ ist ein Intervall nach Theorem 2.1.1.

2. Es sei $\vartheta_0 \in \mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ beliebig gewählt. Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $(\vartheta_0 - 2\epsilon, \vartheta_0 + 2\epsilon) \subseteq \mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$. Man wähle hinreichend große $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $x < e^{\epsilon x}$ für alle $x > n_1$ und $|x| < e^{-\epsilon x}$ für alle $x < -n_2$ gilt. Damit erhalten wir

$$
\int_{\{|x|>1\}} |x| e^{\vartheta_0 x} \nu(\,dx) \le \int_{[-n_2, n_1]} |x| e^{\vartheta_0 x} \nu(\,dx) + \int_{\{x > n_1\}} e^{(\epsilon + \vartheta_0)x} \nu(\,dx) + \int_{\{x < -n_2\}} e^{(-\epsilon + \vartheta_0)x} \nu(\,dx).
$$

   Das erste Integral kann durch $(n_1 \vee n_2) \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{\vartheta_0 x} \nu(\,dx)$ nach oben abgeschätzt werden und ist endlich, da $\vartheta_0 \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ vorausgesetzt wurde. Auch die letzten beiden Integrale sind endlich, da $\vartheta_0 - \epsilon$ und $\vartheta_0 + \epsilon$ in $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ liegen. Also ist $\vartheta_0 \in \Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$. Aus dem Theorem 2.1.3 folgt, dass φ auf $\mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ unendlich oft differenzierbar ist. Mit

$$
\mathbb{E}(R_1 e^{\vartheta R_1}) = \left(e^{\varphi(\vartheta)}\right)' = e^{\varphi(\vartheta)} \varphi'(\vartheta), \vartheta \in \mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})
$$

   erhalten wir

$$
\varphi'(\vartheta) = \frac{\mathbb{E}(R_1 e^{\vartheta R_1})}{\mathbb{E}(e^{\vartheta R_1})} = \kappa(\vartheta) \quad \text{auf } \mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}).
$$

3. Erfüllt der Prozess R die Annahme A, so ist aus Proposition 1.6 bekannt, dass R und $-R$ keine Subordinatoren sind. Im Inneren von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ ist φ eine strikt konvexe Funktion, denn es gilt

$$
\varphi''(\vartheta) = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^2 e^{\vartheta x} \nu(\,dx) > 0, \quad \vartheta \in \mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}).
$$

   Gehört der Randpunkt von $\mathring{\Theta}_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ zu $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, so ist φ auf $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ strikt konvex, falls φ in diesem Punkt einseitig stetig ist. Es sei o.E. ϑ_0 der rechte Randpunkt von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$. Wir betrachten den Fall $\vartheta_0 \geq 0$. Die Argumente für den Fall $\vartheta_0 < 0$ sind analog. Es sei $v : \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$v(\vartheta) = e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta x \mathbf{1}_{\{|x| \leq 1\}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Es sei $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ eine beliebige Folge, die gegen ϑ_0 konvergiert. Die Folge $(v(\vartheta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend für $x > 0$ und monoton fallend für $x < 0$. Es ist

$$v(\vartheta_0) \leq \left(e^{\vartheta_0 x} - 1 - \vartheta_0 x \mathbf{1}_{\{0<x\leq 1\}}\right)\mathbf{1}_{\{x>0\}} + \left(e^{\vartheta_1 x} - 1 - \vartheta_1 x \mathbf{1}_{\{-1<x\leq 0\}}\right)\mathbf{1}_{\{x<0\}} \in L^1(\nu).$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir $\varphi(\vartheta_n) \to \varphi(\vartheta)$ und die Funktion φ ist stetig in ϑ_0.
Es sei $I = \operatorname{supp}(\mathbb{P} \circ R_1^{-1})$. Erfüllt der Prozess R die Annahme A, so folgt aus der Proposition 1.6, dass $0 \in \mathring{I}$ gilt. Damit erhalten wir die Konvergenz von φ gegen Unendlich für $|\vartheta| \to \infty$.

4. Für $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}) = \{0\}$ ist die Aussage klar. Es sei $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ ein Intervall. Die Eindeutigkeit der Minimumstelle ϑ^* folgt aus der strikten Konvexität von φ. Die Menge $I = \{\vartheta \in \mathbb{R} : \varphi(\vartheta) \leq 1\} \supseteq \{0\}$ ist eine beschränkte Menge, da $\varphi(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$ gilt. Es ist $a := \inf\{\varphi(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\} > -\infty$, da φ außerdem konvex ist. Wir betrachten eine Folge $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ mit $\varphi(\vartheta_n) \to a$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie eine konvergente Teilfolge (ϑ_{n_j}), die gegen ein $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ konvergiert. Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\mathbb{E}(e^{\vartheta^* R_1}) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} e^{\vartheta_{n_j} R_1}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{\vartheta_{n_j} R_1}) = e^a < \infty.$$

Somit ist $\vartheta^* \in \Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$. Wegen Stetigkeit von φ auf $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ folgt, dass $\varphi(\vartheta_{n_j})$ einerseits gegen a und andererseits gegen $\varphi(\vartheta^*)$ konvergiert. Aus der strikten Konvexität der kumulantenerzeugenden Funktion folgt die Aussage und damit ist das Lemma bewiesen. □

B.3 Beweis des Theorems 2.6

Das Lemma 2.1 liefert ein eindeutiges $\vartheta^* \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$. Zuerst untersuchen wir den Fall, dass ϑ^* im Inneren von $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$ liegt. Da ϑ^* Minimumstelle ist und wegen $\vartheta^* \in \Theta^1_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P})$, gilt $\varphi'(\vartheta^*) = \kappa(\vartheta^*) = 0$. Der Prozess $Z = (Z_t)_{t\in[0,T]}$, gegeben durch

$$Z_t = e^{\vartheta^* R_t - t\varphi(\vartheta^*)}, \quad t \in [0, T],$$

ist bezüglich $\mathbb{P}$ ein strikt positives Martingal mit $\mathbb{E}(Z_t) = 1$, d.h. durch $\mathbb{P}^* = Z_T\,\mathbb{P}$ wird ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ auf $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}$ mit $\frac{d\,\mathbb{P}^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}} = Z_t$ definiert. Unter

$\mathbb{P}^*$ ist R wieder ein Lévy-Prozess und die Girsanov-Parameter $(\eta^*, y^*(x))_R$ dieser Transformation sind gegeben durch $(\vartheta^*, e^{\vartheta^* x})$. Weiterhin ist R unter $\mathbb{P}^*$ integrierbar, denn es gilt

$$\mathbb{E}^*(|R_1|) < \infty \Longleftrightarrow \int_{\{|x|>1\}} |x|\nu^*(\,dx) = \int_{\{|x|>1\}} |x|e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty.$$

Das letzte Integral ist endlich, da ϑ^* in $\Theta^1_{\text{EXP}}(R,\mathbb{P})$ liegt. Außerdem gilt $\mathbb{E}^*(R_1) = \varphi'(\vartheta^*) = \kappa(\vartheta^*) = 0$, also $\mathbb{P}^* \in \mathscr{Q}_a(R)$.
Es folgt

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)\} \le -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}, \quad \forall t \in [0,T],$$

da der Entropieprozess von $\mathbb{P}^*$ bezüglich $\mathbb{P}$ durch

$$I_t(\mathbb{P}^*\,|\,\mathbb{P}) = \mathbb{E}^*(\vartheta R_t - t\varphi(\vartheta^*)) = \vartheta\,\mathbb{E}^*(R_t) - t\varphi(\vartheta^*) = -t\varphi(\vartheta^*), \quad t \in [0,T],$$

gegeben ist.
Wir zeigen nun die umgekehrte Ungleichung. Es sei $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_a(R)$ beliebig gewählt. R ist unter $\mathbb{Q}$ ein lokales Martingal. Es existiert also eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_n \uparrow T,\ n \to \infty$, so dass $(R_{t\wedge\tau_n})_{t\in[0,T]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist. Aus [JS87], Theorem III.3.4(2) erhalten wir $\mathbb{P}^*_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}} \ll \mathbb{P}_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}$ und es ist

$$\frac{d\,\mathbb{P}^*\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}} = e^{\vartheta^* R_{t\wedge\tau_n} - (t\wedge\tau_n)\varphi(\vartheta^*)}, \quad t \in [0,T].$$

Außerdem ist $\log\left(\frac{d\,\mathbb{P}^*\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}}\right)$ bezüglich $\mathbb{Q}$ integrierbar, denn es ist

$$\left|\log\left(\frac{d\,\mathbb{P}^*\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}}\right)\right| = |\vartheta^* R_{t\wedge\tau_n} - (t\wedge\tau_n)\varphi(\vartheta^*)| \le |\vartheta^*||R_{t\wedge\tau_n}| + t|\varphi(\vartheta^*)| \in L^1(\mathbb{Q}),\ t \in [0,T].$$

Es gilt weiterhin $\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n} \subseteq \mathscr{F}_t$, da $\tau_n \wedge t \le t$. Damit folgt aus Lemma A.2:

$$\begin{aligned} I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) &\overset{A.2.3}{\ge} I_{t\wedge\tau_n}(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \overset{A.2.2}{\ge} \int \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}^*}{d\,\mathbb{P}}\Big|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_n}}\right) d\mathbb{Q} \\ &= \vartheta^*\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(R_{t\wedge\tau_n}) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(t\wedge\tau_n)\varphi(\vartheta^*) = -\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(t\wedge\tau_n)\varphi(\vartheta^*) \\ &\to -t\inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Das Theorem ist somit bewiesen, falls ϑ^* im Inneren von $\Theta_{\text{EXP}}(R,\mathbb{P})$ liegt.
Betrachten wir den Fall, dass ϑ^* am Rand des Intervalls $\Theta_{\text{EXP}}(R,\mathbb{P})$ liegt. Wir werden eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{Q}_a(R)$ definieren, deren Entropieprozess bezüglich $\mathbb{P}$ das Infimum der relativen Entropie auf $\mathscr{Q}_a(R)$ approximiert. Hat das Lévy-Maß ν einen beschränkten Träger, so gilt $\Theta_{\text{EXP}}(R,\mathbb{P}) = \mathbb{R}$. Die Infimumstelle ϑ^* ist also ein innerer Punkt und dieser Fall wurde ausgeschlossen . Also kann man ohne Einschränkung annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl $\operatorname{supp}(\nu)\cap[-n-1,n) \neq \emptyset$, als auch $\operatorname{supp}(\nu)\cap(n,n+1] \neq \emptyset$ gilt.

Sonst wähle man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein hinreichend großes $p \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{supp}(\nu) \cap [-n-p, n) \neq \emptyset$ und $\operatorname{supp}(\nu) \cap (n, n+p] \neq \emptyset$ und gehe zu diesen Intervallen über.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Maßtransformation, gegeben durch die Girsanov-Parameter $(\eta_n, y_n(x))_R = (0, \mathbf{1}_{[-n,n]})$. $y_n(x) \geq 0$ genügt der Integrabilitätsbedingung (1.3.2), also wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\frac{d\,\mathbb{P}_n}{d\,\mathbb{P}} = \mathscr{E}(N)_T \quad \text{für}$$
$$N_t = \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y(x)-1)\tilde{J}_R(\,du,\,dx) = -\int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \mathbf{1}_{[-n,n]^c} J_R(\,du,\,dx) + t\nu([-n,n]^c)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_n \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}_T)$ mit $\mathbb{P}_n \ll \mathbb{P}$ definiert. Unter dem neuen Maß ist R wieder ein Lévy-Prozess mit dem charakteristischen Tripel $(\sigma^2, \nu|_{[-n,n]}, \gamma)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(N)_t &= \exp\{N_t - \frac{1}{2}\langle N^c, N^c\rangle_t\} \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta N_s) e^{-\Delta N_s} \\
&= \exp\{N_t - \sum_{0\leq s\leq t} \Delta N_s\} \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta N_s) \\
&= e^{t\nu([-n,n]^c)} \prod_{0\leq s\leq t} (1+\Delta N_s), \quad t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Für $s \leq t$ ist

$$\Delta N_s(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \Delta R_s(\omega) > n, \\ 0 & \text{falls } \Delta R_s(\omega) \leq n, \end{cases}$$

also kann man $\mathscr{E}(N)_t$ für $t \in [0,T]$ folgendermaßen schreiben:

$$\mathscr{E}(N)_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \Delta R_s(\omega) > n \text{ für ein } 0 < s \leq t, \\ e^{t\nu([-n,n]^c)} & \text{falls } \Delta R_s(\omega) \leq n \text{ für alle } 0 < s \leq t \end{cases}$$

oder

$$\mathscr{E}(N)_t = \frac{d\,\mathbb{P}_n\,|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}\,|_{\mathscr{F}_t}} = \mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)}, \quad B_t^n := \{\omega \in \Omega \,:\, |\Delta R_s(\omega)| \leq n,\ \forall\, 0 < s \leq t\}.$$

Es gilt $\Theta_{\text{EXP}}(R, \mathbb{P}_n) = \mathbb{R}$, damit ist φ_n, gegeben durch

$$\varphi_n(\vartheta) = \log \mathbb{E}_n(e^{\vartheta R_1}) = \log \int_{B_1^n} e^{\vartheta R_1}\, d\,\mathbb{P} - \nu([-n,n]^c),$$

für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$, eine strikt konvexe endliche Funktion mit $\varphi_n(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$.
Wir zeigen, dass eine Teilfolge (φ_{n_k}) existiert, deren Infima gegen das Infimum von φ konvergieren. Da $\nu([-n,n]^c)$ unabhängig von ϑ ist und für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\xi_n(\vartheta) = \log \int_{B_1^n} e^{\vartheta R_1}\, d\,\mathbb{P}$$

betrachten und annehmen, dass φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ strikt konvex mit $\varphi_n(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$ ist. Dann ist ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, wieder eine strikt konvexe, $\mathbb{R}$-wertige Funktion mit $\xi_n(\vartheta) \to \infty$ für $|\vartheta| \to \infty$. Für alle $\vartheta \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(\xi_n(\vartheta))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und konvergiert gegen $\varphi(\vartheta)$, inm Sinne von

- ist $\varphi(\vartheta) = \infty$, so gilt $\xi_n(\vartheta) \to \infty$ für $n \to \infty$,
- ist $\varphi(\vartheta) < \infty$, so gilt $\xi_n(\vartheta) \to \varphi(\vartheta)$ für $n \to \infty$. Denn es gilt

$$\varphi(\vartheta) < \infty \Longleftrightarrow \int_{|x|>1} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) < \infty, \quad \text{also} \quad \int_{|x|>n} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) \to 0, \quad n \to \infty$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi(\vartheta) - \xi_n(\vartheta) &= \varphi(\vartheta) - \varphi_n(\vartheta) + \nu([-n,n]^c)\\ &= \int_{|x|>n} (e^{\vartheta x} - 1)\nu(\,dx) + \nu([-n,n]^c)\\ &= \int_{|x|>n} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Andererseits ist $\varphi(\vartheta) = \infty$ genau dann, wenn

$$\int_{|x|>1} e^{\vartheta x}\nu(\,dx) = \infty \Longleftrightarrow \int_{|x|>1} (e^{\vartheta x}-1)\nu(\,dx) = \infty, \quad \text{also} \quad \int_{1\le|x|\le n} (e^{\vartheta x}-1)\nu(\,dx) \to \infty.$$

$$\begin{aligned}\xi_n(\vartheta) = \varphi_n(\vartheta) + \nu([-n,n]^c) &= \underbrace{\vartheta\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^2 + \int_{|x|\le 1} (e^{\vartheta x} - 1 - x)\nu(\,dx)}_{const}\\ &\quad + \underbrace{\int_{1<|x|\le n} (e^{\vartheta x} - 1)\nu(\,dx)}_{\to\infty} + \nu([-n,n]^c) \to \infty, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Es sei $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ (eindeutig) mit $\xi_n(\vartheta_n) = \inf\{\xi_n(\vartheta) \;:\; \vartheta \in \mathbb{R}\}$. Wir zeigen, dass eine Teilfolge $\xi_{n_k}(\vartheta_{n_k})$ mit $\xi_{n_k}(\vartheta_{n_k}) \to \varphi(\vartheta^*) = \inf\{\varphi(\vartheta) \;:\; \vartheta \in \mathbb{R}\}$ existiert. Dabei unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: $\vartheta_n = \vartheta^*$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall kann man diese Teilfolge wählen und die Behauptung folgt.

Fall 2: $\vartheta_n > \vartheta^*$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Fall 3: $\vartheta_n < \vartheta^*$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Ist die Behauptung für den Fall 2 gezeigt, so folgt sie für den letzten Fall analog. Es sei ohne Einschränkung $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge. Wir zeigen zuerst, dass $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt

ist.
Es gilt $\xi_1(\vartheta) \to \infty$ für $\vartheta \to \infty$, also existiert ein $\bar{\vartheta} > \vartheta_1$, so dass $\xi_1(\bar{\vartheta}) > \varphi(\vartheta^*)$ ist. ϑ_1 ist Infimumstelle von ξ_1. Damit ist ξ_1 streng monoton wachsend in ϑ für alle $\vartheta > \vartheta_1$. Es ist $\vartheta_n \leq \bar{\vartheta}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn sonst würde ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\vartheta_{n_0} > \bar{\vartheta}$ existieren. Damit würden wir

$$\xi_{n_0}(\vartheta^*) \geq \xi_{n_0}(\vartheta_{n_0}) \geq \xi_1(\vartheta_{n_0}) \overset{\vartheta_{n_0} > \bar{\vartheta} > \vartheta_1}{>} \xi_1(\bar{\vartheta}) > \varphi(\vartheta^*).$$

erhalten. Es ist aber $\xi_{n_0}(\vartheta^*) \leq \varphi(\vartheta^*)$, da $(\xi_n(\vartheta))_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $\varphi(\vartheta)$ konvergierende monoton wachsende Folge ist. Dies wäre ein Widerspruch, also gilt $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [\vartheta^*, \bar{\vartheta}]$. Die Folge $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt also eine konvergente Teilfolge und es sei $\vartheta' \geq \vartheta^*$ deren Grenzwert. Ohne Einschränkung bezeichnen wir diese Teilfolge wieder mit $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Angenommen, es gilt $\vartheta' > \vartheta^*$. Dann existiert ein ϑ_0 mit $\vartheta^* < \vartheta_0 < \vartheta_n < \vartheta'$ für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$. Aus der Konvexität von ξ_n folgt, dass ξ_n streng monoton fallend auf dem Intervall $[\vartheta^*, \vartheta']$ ist und damit gilt:

$$\xi_n(\vartheta_0) < \xi_n(\vartheta^*), \quad \forall n \geq n_0.$$

Lässt man n gegen unendlich konvergieren, so erhält man einen Widerspruch zur Minimalität von φ in ϑ^*. Also stimmt ϑ' mit ϑ^* überein und $(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ϑ^* für $n \to \infty$.
Wir zeigen nun, dass $(\xi_n(\vartheta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\varphi(\vartheta^*)$ konvergiert. Es sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $\varphi(\vartheta^*) - \xi_n(\vartheta^*) < \epsilon$ gilt, unter anderem

$$\xi_{n_0}(\vartheta^*) > \varphi(\vartheta^*) - \epsilon. \tag{B.3.1}$$

Außerdem ist für alle $n \geq n_0$

$$\xi_{n_0}(\vartheta_n) \leq \xi_n(\vartheta_n). \tag{B.3.2}$$

Die Funktion ξ_{n_0} ist stetig in ϑ, und da ϑ_n gegen ϑ^* konvergiert, existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ (o.E. $m_0 \geq n_0$), so dass für alle $m \geq m_0$

$$\xi_{n_0}(\vartheta^*) - \epsilon < \xi_{n_0}(\vartheta_m) < \xi_{n_0}(\vartheta^*) + \epsilon. \tag{B.3.3}$$

erfüllt ist. Zusammengefasst erhalten wir für alle $n \geq m_0$

$$\varphi(\vartheta^*) - \epsilon - \epsilon \overset{(B.3.1)}{<} \xi_{n_0}(\vartheta^*) - \epsilon \overset{(B.3.3)}{<} \xi_{n_0}(\vartheta_n) \overset{(B.3.2)}{<} \xi_n(\vartheta_n) < \xi_n(\vartheta^*) \leq \varphi(\vartheta^*).$$

Die Konvergenz folgt, indem man ϵ gegen Null konvergieren lässt.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$\frac{d\,\mathbb{P}_n^*}{d\,\mathbb{P}_n} = e^{\vartheta_n R_T - T\varphi_n(\vartheta)}, \quad \mathbb{P}_n^* \sim \mathbb{P}_n \ll \mathbb{P},$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_n^* \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}_T)$ definiert. Unter $\mathbb{P}_n^*$ ist R ein Lévy-Prozess mit $\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n^*}(R_1) = \varphi_n'(\vartheta_n) = 0$. Damit ist $\mathbb{P}_n^* \in \mathscr{Q}_a(R)$. Für den Prozess der relativen Entropie $(I_t(\mathbb{P}_n^* \mid \mathbb{P}))_{t\in[0,T]}$ gilt:

$$I_t(\mathbb{P}_n^* \mid \mathbb{P}) = \int \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}}\right) d\,\mathbb{P}_n^* = \underbrace{\int \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}\right) d\,\mathbb{P}_n^*}_{-\varphi_n(\vartheta_n)t} + \int \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}}\right) d\,\mathbb{P}_n^*.$$

Wir zeigen, dass das zweite Integral für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}}\right) d\,\mathbb{P}_n^* &= \int_\Omega \log\left(\frac{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}}\right) \frac{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}} \frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}\, d\,\mathbb{P} \\
&= \int_\Omega \log\left(\mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)}\right) \mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)} \frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}\, d\,\mathbb{P} \\
&\overset{(*)}{=} \int_\Omega t\nu([-n,n]^c)\mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)} \frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}\, d\,\mathbb{P} \\
&= t\nu([-n,n]^c) \int_{B_t^n} \frac{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}} \frac{d\,\mathbb{P}_n^*|_{\mathscr{F}_t}}{d\,\mathbb{P}_n|_{\mathscr{F}_t}}\, d\,\mathbb{P} \\
&= t\nu([-n,n]^c)\, \mathbb{P}_n^*(B_t^n) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Es wird gesetzt: $\log 0 \cdot 0 := -\infty \cdot 0 := 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\log\left(\mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)}\right) \mathbf{1}_{B_t^n} e^{t\nu([-n,n]^c)} &= \begin{cases} 0 \log 0 = 0, & \omega \notin B_t^n \\ t\nu([-n,n]^c) e^{t\nu([-n,n]^c)}, & \omega \in B_t^n \end{cases} \\
&= \mathbf{1}_{B_t^n} t\nu([-n,n]^c) e^{t\nu([-n,n]^c)}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also $\lim_{n\to\infty} I_t(\mathbb{P}_n^* \mid \mathbb{P}) = -t \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\},\ t \in [0,T]$, und so gilt

$$\inf\{I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) \,:\, \mathbb{Q} \in \mathscr{E}\} \le -t \inf\{\varphi(\vartheta) \,:\, \vartheta \in \mathbb{R}\}, \quad \forall t \in [0,T].$$

Wir zeigen jetzt die umgekehrte Ungleichung. Hierbei stützen wir uns auf Grundzüge des Beweises von Theorem 3.1 aus [FM03].

Es seien $t \in [0,T]$ beliebig, fest und $\mathbb{Q}_0 \in \mathscr{Q}_a(R)$ mit $I_t(\mathbb{Q}_0|\,\mathbb{P}) < \infty$ beliebig gewählt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_n^*$, ϑ_n, ϑ^* wie vorher, und bezeichnen mit $\mathbb{P}, \mathbb{P}_n, \mathbb{Q}_0$ zur Übersichtlichkeit der Notation die Einschränkungen dieser Maße auf $\mathscr{F}_t$. Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{Q}_0(B_t^n) > 0$ für alle $n \ge n_0$. Wir definieren eine weitere Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ durch die Vorschrift

$$\mathbb{Q}_n(A) := \mathbb{Q}_0(A \mid B_t^n), \quad A \in \mathscr{F}_t.$$

Es sei $A \in \mathscr{F}_t$ eine beliebige Menge mit $\mathbb{P}_n(A) = 0$ und damit $\mathbb{P}_n(B_t^n \cap A) = 0$. Da $\mathbb{Q}_0 \ll \mathbb{P}$, ist auch $\mathbb{Q}_0(B_t^n \cap A) = 0$, d.h. $\mathbb{Q}_n(A) = 0$. Es gilt also $\mathbb{Q}_n \ll \mathbb{P}_n$. Wir berechnen die Dichte $\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\,\mathbb{P}_n}$. Es gilt

$$\mathbb{Q}_n(A) = \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)} \mathbb{Q}_0(A \cap B_t^n).$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_0(A \cap B_t^n) &= \int_{A\cap B_t^n} \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\,d\,\mathbb{P} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\mathbf{1}_{B_t^n}\,d\,\mathbb{P}\\ &= \int_A \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\frac{d\,\mathbb{P}_n}{d\,\mathbb{P}}e^{-t\nu([-n,n]^c)}\,d\,\mathbb{P} = \int_A \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}e^{-t\nu([-n,n]^c)}\,d\,\mathbb{P}_n\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\,\mathbb{P}_n} = \frac{e^{-t\nu([-n,n]^c)}}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}.$$

Der Prozess der relativen Entropie von $\mathbb{Q}_n$ bezüglich $\mathbb{P}_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen den Prozess der relativen Entropie von $\mathbb{Q}_0$ bezüglich $\mathbb{P}$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}I_t(\mathbb{Q}_n|\,\mathbb{P}_n) &= \int_\Omega \log\left(\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\,\mathbb{P}_n}\right)d\mathbb{Q}_n\\ &= \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\int_{B_t^n}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\,\mathbb{P}_n}\right)d\mathbb{Q}_0\\ &= \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\int_{B_t^n}\log\left(\frac{e^{-t\nu([-n,n]^c)}}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\right)d\mathbb{Q}_0\\ &= \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\int_{B_t^n}\left[\log\left(\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\right) - \log\left(\mathbb{Q}_0(B_t^n)e^{t\nu([-n,n]^c)}\right)\right]d\mathbb{Q}_0\\ &= \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\int_{B_t^n}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\right)d\mathbb{Q}_0 - [\underbrace{\log(\mathbb{Q}_0(B_t^n))}_{\to 0} + \underbrace{t\nu([-n,n]^c)}_{\to 0}] \to I_t(\mathbb{Q}_0|\,\mathbb{P})\end{aligned}$$

mit majorisierter Konvergenz, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|\mathbf{1}_{B_t^n}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\right)| \le |\log\left(\frac{d\mathbb{Q}_0}{d\,\mathbb{P}}\right)| \in L^1(\mathbb{Q}_0)$ per Annahme. Mit dem gleichen Argument konvergiert der Erwartungswert von $R_{t\wedge\tau_m}$ unter $\mathbb{Q}_n$ gegen Null, denn es gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$

$$\int_\Omega R_{t\wedge\tau_m}\,d\mathbb{Q}_n = \frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\int_{B_t^n} R_{t\wedge\tau_m}\,d\mathbb{Q}_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega R_{t\wedge\tau_m}\,d\mathbb{Q}_0 = 0.$$

Zusammengefasst erhalten wir:

1. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\int R_{t\wedge\tau_m}\,d\mathbb{Q}_n \to 0$ für $n \to \infty$,
2. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(\tau_m \wedge t) \to \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0}(\tau_m \wedge t)$ für $n \to \infty$,
3. für alle $t \in [0,T]$ gilt $I_t(\mathbb{Q}_n|\,\mathbb{P}_n) \to I_t(\mathbb{Q}_0|\,\mathbb{P})$ für $n \to \infty$,
4. $\varphi_n(\vartheta_n) \to \varphi(\vartheta^*)$, $\vartheta_n \to \vartheta^*$ für $n \to \infty$.

Es sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig, fest. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Zufallsgröße

$$\log\left(\left.\frac{d\,\mathbb{P}_n^*}{d\,\mathbb{P}_n}\right|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_m}}\right) = \vartheta_n R_{t\wedge\tau_m} - (t\wedge\tau_m)\varphi_n(\vartheta_n)$$

bezüglich $\mathbb{Q}_n$ integrierbar, denn es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(|\vartheta_n R_{t\wedge\tau_m} - (t\wedge\tau_m)\varphi_n(\vartheta_n)|) &\leq |\vartheta_n|\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(|R_{t\wedge\tau_m}|) + |\varphi_n(\vartheta_n)|\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(|t\wedge\tau_m|)\\ &\leq |\vartheta_n|\frac{1}{\mathbb{Q}_0(B_t^n)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0}(|R_{t\wedge\tau_m}|) + t|\varphi_n(\vartheta_n)| < \infty,\end{aligned}$$

da $e^{-t\nu([-n,n]^c)} \leq 1$, $R_{t\wedge\tau_m} \in L^1(\mathbb{Q}_0)$. Da $\mathscr{F}_{t\wedge\tau_m} \subseteq \mathscr{F}_t$, gilt weiterhin für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\underbrace{I_t(\mathbb{Q}_n|\,\mathbb{P}_n)}_{\to I_t(\mathbb{Q}_0|\,\mathbb{P})} &\geq I_{t\wedge\tau_m}(\mathbb{Q}_n|\,\mathbb{P}_n)\\ &\geq \int \log\left(\left.\frac{d\,\mathbb{P}_n^*}{d\,\mathbb{P}_n}\right|_{\mathscr{F}_{t\wedge\tau_m}}\right) d\mathbb{Q}_n\\ &= \underbrace{\vartheta_n}_{\to\vartheta^*}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(R_{t\wedge\tau_m})}_{\to 0} - \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_n}(t\wedge\tau_m)}_{\to\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0}(t\wedge\tau_m)}\underbrace{\varphi_n(\vartheta_n)}_{\to\varphi(\vartheta^*)}.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$I_t(\mathbb{Q}_0|\,\mathbb{P}) \geq -\varphi(\vartheta^*)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_0}(t\wedge\tau_m) \to -\varphi(\vartheta^*)t = -t\inf\{\varphi(\vartheta)\ :\ \vartheta\in\mathbb{R}\} \quad \text{für } m\to\infty.$$

Also gilt die zweite Ungleichung und das Theorem ist bewiesen. □

B.4 Beweis des Theorems 2.8

Bemerkung B.1. Es sei $h_a(x) = x\mathbf{1}_{\{|x|\leq a\}}$ für ein $a > 0$. Das zu h_a gehörende charakteristische Tripel bezeichnen wir mit $(\sigma^2, \nu, \gamma(a))$. Ist $\mathbb{Q}$ durch eine Lévy-strukturtreue Maßtransformation mit den Girsanov-Parameter $(\eta, y(x))_R$ aus $\mathbb{P}$ entstanden, so lauten die Martingalbedingungen für R unter $\mathbb{Q}$:

$$\int_{\{|x|>a\}} |x|\nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) < \infty \quad \text{und} \quad \gamma^{\mathbb{Q}}(a) + \int_{\{|x|>a\}} x\nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) = 0.$$

Das charakteristische Tripel $(\sigma^2, \nu^{\mathbb{Q}}, \gamma^{\mathbb{Q}}(a))$ von R unter $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\gamma^{\mathbb{Q}} &= \gamma + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} h(x)(y(x)-1)\nu(\,dx),\\ \nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) &= y(x)\nu(\,dx).\end{aligned}$$

Es sei $b > a$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\vartheta) &= \gamma(a)\vartheta + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta x\mathbf{1}_{\{|x|\leq a\}})\nu(\,dx)\\ &= \gamma(b)\vartheta + \frac{1}{2}\sigma^2\vartheta^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(e^{\vartheta x} - 1 - \vartheta x\mathbf{1}_{\{|x|\leq b\}})\nu(\,dx)\\ &\quad + \vartheta\Big(\gamma(a) - \gamma(b) + \int_{\{a<|x|\leq b\}} x\nu(\,dx)\Big).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\gamma(a) = \gamma(b) - \int_{\{a<|x|\leq b\}} x\nu(\,dx).$$

Beweis:
Wir verfolgen die Schritte des Beweises von Theorem 7 aus [HS06]. Hubalek und Sgarra zeigen das entsprechende Resultat für den Fall eines exponentiellen Lévy-Prozesses.
Es werden acht verschiedene Fälle unterschieden und in jedem Fall explizit ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_e(R) \cap \mathscr{Q}_f(R) \cap \mathscr{Q}_l(R)$ konstruiert.

Fall 1: Der Prozess R habe sowohl positive als auch negative Sprünge, d.h. es existiert ein $a > 0$ mit $\nu((-\infty,-a)) > 0$ und $\nu((a,\infty)) > 0$. Es seien $(\sigma^2, \nu, \gamma(a))$ das charakteristische Tripel von R bezüglich der Abschneidefunktion h_a und

$$\eta = 0, \quad y(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x}, & \text{für } x < -a \\ 1, & \text{für } |x| < a, \\ \frac{\beta}{x}, & \text{für } x > a \end{cases}$$

für gewisse Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Die Funktion y genügt der Integrabilitätsbedingung (1.3.2), durch das Paar $(\eta, y(x))_R$ wird also ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \in \mathscr{Q}_l(R)$ definiert. Es gilt

$$\int_{\{|x|>a\}} |x|\nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) = \int_{\{|x|>a\}} |x|y(x)\nu(\,dx) = \beta\nu((a,\infty) + \alpha\nu((-\infty,-a)) < \infty.$$

Wir bestimmen die Konstanten α und β so, dass die Martingalbedingung unter $\mathbb{Q}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(a) + \int_{\{|x|\leq a\}} x(y(x)-1)\nu(\,dx) + \int_{\{|x|>a\}} xy(x)\nu(\,dx) \\ &= \gamma(a) - \int_{\{x<-a\}} \alpha\nu(\,dx) + \int_{\{x>a\}} \beta\nu(\,dx) = \gamma(a) - \alpha\nu((-\infty,-a)) + \beta\nu((a,\infty)). \end{aligned}$$

Ist $\gamma(a) \geq 0$, so setze man $\beta = 1$ und

$$\alpha = \frac{\gamma(a) + \nu((a,\infty))}{\nu((-\infty,-a))} > 0.$$

Im Fall $\gamma(a) < 0$ setze man $\alpha = 1$ und

$$\beta = \frac{-\gamma(a) + \nu((-\infty,-a))}{\nu((a,\infty))} > 0.$$

Für den Prozess der relativen Entropie gilt

$$\begin{aligned} I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) &= t\int ((y(x)\log y(x) + 1 - y(x))\,\nu(\,dx) \\ &= t\int_{\{x<-a\}} \left(-\frac{\alpha}{x}\log\left(-\frac{\alpha}{x}\right) + 1 + \frac{\alpha}{x}\right)\nu(\,dx) \\ &\quad + t\int_{\{x>a\}} \left(\frac{\beta}{x}\log\left(\frac{\beta}{x}\right) + 1 - \frac{\beta}{x}\right)\nu(\,dx). \end{aligned}$$

Es gilt für $c > 0$ beliebig: $\frac{c}{|x|} \log\left(\frac{c}{|x|}\right) \to 0$ für $|x| \to \infty$, genauso $\frac{c}{|x|} \to 0$ für $|x| \to \infty$. Also sind beide Summanden endlich.

Fall 2: Es gelte $\nu \neq 0$, $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq (0,\infty)$, $\int_{(0,1)} x\nu(\,dx) = \infty$. Man wähle $a > 0$ klein genug, so dass

$$\gamma(a) = \gamma(1) - \underbrace{\int_{a<x<1} x\nu(\,dx)}_{\to\infty \text{ für } a\to 0} < 0$$

und $\nu((a,\infty)) > 0$ erfüllt sind. Es seien

$$\eta = 0 \quad \text{und} \quad y(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq a \\ \frac{\beta}{x}, & \text{für } x > a \end{cases}$$

für $\beta > 0$. Die Funktion y genügt der Integrabilitätsbedingung (1.3.2), also wird durch das Paar $(\eta, y(x))_R$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_l(R)$ definiert. Es gilt

$$\int_{\{|x|>a\}} |x|\nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) = \int_{\{x>a\}} xy(x)\nu(\,dx) = \int_{\{x>a\}} \beta\nu(\,dx) = \beta\nu((a,\infty)) < \infty.$$

Für $\beta = \frac{-\gamma(a)}{\nu((a,\infty))} > 0$ ist die Martingalbedingung

$$0 = \gamma(a) + \int_{\{x\leq a\}} x(y(x)-1)\nu(\,dx) + \int_{\{x>a\}} xy(x)\nu(\,dx) = \gamma(a) + \beta\nu((a,\infty))$$

erfüllt und der Prozess der relativen Entropie von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$

$$I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) = t\int_{\{x>a\}} \left(\frac{\beta}{x}\log\left(\frac{\beta}{x}\right) + 1 - \frac{\beta}{x}\right)\nu(\,dx)$$

ist mittels des gleichen Argument wie im Fall 1 endlich.

Fall 3: Es gelte $\nu \neq 0$, $\operatorname{supp}(\nu) \subseteq (0,\infty)$, $\int_{(0,1)} x\nu(\,dx) < \infty$, $\sigma^2 \neq 0$. Man wähle $h \equiv 0$ als Abschneidefunktion und setze

$$\eta = \frac{-\int_{0<x<1} x\nu(\,dx) - \nu((1,\infty)) - \gamma(0)}{\sigma^2}, \quad y(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Es gilt

$$\gamma^{\mathbb{Q}}(0) = \gamma(0) + \sigma^2\eta = -\int_{0<x<1} x\nu(\,dx) - \nu((1,\infty))$$

und

$$\int_{\{|x|>a\}} |x|\nu^{\mathbb{Q}}(\,dx) = \int_{\{x>1\}} xy(x)\nu(\,dx) = \int_{\{x>1\}} 1\nu(\,dx) = \nu((1,\infty)) < \infty.$$

Die Martingalbedingung

$$0 = \gamma^{\mathbb{Q}}(0) + \int xy(x)\nu(\,dx) = -\int_{0<x<1} x\nu(\,dx) - \nu((1,\infty)) + \int_{0<x<1} x\nu(\,dx) + \nu((1,\infty))$$

ist per Konstruktion erfüllt. Der Prozess der Entropie

$$I_t(\mathbb{Q}|\,\mathbb{P}) = \frac{t}{2\sigma^2}(\gamma(0) - \gamma^{\mathbb{Q}}(0))^2 + t\int_{\{x>1\}} \left(\frac{1}{x}\log\left(\frac{1}{x}\right) + 1 - \frac{1}{x}\right)\nu(\,dx)$$

ist endlich.

Fall 4: Es gelte $\nu \neq 0$, $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq (0,\infty)$, $\int_{(0,1)} x\nu(\,dx) < \infty$, $\sigma^2 = 0$ und $\gamma(0) < 0$. Es existiert ein $a > 0$, so dass

$$\gamma(a) = \gamma(0) + \int_{0\le x\le a} x\nu(\,dx) < 0$$

und $\nu((a,\infty)) > 0$ erfüllt sind. Man führe die gleiche Maßtransformation wie im Fall 2 durch.

Fall 5: Ist R eine Brownsche Bewegung mit Drift, so ist die Aussage klar.

Die letzten drei Fälle

Fall 6: $\nu \neq 0$, $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq (-\infty,0)$, $\int_{(-1,0)} x\nu(\,dx) = -\infty$,

Fall 7: $\nu \neq 0$, $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq (-\infty,0)$, $\int_{(-1,0)} x\nu(\,dx) > -\infty$, $\sigma^2 \neq 0$ und

Fall 8: $\nu \neq 0$, $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq (-\infty,0)$, $\int_{(-1,0)} |x|\nu(\,dx) < \infty$, $\sigma^2 = 0$ und $\gamma(0) > 0$

werden analog zu den Fällen 2, 3 und 4 behandelt. □

C. VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN UND SYMBOLE

$\mathscr{B}(\cdot)$	Borel-σ-Algebra
$B = (B_t)_{t\in[0,T]}$	Preisprozess eines Bonds
ΔX_t	Sprung des Lévy-Prozesses zur Zeit t
$\frac{d\mathbb{Q}}{d\,\mathbb{P}}$	Radon-Nikodým-Dichte von $\mathbb{Q}$ bzgl. $\mathbb{P}$
$\mathbb{E}(\cdot)$	Erwartungswert
$\mathscr{E}(\cdot)$	stochastisches Exponential
ESMM	die Esscher-Martingaltransformierte
η	deterministischer Girsanov-Parameter
$(\eta, y(x))_X$	Girsanov-Parameter
φ	kumulantenerzeugende Funktion von X_1
$\mathscr{F} = \mathscr{F}_T$	σ-Algebra
$\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$	von X erzeugte Filtration
$\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$	$\mathbb{P}$-Vervollständigung der von X erzeugten Filtration
f.s.	fast sicher
FTAP	Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung
$I(\cdot \mid \cdot)$	relative Entropie
$(I_t(\cdot \mid \cdot))_{t\in[0,T]}$	Prozess der relativen Entropie
J_X	Sprungmaß des Lévy-Prozesses X
$\tilde{J}_X$	kompensiertes Sprungmaß des Lévy-Prozesses X
κ	siehe Seite 38
$L^1(\cdot)$	Raum der integrierbaren Zufallsgrößen
$\mathscr{L}(\cdot)$	stochastischer Logarithmus
$\mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}), \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathscr{F})$
MEMM	das äquivalente Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0)
NFLVR	keine Arbitragemöglichkeit mit verschwindendem Risiko

ν	Lévy-Maß
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P}, S)$	exponentielles Lévy-Modell
$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\mathscr{P}_X$	von X erzeugte Exponentialfamilie
$\mathbb{P}^{\mathrm{ESMM}}$	das Esscher-Martingalmaß
$\mathbb{P}^{\mathrm{MEMM}}$	das äquivalente Martingalmaß mit der minimalen relativen Entropie
ψ	Lévy-Exponent
$\mathscr{Q}_a(X)$	Menge der zu $\mathbb{P}$ absolutstetigen Martingalmaße
$\mathscr{Q}_e(X)$	Menge der zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Martingalmaße
$\mathscr{Q}_f(X)$	Menge der zu $\mathbb{P}$ absolutstetigen Martingalmaße mit endlicher Entropie
$\mathscr{Q}_l(X)$	Menge der zu $\mathbb{P}$ absolutstetigen Martingalmaße, unter denen X ein Lévy-Prozess ist
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
r	Zinsrate
$S = (S_t)_{t\in[0,T]}$	Preisprozess eines Finanzproduktes
(σ^2, ν, γ)	charakteristische Tripel des Lévy-Prozesses X
$\mathrm{supp}(\cdot)$	Träger des Maßes
T	Zeithorizont
$\Theta_{\mathrm{EXP}}(X, \mathbb{P})$	Definitionsbereich der kumulantenerzeugenden Funktion
$\Theta^1_{\mathrm{EXP}}(X, \mathbb{P})$	siehe Seite 32
$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$	lokalisierende Folge von Stoppzeiten
W_t	Standard Wiener-Prozess
X_{t-}	linker Grenzwert von X zur Zeit t
$y(x)$	Girsanov-Parameter
$(\langle \cdot, \cdot \rangle_t)_{t\in[0,T]}$	Prozess der quadratischen Variation
$\#$	Kardinalität der Menge
$\stackrel{d}{=}$	Gleichheit in Verteilung

LITERATURVERZEICHNIS

[AS94] C. Ansel and C. Stricker. Couverture des actifs contingents et prix maximum. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 2:303–315, 1994.

[Cha99] T. Chan. Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes. *Annals of Applied Probability*, 9:504–528, 1999.

[CM03] A.S. Cherny and V.P. Maslov. On minimization and maximization of entropy in various disciplines. *Theory Probab. Appl.*, 48:447–464, 2003.

[CS02] A.S. Cherny and A.N. Shiryaev. Change of time and measure for lv́y processes. *Lectures for the summer schools "From levy Processes to Semimartingales - Recent Theoretical Developments and Apllications to Finance"*, 2002.

[Csi75] I. Csiszár. i-divergence geometry of probability distributions and minimization problems. *The Annals of Probability*, 3:146–158, 1975.

[CT03] R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman & Hall/Crc Financial Mathematics Series, 2003.

[DCD86] D. Dacunha-Castelle and M. Duflo. *Probability and statistics.* Springer-Verlag, 1986.

[DS94] F. Delbaen and W. Schachermeyer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 3:463–520, 1994.

[DS98] F. Delbaen and W. Schachermeyer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen*, 2:215–260, 1998.

[ES05] F. Esche and M. Schweizer. Minimal entropy preserves the lévy property: How and why. *Stochastic Processes and their Applications*, 115:299–327, 2005.

[Esc03] F. Esche. *Two Essays on Incomplete Markets.* PhD thesis, Technical University of Berlin, 2003.

[Ess32] F. Esscher. On the probability function in the collective theory of risk. *Skand. Aktuarie Tidskr.*, 15:175–195, 1932.

[FM03] T. Fujiwara and Y. Miyahara. The minimal entropy martingale measures for geometric lévy processes. *Finance and Stochastics*, 7:509–531, 2003.

[Fri00] M. Frittelli. The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets. *Mathematical Finance*, 10:39–52, 2000.

[FS91] H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. *Applied Stochastic Analysis*, 5:389–414, 1991.

[GK00] T. Goll and J. Kallsen. Optimal portfolios for logarithmic utility. *Stochastic Processes and their Applications*, 89:31–48, 2000.

[GR01] T. Goll and L. Rüschendorf. Minimax and minimal distance martingale measures and their relationship to portfolio optimization. *Finance and Stochastics*, 5:557–581, 2001.

[GS94] H. U. Gerber and E. S. Shiu. Option pricing by Esscher transforms. *Transactions of the Society of Actuaries*, XLVI:99–191, 1994.

[HS06] F. Hubalek and C. Sgarra. Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential lévy models. *Quantitative Finance*, 6, 2006.

[JS87] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[KS97] U. Küchler and M. Sørensen. *Exponential families of stochastic processes*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[KS02] J. Kallsen and A. N. Shiryaev. The cumulant process and Esscher's change of measure. *Finance and Stochastics*, 6:397–428, 2002.

[Miy99] Y. Miyahara. Minimal entropy martingale measures of jump type price processes in incomplete assets markets. *Asia-Pacific Financial Markets*, 6:97–113, 1999.

[Sat99] K.-I. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Sid79] R. Sidibè. Martingales locales à accroissements indèpendants. *Sèminaire de Probabilitès XIII, 1977/78*, 721:132–137, 1979.