Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

1. Übung, 19. 04. 2006

1. Es sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit F als Verteilungsfunktion. Man zeige:

   a) Die Menge
   $$I_F := \{u \in R_1 | \int_{R_1} \exp(ux) F(dx) < \infty\}$$
   ist ein Intervall, das die Null enthält.

   b) Ist $0 \in \overset{o}{I}_F$ so ist die Funktion
   $$\psi_F(u) := ln \int_{R_1} \exp(ux) F(dx)$$
   auf $\overset{o}{I}_F$ unendlich oft differenzierbar mit $\psi'(0) = EX$ und $\psi''(0) = D^2 X$.
   ψ_F heißt Kumulantenfunktion der Verteilungsfunktion F.

   c) Durch
   $$F_u(x) := \int_{-\infty}^{x} \exp[ux - \psi_F(u)] dF(x)$$
   ist eine Familie $(F_u | u \in I_F)$ von Verteilungsfunktionen definiert, die sogenannte von F erzeugte Exponentialfamilie.

   d) Man berechne Erwartungswert und Streuung von X bezüglich F_u.

   e) Man gebe die von folgenden Verteilungsfunktionen erzeugten Exponentialfamilien an:
   $\mathrm{Exp}(\lambda)$, Poisson $(\lambda), \Gamma(\alpha, \lambda), \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

2. Der Poissonprozess $(N_t, t \geq 0)$ mit dem Parameter $\lambda > 0$ ist ein stochastischer Prozess mit

i) $N_0 = 0 \quad P_\lambda$-fast sicher

ii) Für alle $t_0, t_1, \cdots, t_n$ mit $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ sind die Zuwächse $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, k = 1, \cdots, n$ voneinander unabhängig.

iii) $N_t - N_s \sim$ Poisson $(\lambda(t-s))$.

a) Man berechne für $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ und für $s < t$ die Wahrscheinlichkeiten $P_\lambda(N_{t_1} = i_1, \cdots, N_{t_n} = i_n)$ und $P_\lambda(N_s = i | N_t = j)$.

b) Die Werte $N_s, s \leq t$ mögen beobachtet worden sein. Auf der Basis dieser Werte konstruiere man einen Schätzer für λ.

3. Es sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathscr{P})$ ein statistisches Modell mit $\mathscr{P} = (P_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$ und mit einem dominierenden Wahrscheinlichkeitsmaß P. Weiterhin sei $\mathscr{H}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{F}$.
Man zeige, dass für jede positive Zufallsgröße Y gilt:

$$\begin{aligned} E_\vartheta(Y|\mathscr{H}) &= \frac{E[L(\vartheta)Y|\mathscr{H}]}{E[L(\vartheta)|\mathscr{H}]} \qquad && \text{auf } \{E[L(\vartheta)|\mathscr{H}] > 0\} \\ &= 0 && \text{auf } \{E[L(\vartheta)|\mathscr{H}] = 0\} \end{aligned}$$

4. Es seien P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{F})$ und $\mathscr{H}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathfrak{F}$. Beweisen Sie:
Wenn Q absolutstetig zu P ist, so ist $Q|_{\mathscr{H}}$ absolutstetig zu $P|_{\mathscr{H}}$, und es gilt

$$\frac{dQ|_{\mathscr{H}}}{dP|_{\mathscr{H}}} = E_P\Big(\frac{dQ}{dP}|\mathscr{H}\Big)$$

Folgerung: Ist $(\mathscr{H}_n)$ eine wachsende Folge von Teil-σ-Algebren von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{F} = \bigvee_n \mathscr{H}_n$, so gilt

$$\frac{dQ}{dP} = \lim_{n\to\infty} \frac{dQ_n}{dP_n}$$

mit $Q_n = Q|_{\mathscr{H}_n}, P_n = P|_{\mathscr{H}_n}$. Begründung?