Skript und Ergänzungen für '"Variationsrechnung und Optimale Steuerungen"

Bernd Kummer

11. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Variationsrechnung, The basic problem and conditions of first order 3
1.1 The Euler equation . . . 3
1.2 Hilbert's approach . . . 5
1.3 Extensions . . . 5
1.3.1 Higher derivatives . . . 5
1.3.2 Higher dimensions . . . 6
1.4 Different boundary conditions . . . 6
1.4.1 No boundary conditions . . . 6
1.4.2 Adding some function . . . 6
1.4.3 Free right boundary . . . 7
1.5 Isoperimetric problems . . . 7
1.6 Constraints along the curve . . . 8
1.7 Constraints as boundary conditions . . . 10
1.8 Eulersche Gleichung für Funktionen von zwei Variablen. . . . 12
1.9 Konvexität der Zielfunktion . . . 13
1.10 Weierstraß-Erdmannsche Eckenbedingung . . . 13

2 Variationsrechnung, Bedingungen zweiter Ordnung 15
2.1 Legendre-Jacobi-Bedingungen für nichtnegative 2.Variation . . . 15
2.2 Ergaenzungen . . . 18
2.2.1 Positive Hilfsfunktion . . . 18
2.2.2 Unlösbarkeit . . . 19

3 Optimalsteuerung, Hamilton-Funktion und adjungiertes System 21
3.1 Abschätzungen . . . 21
3.1.1 Gronwall's Lemma . . . 21
3.1.2 A-priory Abschätzung . . . 22
3.1.3 Analog für Lipschitz-Gleichungen . . . 22
3.1.4 Abschätzung von Lösungen einer gestörten DGL . . . 23
3.2 Die linearsierte DGL . . . 24
3.3 Die Lagrange-Bedingung . . . 25
3.3.1 Die allgemeine Form . . . 25
3.3.2 Differenzierbarer Lagrange Multiplikator . . . 25
3.4 Lagrange Funktion als Integral der Hamilton Funktion . . . 27
3.5 Zurück zu Steuerungen . . . 29
3.6 Grundlegende Abschätzungen der Zielfunktion . . . 30
3.7 Maximum-Bedingung . . . 31
3.7.1 Abschätzung für Trajektorien . . . 32
3.7.2 Variationsaufgabe als Steuerungsaufgabe . . . 33

3.7.3 Steuerungsaufgabe als Variationsaufgabe . . . 33
3.7.4 Bedingungen an den Endpunkt, Transversalitätsbedingung . . . 34
3.7.5 Variable Endzeit . . . 35
3.7.6 Fester Endpunkt bei variabler Zeit . . . 36
3.7.7 Phasenbedingungen . . . 36
3.8 Lineare zeitoptimale Probleme mit gegebenem Endpunkt . . . 37
3.8.1 Bang-bang-Prinzip . . . 38
3.8.2 Die Zahl der Umschaltpunkte . . . 39
3.9 Feedback-Steuerung (Rückkoppelung) . . . 40
3.10 Ansatz mittels dynamische Optimierung . . . 41
3.10.1 Ansatz über dynamische Optimierung I . . . 41
3.10.2 Ansatz über dynamische Optimierung II . . . 42
3.11 Beispiele . . . 43
3.11.1 Federaufgabe . . . 43
3.11.2 Lösung weiche Mond-Landung, zeitoptimal . . . 44
3.12 Diskretisierung für Standard-Aufgabe; fester Endpunkt, keine Endbedingung . . . 44

4 Einige Grundlagen der Funktionalanalysis 47
4.1 Banach Räume . . . 47
4.1.1 Konvergenz-Begriffe . . . 47
4.1.2 Typen von Banach Räumen . . . 47
4.1.3 Adjungierter Operator . . . 48
4.1.4 Trennungssatz . . . 48
4.1.5 Weitere grundlegende Sätze . . . 49
4.1.6 Der Banach Raum der stetigen Funktionen . . . 50
4.1.7 Projektionen im Hilbert Raum . . . 51
4.1.8 Riesz-Schauder Theorie linearer vollstetiger Operatoren . . . 52
4.2 Minimax, Subdifferential und gestörte Extremalaufgaben . . . 53
4.2.1 Subdifferenzierbarkeit . . . 55
4.2.2 Zusätzliche lineare Gleichung . . . 55
4.2.3 Spezialfall linearer Funktionen und Hahn-Banach Satz . . . 56
4.2.4 Stetigkeit des Extremalwertes . . . 56
4.2.5 Folgerung aus starker Dualität für stetig differenzierbare Funktionen . . . 56
4.2.6 Nichtkonvexe Probleme . . . 57
4.3 Lipschitz-stabile Lösungen über modifizierte sukzessive Approximation . . . 58
4.3.1 Konstruktion über modifizierte sukzessive Approximation . . . 58
4.3.2 Sätze von (Lyusternik / Graves) und Polyak . . . 59

5 Einige Elemente nichtglatter Analysis 60
5.1 Ekeland's variational principle . . . 60
5.2 Reformulierung einer Steuerungsaufgabe mittes Multifunktionen . . . 61
5.3 E. Michael's selection Theorem . . . 61
5.4 Messbare Multifunktion F in endlich dimensionalen Räumen . . . 64
5.5 Lipschitz stetige Selektionen . . . 65
5.6 Stetigkeit des Lagrange Multiplikators . . . 66

Index 68

Literatur 69

1 Variationsrechnung, The basic problem and conditions of first order

Assumptions:
We suppose that $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ and $a < b$ are given and $x = x(t) \in C^1(a,b)$ is a searched real function, continuous on $[a,b]$. We study the problem

$$\min_x \; J(x); \qquad J(x) := \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t)\; dt \tag{1.1}$$

with boundary conditions $x(a) = A,\; x(b) = B$. If $|\dot{x}(t)| \to \infty$ for $t \to a$ or $t \to b$, we suppose that the (improper Riemann-) integral still exists.

1.1 The Euler equation

To derive a basic necessary optimality condition (Euler's equation (1.11)), let $\bar{x}$ be a (local) solution and $u = u_\varepsilon$ be any function

$$u \in C^1(a,b) \text{ such that } u(t) = 0 \;\text{ if }\; t \notin I_\varepsilon := [a+\varepsilon,\; b-\varepsilon] \tag{1.2}$$

For fixed ε and real λ we consider the function $\bar{x} + \lambda u$ and

$$J(\bar{x}+\lambda u) - J(\bar{x}) = \int_a^b [\; f(\bar{x}(t)+\lambda u(t),\; \dot{\bar{x}}(t)+\lambda \dot{u},\; t) \;-\; f(\bar{x}(t),\; \dot{\bar{x}}(t),\; t)\;]\; dt. \tag{1.3}$$

We shall determine $\frac{d}{d\lambda} J(\bar{x}+\lambda u)$ at 0 and use that this derivative has to vanish. The function $u \mapsto \frac{d}{d\lambda} J(\bar{x}+\lambda u)(0)$ is also called the *first variation* of J and denoted by δJ.
Let us abbreviate

$$p(t) = (\bar{x}(t),\; \dot{\bar{x}}(t),\; t).$$

The integrand vanishes outside I_ε. On I_ε, the functions u and $\dot{u}$ as well as

$$t \mapsto f(\bar{x}(t)+\lambda u(t),\; \dot{\bar{x}}(t)+\lambda\dot{u},\; t) \;\text{ and }\; t \mapsto f(p(t))$$

are continuous and bounded. So we may estimate

$$f(\bar{x}(t)+\lambda u(t),\; \dot{\bar{x}}(t)+\lambda\dot{u},\; t) - f(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), t) \;=\; \lambda\; Df(\theta_{t,\lambda})(u(t), \dot{u}(t), 0)$$

by the mean-value theorem, where $\theta_{t,\lambda}$ is some point of the line-segment $L_{t,\lambda}$ between

$$(\bar{x}(t)+\lambda u(t),\; \dot{\bar{x}}(t)+\lambda\dot{u},\; t) \;\text{ and }\; p(t).$$

Since $t \in I_\varepsilon$, all segments $L_{t,\lambda}$ belong to a compact set in $\mathbb{R}^3$, and it follows

$$\|\theta_{t,\lambda} - p(t)\| \le \delta(\lambda) \qquad \text{where } \delta(\lambda) \to 0 \text{ if } \lambda \to 0$$

and, since Df is uniformly cont. near $I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, there holds an estimate

$$\|Df(\theta_{t,\lambda}) - Df(p(t))\| \le O(\lambda) \text{ where } O(\lambda) \to 0 \text{ if } \lambda \to 0.$$

Thus

$$\begin{array}{c} J(\bar{x}+\lambda u) - J(\bar{x}) = \lambda \int_{I_\varepsilon} Df(\theta_{t,\lambda})(u(t), \dot{u}(t), 0)\; dt \\ = \lambda\; [\; \int_{I_\varepsilon} Df(p(t))\; (u(t), \dot{u}(t), 0)\; dt \;\; + r(\lambda)\;] \\ \text{where} \\ |r(\lambda)| \le O(\lambda) \max_{I_\varepsilon} \|(u(t), \dot{u}(t), 0)\|. \end{array} \tag{1.4}$$

The maximum on I_ε is bounded by some constant K_u, hence (1.3) can be written as

$$J(\bar{x}+\lambda u) - J(\bar{x}) = \lambda \int_{I_\varepsilon} Df((p(t))\,(u(t), \dot{u}(t), 0)\; dt \;+\; o(\lambda) \qquad \text{where } o(\lambda)/\lambda \to 0. \tag{1.5}$$

Since $\bar{x}$ was a solution, it holds

$$\frac{dJ(\bar{x}+\lambda u)}{d\lambda}(0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{J(\bar{x}+\lambda u) - J(\bar{x})}{\lambda} \;=\; 0, \tag{1.6}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \textstyle\int_{I_\varepsilon} Df(p(t))\ (u(t), \dot{u}(t), 0)\ dt \\ &= \textstyle\int_a^b Df(p(t))\ (u(t), \dot{u}(t), 0)\ dt \\ &= \textstyle\int_a^b f_x(p(t))\ u(t) + \ f_{\dot{x}}(p(t))\ \dot{u}(t)\ dt \end{aligned} \tag{1.7}$$

with partial derivatives f_x and $f_{\dot{x}}$. This holds for all $\varepsilon > 0$ and all $u = u_\varepsilon$ from (1.2).

Fundamentallemma (Lemma of Du Bois Reymond):
Next assume that $f_{\dot{x}}(p(t))$ is continuously differentiable w.r.to t on (a, b). Then we obtain by partial integration on I_ε

$$\int_{I_\varepsilon} f_{\dot{x}}(p(t))\ \dot{u}(t)\ dt = [\ f_{\dot{x}}(p(t))\ u(t)\ ]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\ - \int_{I_\varepsilon} \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ u(t)\ dt \tag{1.8}$$

and, using (1.2), also

$$\int_{I_\varepsilon} f_{\dot{x}}(p(t))\ \dot{u}(t)\ dt = \int_a^b f_{\dot{x}}(p(t))\ \dot{u}(t)\ dt = \ -\int_a^b \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ u(t)\ dt. \tag{1.9}$$

This way we obtain from (1.7), for the current arguments $p(t) = (\bar{x}(t),\ \dot{\bar{x}}(t),\ t)$, the necessary optimality condition

$$0 \;=\; \int_a^b [\ f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ ]\ u(t)\ dt \qquad \text{for all } u \text{ in (1.2)}. \tag{1.10}$$

Lemma 1.1. *The equation (1.10) can only hold for all u in (1.2) if the continuous factor fulfills Euler's equation*

$$E(t) := f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t)) = 0 \quad \forall t \in (a, b). \tag{1.11}$$

Beweis. Otherwise there is, by continuity, some $\tau \in (a, b)$ with $E(\tau) \neq 0$, say $E(\tau) > 0$. Then $E > 0$ remains true for all t in some interval $I(\tau, \delta) = (\tau - \delta,\ \tau + \delta)$ which, for small ε, belongs to I_ε. Taking any function u_ε which is positive on $I(\tau, \delta)$ and zero on $I_\varepsilon \setminus I(\tau, \delta)$, we obtain

$$0\ \neq \int_a^b E(t)\ u(t)\ dt. \tag{1.12}$$

in contradiction to (1.10). Similarly one can exclude that $E(\tau) < 0$. A related function $u = u_\varepsilon$ (sufficiently smooth) can be easily found, e.g. with $n \geq 2$ by the non-negative product

$$u(t) = \begin{cases} (t - (\tau - \delta))^n\ ((\tau + \delta) - t)^n & \text{if } \tau - \delta \leq t \leq \tau + \delta, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

In consequence, (1.11) holds true. $\square$

The curves which satisfy the Euler equation are often called extremal. However, because these curves are not necessarily extremal for our objective function $J = J(x)$, we shall avoid this notation.

1.2 Hilbert's approach

Using Hilbert's approach, the assumption of $f_{\dot x}(p(t))$ being continuously differentiable w.r. to t on (a,b) can be weakened.

Now, to derive the condition (1.11) we will only need that $f_x(p(t))$, $f_{\dot x}(p(t))$ are continuous on (a,b) which is ensured by $f \in C^1$ and $\bar x$, $\dot{\bar x} \in C^1(a,b)$:

Beweis. Let $V(t) = \int_{a+\varepsilon}^t f_x(p(s))ds$. Then we have $\dot V(t) = f_x(p(t))$ and

$$\int_{I_\varepsilon} f_x(p(t))\ u(t)\ dt = [V(t)\ u(t)]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\ - \int_{I_\varepsilon} V(t)\ \dot u(t)\ dt = -\int_{I_\varepsilon} V(t)\ \dot u(t)\ dt.$$

Thus (1.7) means

$$0\ = \int_a^b\ f_x(p(t))\ u(t) +\ f_{\dot x}(p(t))\ \dot u(t)\ dt = \int_{I_\varepsilon}\ [f_{\dot x}(p(t)) - V(t)]\ \dot u(t)\ dt. \tag{1.13}$$

This implies (with nonsmooth trapez-functions u) that

$$f_{\dot x}(p(t)) - V(t) \quad \text{is a constant function.}$$

Indeed, let

$$g(t) = f_{\dot x}(p(t)) - V(t).$$

Consider, for $a < \tau_1 < \tau_2 < b$, small δ-intervals $I(\tau_i,\delta) = [\tau_i - \delta, \tau_i + \delta]$. Let u be first constant zero, then linearly increasing with $\dot u = h/\delta$ on $I(\tau_1,\delta)$, then constant $2\delta h/\delta = 2h$, next decreasing with $\dot u = -h/\delta$ on $I(\tau_2,\delta)$ and finally again zero. This yields (for small ε)

$$\int_{I_\varepsilon} g(t)\ \dot u(t)\ dt = h\ \frac{\int_{I(\tau_1,\delta)} g(t)\ dt}{\delta}\ -\ h\ \frac{\int_{I(\tau_2,\delta)} g(t)\ dt}{\delta}.$$

Hence, the left integral is only zero for all such trapez-functions u if (let $\delta \to 0$) $g(\tau_1) = g(\tau_2)$. After smoothing the functions u sufficiently precise, such that $\alpha > 0$ is small and

$$\left| \frac{\int_{I(\tau_i,\delta)} g(t)\ \dot u(t)\ dt}{\delta}\ -\ \frac{\int_{I(\tau_i,\delta)} g(t)\ \dot u_{smooth}(t)\ dt}{\delta} \right| < \alpha$$

one sees that $g(\tau_1) = g(\tau_2)$ must also hold if (1.13) is valid for all u from (1.2). In other words, g is necessarily constant.

Thus $f_{\dot x}(p(t)) = c + V(t)$ is the sum of two C^1 functions and differentiable, too. Via

$$0 = \frac{d}{dt}[\ f_{\dot x}(p(t)) - V(t)\ ] = \frac{d}{dt} f_{\dot x}(p(t))\ - f_x(p(t))$$

so (1.11) is shown. □

1.3 Extensions

1.3.1 Higher derivatives

For problems with involved higher derivatives like

$$\min_x\ J(x); \qquad J(x) := \int_a^b\ f(x(t),\ x'(t),\ x''(t)),\ t)\ dt \tag{1.14}$$

with boundary conditions $x(a) = A$, $x(b) = B$, $x'(a) = A'$, $x'(b) = B'$ and the related differentiability, we derive, as for (1.7),

$$0 = \int_a^b\ f_x(p(t))\ u(t) +\ f_{x'}(p(t))\ u'(t)\ +\ f_{x''}(p(t))\ u''(t)\ dt \tag{1.15}$$

and apply partial integration

$$\int_a^b \quad f_{x''}(p(t))\ u''(t)\ dt = -\int_a^b \quad \frac{d}{dt} f_{x''}(p(t))\ u'(t)\ dt. \tag{1.16}$$

This way we obtain the condition

$$E_f(t) := f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{x'}(p(t)) \ + \frac{d^2}{dt^2} f_{x''}(p(t)) \ = 0 \qquad \forall t \in (a, b). \tag{1.17}$$

Similarly, higher derivatives can be involved; the signs at $\frac{d^k}{dt^k} f_{x^{(k)}}(p(t))$ alternate.

1.3.2 Higher dimensions

If $x(t) \in \mathbb{R}^n$ in problem (1.1) then, by variation of $x_i = x_i(t)$ and fixing the other functions, one obtains

$$E_f^i(t) := f_{x_i}(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}_i}(p(t)) \quad = 0 \qquad \forall t \in (a, b),$$

hence again, but now in vector description,

$$E_f(t) := f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t)) \quad = 0 \qquad \forall t \in (a, b). \tag{1.18}$$

The Euler equation describes now a system of usual differential equations. In the same manner the results on different boundary conditions in 1.4 can be extended.

1.4 Different boundary conditions

1.4.1 No boundary conditions

If no condition for $x(b)$ is required in problem (1.1) we may assume that

$$u \in C^2 \text{ is constant near } a \text{ and } b,\ u(0) = 0 \text{ and } u(b) \text{ is arbitrary.} \tag{1.19}$$

Then formula (1.9) becomes

$$\int_a^b f_{\dot{x}}(p(t))\ \dot{u}(t)\ dt = [f_{\dot{x}}\ u]_a^b \ - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ u(t)\ dt = f_{\dot{x}}(b)\ u(b)\ - \int_a^b \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ u(t) \tag{1.20}$$

and leads us to the necessary optimality condition

$$0 \ = f_{\dot{x}}(b)\ u(b)\ + \int_a^b [\ f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t))\ ]\ u(t)\ dt \qquad \text{for all } u \text{ in (1.19).} \tag{1.21}$$

With $u(b) = 0$ as before, it follows that (1.11) holds true,

$$E(t) := f_x(p(t)) - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(p(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

and, in addition (considering all $u(b) \neq 0$ and using that the integral vanishes),

$$f_{\dot{x}}(p(b)) = 0. \tag{1.22}$$

Similarly free $x(a)$ can be handled.

1.4.2 Adding some function

Sometimes one studies the sum of an integral and an usual function

$$\min_x \ J(x); \qquad J(x) := \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t)\ dt \quad + \ G(x(b)) \tag{1.23}$$

where $x(b)$ is not restricted and $G \in C^1$. Now, in (1.21) the term

$$DG(\bar{x}(b)\ u(b) = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[G(\bar{x}(b) + \lambda u(b) - G(\bar{x})]$$

must be added and changes condition (1.22) into

$$f_{\dot{x}}(p(b)) + DG(\bar{x}(b)) = 0. \tag{1.24}$$

1.4.3 Free right boundary

If, in section 1.4.2 also b can be arbitrarily taken and $G(x(b), b)$ is added, we obtain for optimal $(\bar{x}, \bar{b})$ the necessary Euler conditions (1.11) with $b = \bar{b}$ and

$$f_{\dot{x}}(p(\bar{b})) + G_x(\bar{x}(\bar{b}), \bar{b}) = 0 \tag{1.25}$$

since $\bar{x}$ is optimal for fixed $\bar{b}$, too. Because also b can be changed, we also obtain that the derivative of the objective w.r.t. to b vanishes at $\bar{b}$, i.e.,

$$0 = f(p(\bar{b})) \ + \ G_x(\bar{x}(\bar{b}), \bar{b}) \ \dot{\bar{x}}(\bar{b}) + G_b(\bar{x}(\bar{b}), \bar{b}). \tag{1.26}$$

Of course, we need that the optimal curve can be differentiable extended to $b = \bar{b} + \varepsilon$.

Using (1.25), condition (1.26) can be also written, with derivatives/values at $p(\bar{b})$, $\bar{x}(\bar{b})$ and $\bar{b}$, as

$$0 = f \ - \ f_{\dot{x}} \ \dot{x} + G_b \ . \tag{1.27}$$

1.5 Isoperimetric problems

Now we consider the problem

$$\min J(x) := \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t), t)dt \quad \text{such that } J_g(x) := \int_a^b g(x(t), \dot{x}(t), t)dt = c. \tag{1.28}$$

with boundary conditions $x(a) = A, \ x(b) = B$ and given c. Our initial assumptions concerning f are now also imposed to g.

Theorem 1.1. *Let $\bar{x}$ be a solution which does not satisfy the Euler equation for J_g, i.e.,*

$$E_g(t) := g_x(p(t)) - \frac{d}{dt} g_{\dot{x}}(p(t)) \ \ \textit{is not identical zero } (a, b). \tag{1.29}$$

Then there is some (Lagrange multiplier) $\mu \in \mathbb{R}$ such

$$E_{f+\mu g}(t) := f_x(p(t)) + \mu g_x(p(t)) \ \ - \frac{d}{dt}(f_{\dot{x}}(p(t) + \mu g_{\dot{x}}(p(t)) = 0 \quad \forall t \in (a, b). \tag{1.30}$$

Recall that $p(t) = (\bar{x}(t), \ \dot{\bar{x}}(t), \ t)$.

Beweis. We consider points (functions)

$$y(\lambda) = \bar{x} + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$

where $\lambda_i \in \mathbb{R}$ and u_i satisfy (1.2). Since $E_g(t)$ is not identical zero, we find u_2 such that

$$0 \ \neq \int_a^b E_g(t) \ u_2(t) \ dt.$$

Using this u_2 and any u_1, put

$$j_g(\lambda_1, \lambda_2) = \int_a^b g(y(t), \dot{y}(t), t)dt, \quad \text{similarly} \quad j_f(\lambda_1, \lambda_2).$$

Then

$$\frac{\partial j_g}{\partial \lambda_i}(0) = \int_a^b E_g(t) \ u_i(t)dt \quad \text{and} \quad \frac{\partial j_g}{\partial \lambda_2}(0) \neq 0.$$

So the implicit function theorem may be applied to the equation $j_g(\lambda_1, \lambda_2) = c$. Thus locally, for small $|\lambda_1|$, there is a unique $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1)$ satisfying

$$j_g(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)) = c \quad \text{and} \quad k := \frac{d\varphi}{d\lambda_1}(0) = -[\frac{\partial j_g}{\partial \lambda_2}(0)]^{-1} \ \frac{\partial j_g}{\partial \lambda_1}(0) = - \frac{\int_a^b E_g(t) \ u_1(t)dt}{\int_a^b E_g(t) \ u_2(t)dt}. \tag{1.31}$$

Then λ_1 near 0 along with $\lambda_2 = \varphi(\lambda_1) = k\lambda_1 + o(\lambda_1)$ generate feasible functions $y(\lambda)$. Substituting these particular $y(\lambda)$ in j_f gives an objective function h of λ_1

$$\lambda_1 \mapsto j_f(\lambda_1, \lambda_2) = \int_a^b f(y(t), \dot{y}(t), t)\ dt \qquad (\ \lambda_2 = \varphi(\lambda_1)\ )$$
$$= \int_a^b f(\ \bar{x}(t) + \lambda_1 u_1(t) + (k\lambda_1 + o(\lambda_1))u_2(t),\ \dot{\bar{x}}(t) + \lambda_1 \dot{u}_1(t) + (k\lambda_1 + o(\lambda_1))\dot{u}_2(t)\ \ t)\ dt$$
$$= h(\lambda_1)$$

Since $\bar{x}$ was optimal, it must hold (with derivatives at $p(t)$) and after partial integration

$$0 = \frac{dh}{d\lambda_1}(0) = \int_a^b f_x\ (u_1 + ku_2) + f_{\dot{x}}\ (\dot{u}_1 + k\dot{u}_2)\ dt = \int_a^b E_f(t)\ (u_1(t) + ku_2(t))\ dt.$$

Taking the form of k in (1.31) into account we observe

$$0 = \int_a^b E_f(t)\ u_1\ dt\ - \frac{\int_a^b E_g(t)\ u_1\ dt}{\int_a^b E_g(t)\ u_2\ dt} \int_a^b E_f(t) u_2\ dt.$$

Setting, finally,

$$\mu = -\frac{\int_a^b E_f(t)\ u_2(t)\ dt}{\int_a^b E_g(t)\ u_2(t)\ dt}, \tag{1.32}$$

this gives us

$$0 = \int_a^b E_f(t)\ u_1\ dt + \mu \int_a^b E_g(t)\ u_1\ dt = \int_a^b [E_f(t) + \mu E_g(t)]\ u_1\ dt$$

and, since u_1 was arbitrary (1.2),

$$0 = E_f(t) + \mu E_g(t) = E_{f+\mu g}(t) \qquad \forall t \in (a, b).$$

Notice that (1.32) presents an (almost) explicit formula for μ. □

1.6 Constraints along the curve

Now we study the problem

$$\min J(x, z) := \int_a^b f(x(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{z}(t), t)\ dt \quad \text{such that } g(x(t), z(t), t) = 0 \tag{1.33}$$

with boundary conditions $x(a) = A,\ x(b) = B,\ z(a) = A',\ z(b) = B'$ which satisfy the constraints. We suppose again

$f \in C^1$, $(x, z) \in C^1(a, b)$. If $\|(\dot{x}(t), \dot{z}(t))\| \to \infty$ for $t \to a$ or $t \to b$, we require that the (improper Riemann-) integral still exists. Finally, let $g \in C^2$ and, as a key assumption, let $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ along a solution $(\bar{x}, \bar{z})$.

Theorem 1.2. *For some continuous function $\mu = \mu(t)$, the solution $(\bar{x}, \bar{z})$ fulfills the Euler conditions*

$$h_x - \frac{d}{dt} h_{\dot{x}} = 0 \quad \text{and} \quad h_z - \frac{d}{dt} h_{\dot{z}} = 0 \tag{1.34}$$

for the minimum of

$$\int_a^b h(x(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{z}(t), t)\ dt \quad \text{where} \quad h = f(x, z, \dot{x}, \dot{z}, t) + \mu(t)\ g(x, z, t)$$

without constraints along the curves. A possible setting: $\mu = -(f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}})(g_z)^{-1}$. ◇

Beweis. Because of $\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$ and $g \in C^1$, the implicit function theorem implies for points near the curve: Equation $g = 0$ defines locally a unique function $\varphi = \varphi(x,t)$ such that $g(x, \varphi(x,t), t) \equiv 0$ and

$$D\varphi(x,t) = -(g_z)^{-1} \left(\; g_x, \; g_t \; \right). \tag{1.35}$$

Since even $g \in C^2$ is supposed, we have $\varphi \in C^2$ and $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ (Schwarz). This holds even for vector functions g, x, z under regularity of the matrix g_z along the optimal curve (and implies the corollary below). Using φ we write the constraint near the optimal curve as

$$z(t) = \varphi(x(t), t) \quad \text{ with } \; \dot{z} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \;\; = \; \varphi_x \dot{x} + \varphi_t$$

and substitute it in J which gives a usual problem where only x is the searched function

$$j(x) := \int_a^b F(x, \; \dot{x}, \; t) \; dt = \int_a^b f(x, \; \varphi, \; \dot{x}, \; \varphi_x \dot{x} + \varphi_t, \; t) \; dt.$$

To determine the Euler equation for the integrand F we take into account that the functions φ, φ_x and φ_t are depending on x and t and calculate

$$F_x = f_x + f_z \; \varphi_x \; + f_{\dot{z}} \; (\varphi_{xx}\dot{x} + \varphi_{tx}), \qquad F_{\dot{x}} = f_{\dot{x}} + f_{\dot{z}} \; \varphi_x,$$

$$\frac{d}{dt} F_{\dot{x}} \;\; = \;\; \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + \frac{d}{dt} f_{\dot{z}} \; \varphi_x + f_{\dot{z}} \; \frac{d}{dt} \varphi_x \;\;\; = \;\;\; \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} + \frac{d}{dt} f_{\dot{z}} \; \varphi_x + f_{\dot{z}} \; (\varphi_{xx}\dot{x} + \varphi_{xt}).$$

Since $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$, the terms $f_{\dot{z}}$ (...) vanish in the Euler equation, and we obtain

$$0 = f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \; + \; (f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}}) \; \varphi_x. \tag{1.36}$$

For $\varphi = \varphi(x,t)$, we know from (1.35)

$$\varphi_x = -(g_z)^{-1} g_x. \tag{1.37}$$

Thus condition (1.36) becomes

$$0 = f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} \; - \; (f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}}) \; (g_z)^{-1} g_x. \tag{1.38}$$

Setting

$$\mu = -(f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}})(g_z)^{-1} \qquad (\; \mu = \mu(t) \text{ is continuous }) \tag{1.39}$$

we then obtain necessarily

$$(f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}}) + \mu g_z = 0 \tag{1.40}$$

and by (1.38)

$$(f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}) + \mu g_x = 0. \tag{1.41}$$

Hence, introducing the function

$$h = f(x, z, \dot{x}, \dot{z}, t) + \mu(t) \; g(x, z, t) \qquad (h = f + \mu g)$$

the conditions (1.40) and (1.41) are just the Euler equations (1.34) for minimizing

$$\int_a^b h(x(t), z(t), \; \dot{x}(t), \dot{z}(t), \; t) \; dt.$$

□

Corollary 1.3. *The last proof and the theorem similarly hold for vector functions $x(t) \in \mathbb{R}^m$ and $z(t)$, $g(x,z,t) \in \mathbb{R}^n$ under regularity of the (n,n)-matrix g_z along the optimal curve. In this case, we obtain $\mu(t) \in \mathbb{R}^n$ and the product $\mu(t) \; g(x,z,t)$ is (for fixed t) the scaler product in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. We have only to take into account that, in formula (1.35),

$$D\varphi(x,t) = -(g_z)^{-1} \left(\; g_x, \; g_t \; \right)$$

now g_z is an (n,n) matrix and $\left(\; g_x, \; g_t \; \right)$ an $(n, \; m+1)$ matrix. □

1.7 Constraints as boundary conditions

Consider the problem

$$\min J(x,z) := \int_a^b f(x(t),z(t),\dot{x}(t),\dot{z}(t),t)\ dt \quad \text{such that } g(x(b),z(b)) = 0 \tag{1.42}$$

with fixed a,b and initial conditions $x(a) = A,\ z(a) = A'$. We assume

$$x \in \mathbb{R}^m,\ \ z, g \in \mathbb{R}^n.$$

Again we suppose that $(\bar{x},\bar{z})$ solves the problem and require related smoothness $f,g \in C^1$. Furthermore, let $\bar{g}_z := g_z(\bar{x}(b),\bar{z}(b))$ be a regular matrix.

Theorem 1.4. *There is some $\mu \in \mathbb{R}^{n+m}$ such that the necessary conditions for $\xi = (x,z)$ and minimizing*

$$\int_a^b f\ dt\ +\ \langle \mu,\ g(\xi)\rangle \quad \textit{with a free value of}\ \ \xi(b)$$

are satisfied, namely the Euler equation

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0 \quad \textit{and} \quad f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot{z}} = 0 \tag{1.43}$$

and

$$\begin{pmatrix} f_{\dot{x}}(b) \\ f_{\dot{z}}(b) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_z \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{with } g\textit{-derivatives at } (\bar{x}(b),\bar{z}(b)), \tag{1.44}$$

cf. section 1.4.2. The vector μ has the form

$$\mu = -f_{\dot{z}}(b)\ [\ g_z(\bar{x}(b),\bar{z}(b))\ ]^{-1}.$$

$\diamond$

Beweis. Since $(\bar{x},\bar{z})$ is optimal with respect to all curves satisfying $x(b) = \bar{x}(b), z(b) = \bar{z}(b)$, we have (1.43). Using regularity of $g_z(\bar{x}(b),\bar{z}(b))$, the implicit function $z(b) = \varphi(x(b))$ (near $(\bar{x}(b),\bar{z}(b))$) locally exists and has the derivative

$$D\varphi(\ x(b)\ ) = -[\ g_z(\ x(b),z(b)\ )\ ]^{-1} g_x(\ x(b),z(b)\ ).$$

Let u,v be variations (1.2) of $\bar{x}$ and $\bar{z}$ with bounded derivatives and

$$v(b) = D\varphi(\ \bar{x}(b)\ )\ u(b).$$

After some correction r (depending also on $u(b)$) with $\|r\| = o(\|u(b)\|)$, we then have

$$\varphi(\bar{x}(b) + u(b)) = \bar{z}(b) + v(b) + r.$$

Hence the changed function $w(t) = v(t) + \frac{t-a}{b-a}\ r$ satisfies

$$\begin{array}{ll} w(b) = v(b) + r, & g(\bar{x}(b) + u(b),\ \bar{z}(b) + w(b)) = 0,\ \|w(t) - v(t)\| \le \|r\|\ \forall t \\ \text{as well as} & \|\ \dot{w}(t) - \dot{v}(t)\ \|\ \le\ \frac{\|r\|}{b-a}. \end{array}$$

This holds not only for (u,v) but also for all functions $\lambda(u,v), |\lambda|$ small. Then $w = w_\lambda$ and $r = r_\lambda$ depend of λ and fulfill

$$\begin{array}{c} \|\ w_\lambda(t) - \lambda v(t)\ \| \le \|\ r_\lambda\ \| \le\ o(\ \lambda\|u(b)\|\ )\ = o_{new}(\lambda) \\ \|\ \dot{w}_\lambda(t) - \lambda\dot{v}(t)\ \ \|\ \le\ \frac{\|r_\lambda\|}{b-a} \le \frac{o_{new}(\lambda)}{b-a} \\ g(\ \bar{x}(b) + \lambda u(b),\ \bar{z}(b) + w_\lambda(b)\ ) = 0. \end{array} \tag{1.45}$$

The integrand f is a Lipschitz function near the optimal curve. Thus (1.45) implies, with some constant K

$$|f(\bar{x} + \lambda u,\ \bar{z} + w_\lambda,\ \dot{\bar{x}} + \lambda\dot{u},\ \dot{\bar{z}} + \dot{w}_\lambda,\ t) - f(\bar{x} + \lambda u,\ \bar{z} + \lambda v,\ \dot{\bar{x}} + \lambda\dot{u},\ \dot{\bar{z}} + \lambda\dot{v},\ t)| \le K o(\lambda)$$

and ensures a similar estimate for the integrals. Hence the limits

$$L_1 = \lim_{\lambda\to 0}\ \lambda^{-1}[\ \int_a^b f(\bar x+\lambda u, \bar z + w_\lambda,\ \dot{\bar x}+\lambda\dot u,\ \dot{\bar z}+\dot w_\lambda, t) - J(\bar x,\bar z)\ ]$$

and

$$L_2 = \lim_{\lambda\to 0}\ \lambda^{-1}[\ \int_a^b f(\bar x+\lambda u, \bar z + \lambda v, \dot{\bar x}+\lambda\dot u,\ \dot{\bar z}+\lambda\ \dot v, t) - J(\bar x,\bar z)\ ]$$

coincide. Since the curves under L_1 are feasible, $L_1 = 0$ holds by optimality. So we know that

$$\begin{aligned} 0 = L_2 = &\quad [f_{\dot x}\ u]_a^b - \int_a^b (f_x - \tfrac{d}{dt} f_{\dot x})\ u\ dt\ +\ [f_{\dot z}\ v]_a^b - \int_a^b (f_z - \tfrac{d}{dt} f_{\dot z})\ v\ dt \\ = &\quad [f_{\dot x}\ u]_a^b \quad + \quad [f_{\dot z}\ v]_a^b \\ = &\quad f_{\dot x}(b)\ u(b) + f_{\dot z}(b)\ v(b) \\ = &\quad f_{\dot x}(b)\ u(b) - f_{\dot z}(b)\ [\ g_z(\bar x(b),\bar z(b))\ ]^{-1} g_x(\bar x(b),\bar z(b))\ u(b). \end{aligned}$$

Since all $u(b)$ are permitted, it follows, with the n-vector

$$\mu = -f_{\dot z}(b)\ [\ g_z(\bar x(b),\bar z(b))\ ]^{-1} \tag{1.46}$$

and g-derivatives at $(\bar x(b),\bar z(b))$ that

$$0 = f_{\dot x}(b)\ +\mu\ \bar g_x \qquad (\ f_{\dot x}(b) \text{ as a row, } \ \bar g_x \text{ a } (n,m) \text{ matrix }).$$

[Compare with the setting (1.39) for $g(x,z,t)=0$; $\mu(t) = -(f_z - \frac{d}{dt} f_{\dot z})(g_z)^{-1}$].
Trivially, (1.46) also yields

$$0 = f_{\dot z}(b)\ +\mu\ \bar g_z \qquad (\ f_{\dot z}(b) \text{ as a row, } \ \bar g_z \text{ a } (n,n) \text{ matrix })\ ).$$

Hence we obtain the additional necessary condition (1.44).

$$\begin{pmatrix} f_{\dot x}(b) \\ f_{\dot z}(b) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar g_x \\ \bar g_z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{with } g\text{-derivatives at } (\bar x(b),\bar z(b))$$

This tells us that the necessary conditions for $\xi = (x,z)$ and minimizing

$$\int_a^b f\ dt\ +\ \langle\mu,\ g(\xi)\rangle \quad \text{with a free value of } \xi(b)$$

namely the Euler equation (1.43) and (1.24) are satisfied, cf. section 1.4.2 and put

$$G = \ \langle\mu,\ g(\xi)\rangle.$$

□

Corollary 1.5. *If also b may vary and $g = g(x,z,b)$ then, according to section 1.4.3 we obtain the additional condition*

$$0 = f(p(\bar b))\ +\ G_\xi(\ \bar\xi(\bar b),\bar b\ )\ \dot\xi(\bar b)\ +\ G_b(\ \bar\xi(\bar b),\bar b\ ) \quad \textit{where } \xi=(x,z). \tag{1.47}$$

◇

Corollary 1.6. *(usual problems in $\mathbb{R}^n$): Assume $\bar\xi\in\mathbb{R}^n$ minimizes $H(\xi)$ under the condition $g(\xi)=0\in\mathbb{R}^m$. Let $H,g\in C^1$ and $Dg(\bar\xi)$ have maximal rank. Then there is some $\mu\in\mathbb{R}^m$ such that*

$$H_\xi(\bar\xi)\ +\sum_{i=1}^m +\mu_i\ Dg_i(\bar\xi)\ =\ H_\xi(\bar\xi) + \mu\ g_\xi(\bar\xi) = 0. \qquad \diamond \tag{1.48}$$

Beweis. Due to the rank-assumption, we can write $\xi=(x,z)\in\mathbb{R}^m$ such that $z\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^{n-m}$ and g_z is regular at $\bar\xi$. Now we identify ξ with $\xi(1)$ for a function $\xi=\xi(t)$ in a variational problem. Put $a=0,\ b=1,\ \xi(0)=0$ and notice that

$$H(\xi(1)) - H(\xi(0)) = \int_0^1 [\frac{d}{dt}H(\xi(t))]\ dt = \int_0^1 H_\xi(\xi(t))\ \dot\xi(t)\ dt.$$

So, the problem of minimizing $\int_0^1 H_\xi(\xi(t))\ \dot\xi(t)$ under $g(\xi(1))=0$ coincides with the initial one and fulfills the claimed condition

$$H_\xi(\xi(1)) + \mu\ g_\xi(\xi(1)) = 0 \quad \text{for some } \mu\in\mathbb{R}^m.$$

Furthermore, (1.46) yields $\mu = -H_z\ \bar g_z^{-1}$. □

1.8 Eulersche Gleichung für Funktionen von zwei Variablen.

Gesucht werde $u = u(x, y)$ über einem Gebiet G mit vorgegebenen Werten auf dem Rand, sodass ein Funktional

$$F(u) = \iint_G f(u, u_x, u_y, x, y)dxdy \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ partielle Ableitungen}$$

extremal wird.
Es sei f zweimal stetig differenzierbar. Wir nehmen dies auch für ein (lokal) optimales u an. Wir vergleichen $F(u)$ und $F(u + sv)$, s reell, v eine entsprechende Funktion, die auf ∂G verschwindet. Dann ist

$$F(u+sv)-F(u) = o(s)+s \iint_G f_u(u, u_x, u_y, x, y)v+f_{u_x}(u, u_x, u_y, x, y)v_x+f_{u_y}(u, u_x, u_y, x, y)v_y dxdy$$

Mittels $s \to 0$ folgt dann aus der Optimalität von u:

$$0 = \iint_G f_u(u, u_x, u_y, x, y)v + f_{u_x}(u, u_x, u_y, x, y)v_x + f_{u_y}(u, u_x, u_y, x, y)v_y dxdy$$

kurz

$$0 = \iint_G f_u v + \left(f_{u_x} \frac{\partial v}{\partial x} + f_{u_y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \tag{1.49}$$

für jedes (erlaubte) $v = v(x, y)$.

Was bedeutet das? Wir benutzen den

Satz 1.2 (Satz von Green im $\mathbb{R}^2$ (mit $Q = f_{u_x} v$)).

$$\iint_G Q_x - P_y dxdy := \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial G} Pdx + Qdy$$

Mit $P := -P$ ist das

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial G} -Pdx + Qdy.$$

Nun sei speziell $Q = f_{u_x} v$, $P = f_{u_y} v$.
Dann ist

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = v \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} + f_{u_x} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = v \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} + f_{u_y} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\text{also} \quad f_{u_x} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - v \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} \quad \text{und} \quad f_{u_y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - v \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y}.$$

Dies liefert uns

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_G f_u v + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - v \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - v \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_G f_u v + v \left(-\frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} \right) dxdy + \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_G v \left(f_u - \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} \right) dxdy + \int_{\partial G} -Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

Wegen $Q = f_{u_x} v$, $P = f_{u_y} v$ und $v = 0$ auf ∂G ist das zweite Integral $\int_{\partial G}$ Null !
Also muss gelten

$$0 = \iint_G v \left(f_u - \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y} \right) dxdy.$$

Das Integral ist aber nur Null für alle (erlaubten) v, wenn die stetige Funktion im Integral $f_u - \frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} - \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y}$ identisch Null ist. Also muss gelten (die Eulersche Gleichung):

$$f_u - \left(\frac{\partial f_{u_x}}{\partial x} + \frac{\partial f_{u_y}}{\partial y}\right) = 0. \tag{1.50}$$

Beispiel 1.3. *Man überzeuge sich davon, dass die Aufgabe*

$$\min = \iint_G (u_x)^2 + (u_y)^2 dxdy \quad (= \iint_G \|\nabla u\|^2 dxdy)$$

gerade zur Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ führt.

Spezialfall $u = u(t)$: Für $u = x = x(t)$ und $v = v(t)$ als reelle Funktionen erhält man durch Spezialisierung der entsprechenden Gleichung (1.49) wieder

$$0 = \int_a^b f_x v + f_{x'} v' dt \tag{1.49'}$$

und die Eulersche Gleichung:

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{x'} = 0. \tag{1.51}$$

1.9 Konvexität der Zielfunktion

Konvexität von J mit $J(x) = \int_a^b f(x, x', t)dt$.

$$J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y) \ \forall \lambda \in (0,1)$$

bedeutet hier $\forall \lambda \in (0,1)$,

$$\int_a^b f(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda x' + (1-\lambda)y', t)dt \leq \int_a^b \lambda f(x, x', t)dt + \int_a^b (1-\lambda) f(y, y', t)dt.$$

Sie ist offenbar gesichert, wenn f in (x, x') konvex ist. Umgekehrt garantiert sie, dass aus der Eulerschen Gleichung Optimalitaet folgt.

Beispiel 1.4.

$$f = \sqrt{1 + (x')^2} \text{ für minimale Bogenlänge.}$$

1.10 Weierstraß-Erdmannsche Eckenbedingung

Notwendige Bedingungen für C^1-Funktionen $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, mit einem Knick in $t = \tau$.
Gesucht wird $x = x(t)$ für $t \in [a, b]$ mit $x(a) = A$.

Dabei soll $F(x) = \int_a^b f(x, x', t)dt$ ($x' = \dot{x}$) minimal werden, wobei $x = x(t)$ in $t = \tau$ einen Knick haben darf (sonst zumindest C^1).

Beispiel 1.5.

$$\int_0^1 x^2(1 - x')^2 dt, \ x(0) = 0, \ x(1) = \frac{1}{2}.$$

Lösung: $x = 0$ in $[0, \frac{1}{2}]$, $x = t - \frac{1}{2}$ in $[\frac{1}{2}, 1]$.

Beweis. Wir berechnen die *erste Variation* $\delta F(x) = \lim_{\mu\to 0} s^{-1}[F(x+su) - F(x)]$ von F in x, integrieren dabei partiell über beide Teile des Intervalls und beachten $u(a) = u(b) = 0$. Wir erhalten nach bekanntem Muster:

$$\begin{aligned}\delta F(x) &= \int_a^b f_x(x,x',t)u + f_{x'}(x,x',t)u'dt \\ &= \int_a^b E_f\ u\ dt + [f_{x'}u]_a^\tau + [f_{x'}u]_\tau^b \\ &= \int_a^b E_f\ u\ dt + [f_{x'}(\tau) - f_{x'}(\tau)]\ u(\tau).\end{aligned}$$

Es setze sich u aus u^1 und u^2 (links/rechts von τ) zusammen. Wir schreiben f^1 fuer f links von τ mit eingesetzter Kurve x, analog f^2.

Dann liefert $x+u$ wieder eine Funktion mit höchstens einem Knick in τ wenn ($u^1 = u^2$ in τ).

$$0 = \int_a^\tau E_f u^1 dt + \int_\tau^b E_f u^2 dt + [f^1_{x'}(\tau) - f^2_{x'}(\tau)]u(\tau), \quad (u^1 = u^2 \text{ in } \tau).$$

Als notwendige Bedingung liefert $\delta F(x) = 0$ erneut die Eulersche Gleichung $E_f = 0$, indem wir alle u mit $u^1(\tau) = u^2(\tau) = 0$ betrachten.
Natürlich nehmen wir an , dass $f_x - \frac{d}{dt}f_{x'}$ entlang der Kurve $x = x(t)$ existiert und beschränkt ist.

Man variiere nun weiter u so, dass u für $t \in (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$ eine (hinreichend gut geglättete) Dreiecksfunktion mit Höhe H in τ wird und außerhalb des Intervalls Null ist.
Die Integralsumme hat dann einen Wert $W \approx \varepsilon K^1 + \varepsilon K^2$ mit Konstanten K^i.
(Tatsächlich wissen wir schon mehr, sie ist sogar Null weil die Eulersche Gleichung gilt).
Das Produkt wird dagegen $[f^1_{x'}(\tau) - f^2_{x'}(\tau)]H$.
Dies liefert uns mit kleinem ε und festem $H > 0$:

$$f^1_{x'}(\tau) = f^2_{x'}(\tau) \text{ bzw. } \lim_{t\to\tau-0} f_{x'}(t) = \lim_{t\to\tau+0} f_{x'}(t), \tag{1.52}$$

die *erste notwendige Bedingung von Weierstraß (≈ 1840) und Erdmann (≈ 1870).*
Um die *zweite Bedingung*

$$\lim_{t\to\tau-0} f(t) - x'(t)f_{x'}(t) = \lim_{t\to\tau+0} f(t) - x'(t)f_{x'}(t) \tag{1.53}$$

zu erhalten,
betrachten wir x als aus zwei C^1-Funktionen zusammengesetzt, die beiden Intervallen entsprechen (so kann man auch für die erste Bedingung vorgehen!). Die erste heiße wie vorher x, die zweite y.
Die Teile einer optimalen Knick-Kurve lösen dann die Aufgabe

$$\min F(x,y) = \int_a^\tau f(x,x',t)dt + \int_\tau^b f(y,y',t)dt = \int_a^\tau f(x,x',t)dt - \int_b^\tau f(y,y',t)dt$$

unter den Randbedingungen in a und b sowie der (regulären) Nebenbedingung

$$x(\tau) - y(\tau) = 0.$$

Sie sind daher (ohne Endbedingung) mit einem geeigneten Lagrange-Multiplikator λ Extremalen für die Lagrange-Funktion

$$L(x,y,\lambda,\tau) = \int_a^\tau f(x,x',t)dt - \int_b^\tau f(y,y',t)dt \quad + \lambda(x(\tau) - y(\tau)).$$

Variiert man x durch u, y durch v mit $u(a) = 0 = v(b)$, liefert dies nun die Bedingung (beachte $E_f = 0$):

$$0 = f^1_{x'}(\tau)u(\tau) - f^2_{x'}(\tau)v(\tau) + \lambda(u(\tau) - v(\tau)). \tag{1.54}$$

Für $u(\tau) = v(\tau)$ erhalten wir die schon abgeleiteten Forderungen. Hier dürfen wir aber auch u, v mit $u(\tau) \neq v(\tau)$ betrachten, da die Stetigkeit der zusammengesetzten Lösungskurve in der Nebenbedingung $x(\tau) = y(\tau)$ steckt, die nun mittels λ repräsentiert ist.
Beachtet man, dass die Integrale Null sein müssen (Eulersche Gleichung) und wählt man u, v mit $u(\tau) = v(\tau) = H \neq 0$, folgt so wieder (1.52),

$$f^1_{x'}(\tau) = f^2_{x'}(\tau).$$

Da die Knickstelle $\tau \in (a, b)$ frei wählbar war, muss nun allerdings die partielle Ableitung L_τ ebenfalls verschwinden. Das liefert

$$0 = f^1(\tau) - f^2(\tau) + \lambda(x'(\tau) - y'(\tau)).$$

Mittels (1.54) berechnen wir λ. Dazu sei $u(\tau) = 1$ und $v(\tau) = 0$, was $\lambda = -f^1_{x'}(\tau)$ und mit $f^1_{x'}(\tau) = f^2_{x'}(\tau)$ auch $\lambda = -f^2_{x'}(\tau)$ ergibt. Also gilt tatsächlich (1.53):

$$f^1(\tau) - f^1_{x'}(\tau)x'(\tau) = f^2(\tau) - f^2_{x'}(\tau)y'(\tau).$$

□

2 Variationsrechnung, Bedingungen zweiter Ordnung

2.1 Legendre-Jacobi-Bedingungen für nichtnegative 2.Variation

Für die Standard Aufgabe

$$\min F(x) = \min \int_a^b f(x, x', t)dt$$

mit Randbedingungen in a und b erfülle eine Kurve die Eulersche Gleichung.
Wir fragen, wann die (von x und u abhängige) *zweite Variation*

$$\delta^2 F(x) := \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-2}(F(x + \lambda u) - F(x))$$

positiv bzw. nichtnegativ bleibt für (C^2-) Variationen u, die im Rand verschwinden.
Dies würde zumindest sichern, dass $\lim\limits_{\lambda \to 0}(F(x + \lambda u) - F(x)) \geq 0$ bleibt, und (bei uniformen Abschätzungen von F mittels $\delta^2 F(x)$) die Minimalpunkteigenschaft garantieren.
Zunächst rechnen wir durch 2.Ordnungs-Approximation des Integranden aus, dass gilt:

$$\delta^2 F(x) = \int_a^b f_{xx}(x, x', t)u^2 + 2f_{xx'}(x, x', t)uu' + f_{x'x'}(x, x', t)(u')^2 dt$$

(hierzu muss $f \in C^2$ sein).
Weiter ist $2uu' = \frac{d}{dt}u^2$ und daher (partiell integrieren)

$$\int_a^b 2f_{xx'}(x, x', t)uu'dt = \int_a^b f_{xx'}(x, x', t)(\frac{d}{dt}u^2)dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}f_{xx'}(x, x', t)u^2 dt.$$

So läßt sich $\delta^2 F(x)$ (als Abbildung $u \to \mathbb{R}$) schreiben als

$$K(u) = \int_a^b Su^2 + Ru'^2 dt \tag{2.1}$$

wobei $S = f_{xx} - \frac{d}{dt} f_{xx'}(x, x', t)$ und $R = f_{x'x'}(x, x', t)$ durch die Extremale $x = x(t)$ definiert sind. Wir haben dann von oben

$$\int_a^b 2Ruu'dt = -\int_a^b R'u^2 dt.$$

Man beachte, dass wir zur partiellen Integration C^3-Eigenschaften brauchen.

Seien x und f hinreichend glatt, sodass S und R stetig von t abhängen.

1. Wir bemerken als erstes:

$$K(u) \geq 0 \text{ verlangt } R(t) \geq 0 \ \forall t \in [a, b] \quad \text{(Legendre Bedingung).} \tag{2.2}$$

Beweis. Andersfalls gilt (wegen Stetigkeit von R) $R(\tau) < 0$ für ein $\tau \in (a, b)$. Man wähle dann eine symmetrische Dreieck-Funktion u, die außerhalb des Intervalls $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ verschwindet und Maximum $h > 0$ besitzt (Anstieg h/ε). Dann ist

$$\left| \int_a^b Su^2 dt \right| \text{ durch } \varepsilon C h^2 \text{ abschätzbar,}$$

während

$$\int_a^b R\, u'^2 dt < 0$$

ist und im Betrag größer als $\varepsilon |c| \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 = |c| \frac{h^2}{\varepsilon}$ bleibt; $c = \frac{R(\tau)}{2}$. Das liefert mit kleinen ε offenbar den Widerspruch $K(u) < 0$. $\square$

2. Wir verlangen nun die *starke Legendre Bedingung*

$$R(t) > 0 \ \forall t \in [a, b] \tag{2.3}$$

und suchen nach weiteren *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen für $\delta^2 F(x) \geq 0$.
Da nun $u = 0$ das Integral (2.1) minimiert (wenn $K(u) \geq 0$), muss die entsprechende Eulersche Gleichung erfüllt sein.
Sie lautet:

$$2uS - 2\frac{d}{dt}(Ru') = 0, \text{ wir schreiben sie als}$$

$$L(u) := \frac{d}{dt}(Ru') - Su = 0 \quad \text{(Euler Gleichung zu } \min K(u)\text{)} \tag{2.4}$$

Wegen der speziellen Struktur von K folgt

$$K(u) = -\int_a^b uL(u)dt, \tag{2.5}$$

denn (partiell integrieren)

$$\int_a^b uL(u)dt = \int_a^b u\left[\frac{d}{dt}(Ru')\right] - Su^2 dt = \int_a^b -u'Ru' - Su^2 dt = -K(u).$$

Die Eulersche Gleichung (2.4) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$0 = L(u) = R'u' + Ru'' - Su, \text{ also } \ u'' + pu' - qu = 0 \text{ mit } p = \frac{R'}{R}, q = \frac{S}{R}.$$

Sie hat bei den Anfangsbedingungen $u(a) = 0$ und $u'(a) = 1$ eine eindeutige Lösung u_0. Wir zeigen als nächstes (unter $R > 0$ (2.3)):

$$\text{Wenn } K(u) \geq 0 \ \forall u, \text{ so muss } u_0(t) > 0 \text{ für alle } t \in (a, b) \text{ gelten (Jacobi Bedingung).} \tag{2.6}$$

Beweis. Für Argumente nahe a ist u_0 positiv wegen der Anfangsbedingungen, also angenommen

$$u_0(\tau) = 0, \ \tau \in (a, b).$$

Wir setzen u_1 zusammen aus u_0 (links von τ) und der Nullfunktion (rechts von τ).
Dann ist $u_1 L(u_1) = 0$ in allen t. Nach (2.5) ist somit $K(u_1) = 0$.

Damit minimiert u_1 die Funktion $K(u)$. Als „Knickfunktion" erfüllt sie die Weierstraß-Erdmann Bedingungen, angewandt auf $K(u)$. Insbesondere die erste.
Sie bedeutet hier wegen des Integranden $R(u')^2 + Su^2$ mit Ableitung $2R(t)u'(t)$ (nach u') dass für $u = u_1$ die Gleichung

$$\lim_{t \to \tau - 0} R(t)u'(t) = \lim_{t \to \tau + 0} R(t)u'(t)$$

erfüllt. Da $R(\tau) > 0$ ist, geht dies nur bei

$$\lim_{t \to \tau - 0} u_1'(t) = \lim_{t \to \tau + 0} u_1'(t)$$

Der rechtsseitige Limes ist aber Null nach Konstruktion von u_1. Also ist auch $\lim\limits_{t \to \tau - 0} u_0'(t) = 0$.
Mit den Anfangs-Bedingungen $u'(\tau) = 0$ und $u(\tau) = 0$ hat $L(u) = 0$ als lineare DGL nun zwei Lösungen, nämlich die Nullfunktion und u_0.
Sie sind wegen $u_0'(a) = 1$ verschieden, was dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare DGL widerspricht. Also muss tatsächlich (2.6) gelten. $\square$

3. Wir verlangen nun sogar zusammen mit $R > 0$ auf $[a, b]$ auch

$$u_0(t) > 0 \text{ für alle } t \in (\ a, b\ ] \text{ (starke Jacobi Bedingung).} \tag{2.7}$$

Satz 2.1. *Unter den starken Bedingungen von Legendre und Jacobi gilt $K(u) \geq 0$ für alle zulässigen u.*

Beweis. Man zeigt, dass sich $K(u)$ mit einer geeigneten Funktion w schreiben lässt als

$$K(u) = \int_a^b R\left(u' + \frac{uw}{R}\right)^2 dt. \tag{2.8}$$

Definition von w:

$$w = -R\frac{u_\alpha'}{u_\alpha}. \tag{2.9}$$

Hier sei u_α die eindeutige Lösung der DGL $L(u) = 0$ mit Anfangs-Bedingungen $u(a) = \alpha$ und $u'(a) = 1$ (und $\alpha > 0$ hinreichend klein). Es ist also explizit

$$K(u) = \int_a^b R\left(u' - u\frac{u_\alpha'}{u_\alpha}\right)^2 dt. \tag{2.8$'$}$$

In einem nachfolgenden Beweis werden wir zeigen, dass -wegen der starken Jacobi-Bedingung- für kleine positive α, die Funktion u_α über $[a,b]$ positiv bleibt. Das macht die Definition sinnvoll. Wir fixieren so ein α und können dann w nach (2.9) definieren. Damit gilt:

$$w' = -\frac{\frac{d}{dt}(Ru'_\alpha)u_\alpha - u'_\alpha R u'_\alpha}{u_\alpha^2}$$

sowie wegen $Lu = 0$ (2.4) auch $\frac{d}{dt}Ru'_\alpha = Su_\alpha$. Also gilt

$$w' = -\frac{Su_\alpha^2 - R(u'_\alpha)^2}{u_\alpha^2} = -S + R\left(\frac{u'_\alpha}{u_\alpha}\right)^2$$

und mit $w = -R\frac{u'_\alpha}{u_\alpha}$ auch

$$w' = \frac{w^2}{R} - S. \tag{2.10}$$

Wir rechnen damit das Integral (2.8) aus und zeigen, dass es mit $K(u)$ zusammenfaellt. Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} A &:= \int_a^b R\left(u' + \frac{wu}{R}\right)^2 dt \\ &= \int_a^b R\left(u'^2 + \frac{2u'uw}{R} + \frac{w^2u^2}{R^2}\right) dt = \int_a^b Ru'^2 + 2u'uw + \frac{w^2u^2}{R} dt. \end{aligned}$$

Das mittlere Teilintegral erfüllt (partiell integrieren und (2.10)) benutzen

$$\int_a^b 2u'uw\ dt = -\int_a^b u^2w'\ dt = -\int_a^b u^2\left(\frac{w^2}{R} - S\right)\ dt.$$

Damit folgt wie verlangt

$$A = \int_a^b R\ u'^2 - u^2\left(\frac{w^2}{R} - S\right) + \frac{w^2u^2}{R}\ dt = \int_a^b R\ u'^2 + Su^2\ dt = K(u).$$

□

2.2 Ergaenzungen

2.2.1 Positive Hilfsfunktion

Es bleibt zu zeigen, dass im obigen Beweis u_α tatsächlich positiv ist.
Dies wird auf eine Eigenschaft von linearen DGL 2. Ordnung reduziert.

Wir studieren allgemein 2 Lösungen $y(x)$ für $y'' + py' + qy = 0$ mit stetigen Koeffizienten p und q. Über einem Bereich mit $y_2 > 0$ betrachten wir

$$Q(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

und zeigen, dass Q monoton ist. Dies ist sicher richtig, wenn Q' nicht das Vorzeichen wechselt. Es ist

$$Q' = \frac{y'_1y_2 - y'_2y_1}{y_2^2} = \frac{\det W(x)}{y_2^2}$$

mit der Wronski-Matrix $W = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

Wir rechnen die Ableitung von $D = \det W$ aus, um zu zeigen, dass $D = (y_1'y_2 - y_2'y_1)$ (und somit Q') nicht das Vorzeichen wechselt und deshalb Q monoton ist:

$$D' = (y_1''y_2 + y_1'y_2') - (y_2''y_1 + y_2'y_1') = y_1''y_2 - y_2''y_1.$$

Da wir Lösungen der DGL betrachten, können wir die 2. Ableitungen einsetzen, womit

$$\begin{aligned} D' &= -y_2(py_1' + qy_1) + y_1(py_2' + qy_2) = -y_2py_1' + y_1py_2' \\ &= -p(y_2y_1' - y_1y_2') = -pD. \end{aligned}$$

Die DGL $D' = -pD$ hat die allgemeine Lösung $D = ce^{-P(x)}$ mit einer Stammfunktion P von p:

$$P(x) = \int p(x)dx. \quad (D' = -cp(x)e^{P(x)} = -pD).$$

Dabei ist c eine Konstante. Folglich wechseln Q' und $D = \det W$ nicht das Vorzeichen, solange y_2 positiv bleibt, und Q ist dort eine monotone Funktion.
Wir kehren nun zu u_α und u_0 zurück. Nullstellen von u_α sind Nullstellen von $Q = \frac{u_\alpha(t)}{u_0(t)}$, wenn $u_0 > 0$.

Beweis. (von $u_\alpha > 0$): Habe u_α eine erste Nullstelle τ in $[a, b]$. Sie ist verschieden von b (für kleine $\alpha > 0$) weil $u_0(b) > 0$ und $\lim u_\alpha(b) = u_0(b) > 0$ für $\alpha \downarrow 0$. Also ist $a < \tau < b$.
Weiter muss $u_\alpha'(\tau) \neq 0$ sein (wegen Eindeutigkeit der Lösung bei Anfangs-Bedingung $u'(\tau) = 0$, $u(\tau) = 0$). Damit folgt $u_\alpha'(\tau) < 0$.
Wegen $u_\alpha(b) > 0$ und $u_\alpha(t) > 0$ für t nahe b muss es eine weitere Nullstelle σ geben.
Wieder ist $\sigma < b$. In einem offenen Intervall um $[\tau, \sigma]$ ist nun

$$Q(t) = \frac{u_\alpha(t)}{u_0(t)}$$

einerseits monoton, hat aber andererseits 2 (reguläre) Nullstellen. Dieser Widerspruch beweist den Satz endgültig. □

Beispiel 2.2. $J(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)-h(t))^2 + \dot{x}^2\, dt$ *where h (continuous) is given;* $x(0) = x(1) = 0$.

$$f_x = x(t) - h(t), \quad f_{\dot{x}} = \dot{x}, \quad f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} = x(t) - h(t) - x''$$

$$S = f_{xx} = 1, \quad R = f_{\dot{x}\dot{x}} = 1 > 0, \quad L(u) = \frac{d}{dt}(Ru') - Su = u'' - u.$$

The DGL $L(u) = 0$; $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ has the general solution $u = \alpha \sinh(t) + \beta \cosh(t)$ and, with the initial values,

$$u_0(t) = \sinh(t)$$

which satisfies the strong Jacobi condition $u_0(t) > 0$ $\forall t \in (0, 1]$.

2.2.2 Unlösbarkeit

Beispiel 2.3. *von Oskar Bolza [2], S. 95:*
Die notwendige Bedingung kann erfüllt sein (auch die strenge 2.Ordnungs-Bedingung von Jacobi), ohne dass eine Lösung existiert. Sei

$$J = \int_0^1 x'^2 + x'^3 dt, \quad x(0) = x(1) = 0$$

mit Extremalen $\frac{d}{dt}(2x' + 3x'^2) = 0$*, was* $x(t) = 0$ *liefert, denn die Extremalen erfüllen*

$$0 = 2x'' + 6x'x'' = x''(2 + 6x').$$

Ist $x'' \neq 0$ *auf irgendeinem Abschnitt, so muss also* $x' \equiv -1/3$ *sein, woraus wieder* $x'' \equiv 0$ *folgt. Es könnte also nur* $x'' \equiv 0$ *gelten, wonach mit den Anfangsbedingungen nur* $x \equiv 0$ *bleibt.*
Nimmt man in $[0, p]$*,* $0 < p < 1$ *(p nahe 1), die Funktion* $x = at$ *mit konstantem Anstieg* $a = \frac{h}{p} > 0$*, und in* $[p, 1]$ *die Funktion* $x = h + b(t - p)$ *mit negativen Anstieg* $b = -\frac{h}{1-p}$*, so folgt*

$$\begin{aligned} J &= \int_0^p (x')^2 + (x')^3 dt + \int_p^1 (x')^2 + (x')^3 dt \\ &= p(a^2 + a^3) + (1 - p)(b^2 + b^3) \\ &= \frac{h^2}{p} + \frac{h^3}{p^2} + \frac{h^2}{1-p} - \frac{h^3}{(1-p)^2}, \end{aligned}$$

was auch negativ ist ($p \to 1$)*. Nach Glättung liefert dies z.B. eine* C^3*-Funktion* x *mit* $J < 0$*.*
Bedingung 2. Ordnung: Für die Nullextremale ist dann

$$S = 0, \quad R = 2,$$

und die Jacobi-Differentialgleichung liefert mit

$$\begin{aligned} 0 &= L(u) = \frac{d}{dt}(Ru') - Su = 2u'', \; u(0) = \alpha, \; u'(0) = 1 \text{ gerade} \\ u_\alpha(t) &= \alpha + t. \end{aligned}$$

Also ist die starke Jacobi Bedingung erfüllt; es ist hier $w = -R\frac{u'_\alpha}{u_\alpha} = -\frac{2}{u_\alpha}$ *und*

$$K(u) = \int_a^b R\left(u' + \frac{wu}{R}\right)^2 dt = \int_a^b 2\left(u' - \frac{2u}{2u_\alpha}\right)^2 dt \geq 0$$

Mit $0 + \lambda x$ *(x fest wie oben) folgt* $J = \lambda^2 pa^2 + \lambda^3(1 - p)b^3$ *mit* $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{J}{\lambda^2} > 0$*.*

3 Optimalsteuerung, Hamilton-Funktion und adjungiertes System

Wir wollen die folgende Aufgabe behandeln:

$$\min \gamma(x,u) := \int_a^b h(x(t),u(t),t)\,dt, \text{ sodass } x' = f(x(t),u(t),t),\ \ x(a) = x^0. \tag{$S0$}$$

$u(\cdot)$ sei stückweise stetig, beschränkt mit Werten in einer Menge $U \subset \mathbb{R}^m$.
f, h und f_x, h_x seien Lipschitz stetig in allen Variablen.
Man beachte: U ist nicht der Raum aller Steuerungsfunktionen $u = u(t)$!

Sei $u(\cdot)$ (Steuerung) eine Lösung mit zugeordnetem $x(\cdot)$ (Trajektorie). Wir schreiben $x = x_u$. Es wird gezeigt:

Satz 3.1 (Maximumprinzip)**.** *Wenn u mit entsprechender Trajektorie $x = x_u$ eine (lokale) Lösung der Aufgabe ($S0$) darstellt (und eine später zu stellende Steuerbarkeitsbedingung erfüllt ist) , so hat das (adjungierte) System*

$$-\lambda'(t) = \lambda(t)A(t) + B(t);\ \lambda(b) = 0. \tag{AD}$$

mit

$$A(t) = f_x(x(t),u(t),t),\ \ B = h_x(x(t),u(t),t)$$

eine solche Lösung λ, die in jedem $t \in [a,b]$ die „Maximumbedingung“:

$$\omega = u(t) \text{ realisiert stets } \min_{\omega \in U} H(x(t),\lambda(t),\omega,t), \tag{MX}$$

erfüllt.
Hierbei ist $H(x(t),\lambda(t),\omega,t) = h(x(t),\omega,t) + \langle \lambda(t), f(x(t),\omega,t)\rangle$ die Hamiltonfunktion der betrachteten Aufgabe.

Bemerkungen: Mitunter nimmt man auch eine Hamilton-Funktion mit Zusatzkomponenten $\lambda_0(t)$ der Form

$$H(x(t),\lambda(t),\omega,t) = \lambda_0(t)h(x(t),\omega,t) + \langle \lambda(t), f(x(t),\omega,t)\rangle\,;$$

im „regulären“ Fall wird dann $\lambda_0(t) = 1\ \forall t$.

Wir denken uns zunächst u als stetig. Allgemein kann u als stückweise stetig (rechtsseitig stetig mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen 1. Art, stetig in a und b) und beschränkt angesehen werden.

Dann gilt (MX) in allen Stetigkeitspunkten von u, und die Integration der Differentialgleichungen erfolgt in Stücken. (Endwert über ein Stetigkeits-Intervall wird Anfangswert über das nächste).

Die folgenden Überlegungen dienen zum Beweis des Maximumprinzips.

3.1 Abschätzungen

3.1.1 Gronwall's Lemma

Lemma 3.2 (Gronwall's Lemma)**.** *Wenn $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, stetig, g nicht fallend, $c > 0$ fest, $a < t < b$ und*

$$f(t) \le g(t) + c\int_a^t f(s)ds, \tag{3.1}$$

so gilt: $f(t) \le g(t)e^{c(t-a)}$.

Beweis. Sukzessiv einsetzen. Sei $M = \max_{t \in [a,b]} f(t)$.
Dann ist $f(t) \leq g(t) + c(t-a)M$.
Einsetzen in (3.1) liefert mit Monotonie von g:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq g(t) + c \int_a^t g(s) + c(s-a)M ds \\ &\leq g(t) + c(t-a)g(t) + \frac{1}{2}Mc^2(t-a)^2. \end{aligned}$$

Wir setzen weiter ein und integrieren jeweils den letzten Term:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq g(t) + c \int_a^t g(s) + c(s-a) + \frac{1}{2}Mc^2(s-a)^2 ds, \\ \text{also} \quad f(t) &\leq g(t) + c(t-a)g(t) + \frac{1}{2}c^2(t-a)^2 g(t) + M\frac{c^3}{3!}(t-a)^3. \end{aligned}$$

Fortsetzung liefert ...

$$f(t) \leq g(t) + c(t-a)g(t) + \ldots + \frac{c^n}{n!}(t-a)^n g(t) + M\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}(t-a)^{n+1}.$$

Mit $n \to \infty$ folgt die Behauptung, weil der letzte (M-) Term gegen Null strebt. □

3.1.2 A-priory Abschätzung

A-priory Abschätzungen benutzt man für Abschätzungen von Lösungen von gewöhnlichen DGL bei Störung der Gleichung und des Anfangswertes:

Sei y gegeben als $y(t) = \eta + \int_a^t A(s)y(s)ds$. Mit $C = \sup |A(s)|$ gilt:

$$|y(t)| \leq \|\eta\| + C \int_a^t |y(s)|ds. \tag{3.2}$$

Also ergibt Gronwall's Lemma 3.2 hierfür:

$$|y(t)| \leq \|\eta\| e^{C(t-a)}$$

und

$$\|y\| \leq K(b-a, A, \eta) := \|\eta\| e^{C(b-a)}.$$

Das ist eine Lipschitz-Abschätzung in η.
Man beachte: (3.2) gilt auch mit $C = \int_a^b |A(s)|ds$, für stückweise stetiges, beschränktes A, was für Abschätzungen mittels L^1-Norm nützlich ist.

3.1.3 Analog für Lipschitz-Gleichungen

Man betrachte die Lipschitz-Gleichung $y(t) = \eta + \int_a^t f(y(s), s)ds$:
Wir schätzen $\|y(t) - \eta\|$ ab mittels

$$\begin{aligned} f(y(s), s) - f(\eta, s) &= r(s) \ , \|r(s)\| \leq L\|y(s) - \eta\| \ (f \text{ sei Lipschitz stetig mit Konstante } L). \\ y(t) - \eta &= \int_a^t f(y(s), s)ds = \int_a^t f(\eta, s) + r(s)ds \leq \int_a^t f(\eta, s)ds + L\int_a^t \|y(s) - \eta\|ds. \end{aligned}$$

Jetzt gilt die Voraussetzung des Lemmas 3.2 in der Form

$$\|y(t)-\eta\| \leq (t-a)\max_s |f(\eta,s)| + L\int_a^t \|y(s)-\eta\| ds.$$

Das liefert

$$\|y(t)-\eta\| \leq (t-a)(\max_s |f(\eta,s)|)\cdot e^{L(t-a)}.$$

3.1.4 Abschätzung von Lösungen einer gestörten DGL

Sei $y(t) = \eta + \int_a^t [f(s)+h(s)]y(s)ds$ und $x(t) = \xi + \int_a^t f(s)x(s)ds$. Dann ist

$$\begin{aligned} y(t)-x(t) &= \eta-\xi+\int_a^t [f(s)+h(s)]y(s) - f(s)x(s)ds \\ &= \eta-\xi+\int_a^t h(s)y(s)ds + \int_a^t f(s)(y(s)-x(s))ds. \end{aligned}$$

Also mit $M(h) = \sup |h(s)|$ (oder auch $M(h) = \int_a^b |h(s)|ds$) und analogem $M(f)$:

$$\begin{aligned} |y(t)-x(t)| &\leq \|\eta-\xi\| + M(h)(t-a)\|y\| + M(f)\int_a^t |y(s)-x(s)|ds, \\ |y(t)-x(t)| &\leq G(t) + c\int_a^t |y(s)-x(s)|ds. \end{aligned}$$

Man wende das Lemma 3.2 an mit $G \leq (\|\eta-\xi\| + M(h)(b-a)\|y\|)$. Also gilt:

$$\begin{aligned} |y(t)-x(t)| &\leq G(t)e^{c(t-a)} \\ &\leq (\|\eta-\xi\| + M(h)(b-a)\|y\|)\, e^{M(f)(b-a)}. \end{aligned}$$

Mit 3.1.3 gilt auch $\|y(t)-\eta\| \leq (t-a)\Big(\max_s |(f+h)(\eta,s)|\Big)) e^{L(t-a)}$.
Wichtig: Die Abschätzungen sind (lokal) Lipschitz für kleine $\|\eta-\xi\|$, $\|h\|$, $(b-a)$ (da sie in diesen Termen sogar differenzierbar sind). Wir können $\|h\|$ in C oder auch in L^1 betrachten (bei stückweise stetigem A).

3.2 Die linearsierte DGL

Angenommen, $x = x(t)$ soll eine DGL

$$x' = f(x,t) \text{ d.h. } x'_k = f_k(x,t) \ (k = 1, \dots, n).$$

erfüllen mit Anfangs-Bedingung $x(0) = x^0$ (wir denken uns die Steuerung $u = u(t)$ als fest und in f enthalten)

Als Integralgleichung wird dies

$$\begin{aligned} 0 &= g(x) := x - G(x) \text{ wobei} \\ y = G(x) &\Leftrightarrow y(t) = x^0 + \int_a^t f(x,s)ds \ \ \forall t. \end{aligned}$$

Das Integral ist komponentenweise zu verstehen, wenn $n > 1$.

Sei $A(s) = f_x(x(s), s)$.

Wir setzen voraus: $x \in X = C[a,b]^n, \ X_0 = \{x \in X \wedge x(a) = 0\}$, und f sei eine C^1-Funktion.

Dann hat G die Ableitung $DG : X \to L(X,X)$ mit

$$v = DG(x)u \ \Leftrightarrow \ v(t) = \int_a^t A(s)u(s)ds$$

(hier hat $u \in X$ nichts mit der Steuerung u zu tun; u variiert x).

v ist stetig differenzierbar mit Ableitung $v'(t) = A(t)u(t)$.
Die in einem zulässigen x linearisierte Gleichung $x = G(x)$ wird so zu

$$\begin{aligned} u &= DG(x)u, \text{ d.h.} \\ u(t) &= \int_a^t A(s)u(s)ds \ \text{ bzw. } \ u'(t) = A(t)u(t) \ \text{ mit } \ u(a) = 0. \end{aligned}$$

Für $\|u\| \le K$ in $C^n[a,b]$, erfüllt v die Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli.

Der Operator $L = DG(x) : X \to X$ ist damit vollstetig , und die gestörte linearisierte Gleichung

$$u - DG(x)u = w$$

bedeutet gerade $L_i(u) := (I - L)u = w$ oder als DGL $u(t) - w(t) = v(t) = \int_a^t A(s)u(s)ds$.

Damit ist $u - w$ stetig differenzierbar mit Ableitung $A(t)u(t)$ (obwohl w nicht differenzierbar sein muss).

Für stetig differenzierbares $w \in X_0$ erhält man die (lösbare) inhomogene lineare DGL

$$u'(t) = A(t)u(t) + w'(t), \quad u(0) = 0.$$

Man beachte:
Bei weniger Differentialgleichungen als Funktionen $x'_k = f_k(x,t)$ $(k = 1, \dots, m < n; \ x(t) \in \mathbb{R}^n)$ bedeutet $x = G(x)$ gerade $x_k = G_k(x)$ $\forall k$. Dann bildet (als einziger Unterschied) $g(x)$ mit Komponenten $x_k - G_k(x)$ den Raum X auf $Z = C[a,b]^m$ ab, analog für die Ableitung Dg.

3.3 Die Lagrange-Bedingung

Mit einer Zielfunktion $F(x)$ wird die Lagrange Funktion zur Aufgabe $\min\{F(x) \mid x = G(x)\}$ gerade

$$L(x, \lambda) = F(x) + (\lambda, x - G(x)), \lambda \in Z^*, \; Z = X.$$

Sei auch F ein Integral, $F(x) = \int\limits_a^b h(x,t)dt$, $h \in C^1$. Dann hat $DF(x)u$ die Gestalt

$$DF(x)u = \int\limits_a^b B(s)u(s)ds, \quad B(s) = h_x(x(s), s).$$

3.3.1 Die allgemeine Form

Für eine (lokale) Lösung x gilt daher (weil die Voraussetzungen des Dualitäts-Satzes für Linearisierung erfüllt sind)

$$0 = L_x(x, \lambda)u = DF(x)u + (\lambda, u - DG(x)u) \;\; \forall u \in X_0, \text{ d.h. } u \in X \text{ und } u(a) = 0. \qquad (3.3)$$

Bemerkung: Beachtet man $(I - DG) : X_0 \to X_0$, so bildet der adjungierte Operator $(I - DG)^* : X_0^* \to X_0^*$ den Dualraum in sich ab, und die Gleichung bedeutet wegen $(I - DG)^*(\lambda)u = (\lambda, (I - DG(x))u)$ in dieser Sprache

$$(I - DG(x))^*(\lambda) = -DF(x) \;\; (\in X_0^*).$$

Der Dualraum $Z^* = X^*$ ist der Raum V der Funktionen mit beschränkter Variation:
$\lambda \in V \;\Leftrightarrow\; \lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ wobei λ^+, λ^- (in jeder Komponente) beschränkt und nicht fallend sind, und (λ, x) ist ein Integral:

$$(\lambda, x) = \int\limits_a^b x(t)d\lambda(t),$$

definiert-in üblicher Weise- als Limes über die Zerlegungssummen

$$\sum_k x(t_k)[\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)].$$

Addiert man auf λ eine konstante Funktion, ändert sich der Wert dieser Integrale nicht. Wir setzen deshalb (für spätere partielle Integration zweckmäßig) voraus:

$$\lambda(b) = 0.$$

3.3.2 Differenzierbarer Lagrange Multiplikator

Angenommen, $\lambda \in C^1$. Dann wird (nach Definition der Integralsummen) $(\lambda, u) = \int\limits_a^b u(s)\lambda'(s)ds$, und für stetig differenzierbare u nach partieller Integration

$$(\lambda, u) = [u\lambda]_a b - \int\limits_a^b u'(s)\lambda(s)ds.$$

Also: $(\lambda, u - DG(x)u) = (\lambda, u - v) = \int\limits_a^b (v'(s) - u'(s))\lambda(s)ds + [u\lambda]_a^b - [v\lambda]_a^b$.

Wir erinnern uns an $A = f_x, \; B = h_x$ und $v(t) = \int\limits_a^t A(s)u(s)ds$.

Dann ist $v(a) = 0$, und wegen $u(a) = 0$ sowie $\lambda(b) = 0$ sind, gilt:

$$\begin{aligned} [u\lambda]_a^b = u(b)\lambda(b) &= 0 \\ [v\lambda]_a^b = \lambda(b)\int_a^b A(s)u(s)ds &= 0 \end{aligned}$$

Mit $v'(t) = A(t)u(t)$ folgt deshalb

$$(\lambda, u - DG(x)u) = \int_a^b [A(s)u(s) - u'(s)]\lambda(s)ds.$$

Da $DF(x)u = \int_a^b B(s)u(s)ds$, verlangt deshalb die Lagrange-Gleichung (3.3) insbesondere:

$$0 = \int_a^b B(s)u(s) + [A(s)u(s) - u'(s)]\lambda(s)ds. \tag{Lag0}$$

Damit minimiert $u = 0$ die Integralsumme insbesondere bzgl. aller $u \in C^2$ mit $u(a) = u(b) = 0$.

Wir fassen diese Minimierung als Variationsaufgabe mit gesuchtem u auf. Da sie lösbar ist, hat ihre Eulersche Gleichung eine Lösung. Die Eulersche Gleichung besitzt die Form

$$B(t) + \lambda(t)A(t) + \frac{d}{dt}\lambda(t) = 0, \tag{E^*}$$

Das ergibt eine lineare DGL für λ:

$$-\lambda'(t) = \lambda(t)A(t) + B(t); \quad \lambda(b) = 0. \tag{AD}$$

Dies ist die zugeordnete adjungierte Gleichung. Sie folgt also aus der Lagrange Bedingung (3.3), wenn $\lambda \in C^1$ und $\lambda(b) = 0$.

Angenommen, die Variation u ist nicht differenzierbar

Dann kann man wie folgt schließen:

$$(\lambda, u - DG(x)u) = (\lambda, u - v) = \int_a^b u(t)\lambda'(t)dt - \int_a^b \left(\int_a^t A(s)u(s)ds\right)\lambda'(t)dt.$$

Partielle Integration des 2. Integrals und $\frac{d}{dt}\left(\int_a^t A(s)u(s)ds\right) = A(t)u(t)$ liefert

$$\begin{aligned} (\lambda, u - DG(x)u) &= \int_a^b u(t)\lambda'(t)dt - \left[\lambda(t)\left(\int_a^t A(s)u(s)ds\right)\right]_a^b + \int_a^b \lambda(t)A(t)u(t)dt \\ &= \int_a^b u(t)\lambda'(t)dt - \lambda(b)\left(\int_a^b A(s)u(s)ds\right) + \int_a^b \lambda(t)A(t)u(t)dt. \end{aligned}$$

Damit ist allgemein (Einbeziehen der Zielfunktion, auch $\lambda(b) \neq 0$)

$$L_x(x, \lambda)(u) = \int_a^b [\lambda'(t) + B(t) + \lambda(t)A(t)]\, u(t)dt - \lambda(b)\left(\int_a^b A(s)u(s)ds\right). \tag{3.3}$$

Der letzte Ausdruck entfällt für $\lambda(b) = 0$. Der erste verschwindet genau dann (für alle stetigen u mit $u(a) = u(b) = 0$), wenn $B(t) + \lambda'(t) + \lambda(t)A(t) \equiv 0$, d.h.

$$-\lambda'(t) \equiv B(t) + \lambda(t)A(t). \tag{AD}$$

Existenz eines Lagrange Multiplikators $\lambda \in C^1$

Als lineare Differential-Gleichung mit stetigen Koeffizienten ist (AD) auf dem ganzen Intervall lösbar.
Sei λ die Lösung von (AD). Dann ist mit beliebigem $u \in X$:

$$(\lambda, u) = \int_a^b u d\lambda(t) = \int_a^b u\lambda' dt.$$

Wir betrachen damit die Terme der Lagrange-Bedingung $(Lag0)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b B(s)u(s) + [A(s)u(s) - u'(s)]\lambda(s)ds &= \int_a^b B(s)u(s) + (-B - \lambda')u(s) - u'(s)\lambda(s)ds \\ &= -\int_a^b \lambda' u + u'\lambda ds = -[\lambda u]_a^b ds = 0. \end{aligned}$$

$$L_x u = DF(x)u + (\lambda, u - DG(x)u) = 0 \text{ , wenn nur } u(a) = 0.$$

Also erfüllt λ tatsächlich die Lagrange Bedingung (3.3), $L_x(x, \lambda) = 0$.

3.4 Lagrange Funktion als Integral der Hamilton Funktion

Sei $\lambda \in C^1$. Es gelte $\lambda(b) = 0$ oder x zulässig:

Die Funktion

$$H(x, \lambda, t) = h(x, t) + \langle \lambda(t), f(x, t) \rangle \tag{Ham}$$

heißt Hamilton Funktion der Aufgabe (mit fester Steuerung $u(\cdot)$, die nicht explizit aufgeschrieben ist und λ nicht notwendig Lösung der adjungierten Gleichung).

Wir zeigen durch Ausrechnen von L , dass

$$L(x, \lambda) = \int_a^b H(x(t), \lambda(t), t)dt - \int_a^b \lambda(t)x'(t)dt.$$

Mit $x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds,\ x \in C$ hat die Lagrange Funktion die schon bekannte Form

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= \int_a^b h(x, t)dt + \int_a^b \left(x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds \right) d(\lambda(t)) \\ &= \int_a^b h(x, t)dt + \int_a^b \left(\underbrace{x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds}_{=:\alpha} \right) \lambda'(t)dt. \end{aligned}$$

Nun kann man wieder partiell integrieren, da wir die Ableitung von α kennen:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds\right) = x'(t) - f(x(t), t).$$

Also folgt:

$$L(x, \lambda) = \int_a^b h(x, t)dt - \int_a^b \lambda(t)\left[x'(t) - f(x(t), t)\right]dt + \left[\lambda(t)\left(x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds\right)\right]_a^b$$

wobei

$$\left[\underbrace{\lambda(t)\left(x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), s)ds\right)}_{=:\beta}\right]_a^b = \lambda(b)\left(x(b) - x^0 - \int_a^b f(x(s), s)ds\right), \quad \text{da } x(a) = x^0.$$

Dann ist $[\beta]_a^b = 0$ wenn $\lambda(b) = 0$ oder wenn x zulässig (bzgl. DGL) ist. Dann folgt

$$L(x, \lambda) \;=\; \int_a^b h(x, t) + \langle\lambda(t), f(x, t)\rangle\, dt - \int_a^b \lambda(t)x'(t)dt = \int_a^b H(x(t), \lambda(t), t)dt - \int_a^b \lambda(t)x'(t)dt.$$

Auch die Differentialgleichungen der Originalaufgabe lassen sich mittels H schreiben:
(AD) bedeutet (ohne Anfangs-Bedingung):

$$-\lambda'(t) = H_x(x, \lambda, t).$$

Das originale Differentialgleichungs-system (ohne Anfangs-Bedingung) ist

$$x'(t) = H_\lambda(x, \lambda, t).$$

In Komponenten:

$$\begin{aligned} x_k'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_k} = H_{\lambda_k}(x, \lambda, t) = f_k(x, t) \\ -\lambda_i'(t) &= \frac{\partial H}{\partial x_i} = H_{x_i}(x, \lambda, t) = \frac{\partial h(x, t)}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k(t)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Ableitung von $H(x(t), \lambda(t), t)$ nach t bei dualem Paar x, λ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), \lambda(t), t) &= H_x(x, \lambda, t)x' + H_\lambda(x, \lambda, t)\lambda' + H_t(x, \lambda, t) \\ &= -\lambda'x' + x'\lambda' + H_t(x, \lambda, t) = H_t(x, \lambda, t) \end{aligned}$$

($= 0$ wenn H nicht explizit von t abhängt, also ist dann H konstant in t)

Achtung: Wir haben hier $f(x(t), u(t), t)$ mit fester Steuerungs-Funktion u als $f_u(x(t), t)$ aufgefasst, analog h. Die Abhängigkeit der Funktion L von der Steuerungs-Funktion u wirkt sich nun *nur in H aus*!

Die Gleichungen nehmen dann die Form an (mit $u(s) \in U \subset \mathbb{R}^m$):

$$x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), u(s), s)ds = 0, \quad H(x, \lambda, u, t) = h(x, u, t) + \langle\lambda(t), f(x, u, t)\rangle \quad \text{und}$$

$$L(x,u,\lambda) = \int_a^b H(x(t),\lambda(t),u(t),t)dt - \int_a^b \lambda(t)x'(t)dt \text{ (für zulässige } x \text{ oder für } \lambda(b)=0) \qquad (L^*)$$

Deshalb ist $L_x(x,u,\lambda)(\Delta x)$ auch (für zulässige x oder für $\lambda(b) = 0$)

$$\begin{aligned} L_x(\Delta x) &= \int_a^b H_x(\Delta x)dt - \int_a^b \lambda(t)\Delta x'(t)dt \\ &= \int_a^b H_x(\Delta x)dt + \int_a^b \lambda'(t)\Delta x(t)dt - [\lambda(t)\Delta x(t)]_a^b \\ &= \int_a^b (\lambda'(t) + H_x)\Delta x(t)dt - \lambda(b)\Delta x(b) \\ &= \int_a^b (\lambda' + H_x)\Delta x dt - \lambda(b)\Delta x(b). \end{aligned}$$

Das entspricht der schon abgeleiteten Formel (3.3):

$$L_x(x,\lambda)(\Delta x) = \int_a^b [\lambda'(t) + B(t) + \lambda(t)A(t)]\,\Delta x(t)dt - \lambda(b)\left(\int_a^b A(s)\Delta x(s)ds\right).$$

3.5 Zurück zu Steuerungen

Wir erinnern an die Aufgabe:

$$\min \gamma(x,u) := \int_a^b h(x(t),u(t),t)dt, \quad \text{sodass } x' = f(x(t),u(t),t),\ x(a) = x^0 \qquad (S0).$$

$u(\cdot)$ sei stückweise stetig mit Werten in $U \subset \mathbb{R}^m$.
f, h und f_x, h_x Lipschitz stetig in allen Variablen.

Sei $u(\cdot)$ (Steuerung) eine Lösung mit zugeordnetem $x(\cdot)$ (Trajektorie).
Wir schreiben $x = x_u$. Wir denken uns zunächst u als stetig.
Allgemein kann u als stückweise stetig (rechtsseitig stetig mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen) und beschränkt angesehen werden. Sei λ die zugehörige adjungierte Funktion, siehe (AD).
Bei der Integration der DGL werden dann die Endwerte von x oder λ (als Limes) in einem Stetigkeitsintervall gerade die Anfangswerte für den nächsten Stetigkeitsbereich.
Bei partieller Integration über die einzelnen Stetigkeitsintervalle heben sich so die Terme der Form $[P(t)]_\tau^\sigma$ der Form $\left[\lambda(t)(x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s),u(s),s)ds)\right]_\tau^\sigma$ mit benachbarten Unstetigkeitsstellen τ und σ weg.
Die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung definiert eine Gleichung $x = G_u(x)$. Ihre Linearisierung haben wir behandelt. Dann gilt für optimales $x = x_u$:

$$F(x,u) := x - G_u(x) = 0 \quad \text{und} \quad J_u := \gamma(x,u) = L(x_u,u,\lambda) := \gamma(x_u,u) + (\lambda, F(x_u,u)).$$

Wir wissen: λ als Lösung des adjungierten Systems erfüllt $L_x = 0$.

Die Lagrange Funktion hängt nun noch von (der vorher fixierten Funktion) u ab, ansonsten ist nichts neu.

Außerdem wissen wir: Wenn $\|u - v\|$ klein ist im Sinne von L^1 (und u, v stückweise stetig), so folgt

$$\|x_u - x_v\|_C \leq L\|u - v\|.$$

nach den Abschätzungen über Gronwalls Lemma.

Bemerkungen:

1) Sofern das Intervall kurz ist, folgt die Existenz von x_u und x_v aus dem Satz von Picard-Lindelöff.
   Für große Intervalle und nichtlineare Differentialgleichungen müssen wir die Existenz der Lösungen voraussetzen.

2) Wir haben später u nur auf einem kleinen Intervall zu ändern (durch eine konstante Funktion), brauchen also L^1-Theorie nur rudimental.

3.6 Grundlegende Abschätzungen der Zielfunktion

$F(x, u)$ gegeben durch

$$x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s), u(s), s)ds \tag{DGL}$$

Zielfunktional:

$$\gamma(x, u) = \int_a^b h(x(s), u(s), s)ds.$$

$$L(x, u, \lambda) := \gamma(x, u) + (\lambda, F(x, u))$$

Angenommen $L_x = 0$ für $(x, u, \lambda) = (x_u, u, \lambda)$ und zulässiges $x = x_u$ mit $F(x_u, u) = 0$.
Wir betrachten ein weiteres zulässiges Paar x_v und v und beachten

$$\begin{aligned}
\gamma_x(x_u, v)(x_v - x_u) &= \int_a^b h_x(x_u(t), v(t), t)(x_v(t) - x_u(t))dt \\
\gamma_x(x_u, u)(x_v - x_u) &= \int_a^b h_x(x_u(t), u(t), t)(x_v(t) - x_u(t))dt.
\end{aligned}$$

Die Differenz r beider Terme lässt sich abschätzen in der Form

$$|r| \leq K\|v - u\|_{L^1}\|x_v - x_u\|$$

mit L^1-Norm von $u - v$ wegen

$$\|x_u - x_v\|_C \leq \mathrm{Lip}\|u - v\|_{L^1}.$$

Dann ist $r = o(v - u)$ und $o(x_v - x_u) = o(v - u)$.
Nun gilt für das Zielfunktional $J_u = \gamma(x_u, u)$:

$$\begin{aligned}
J_v - J_u &:= \gamma(x_v, v) - \gamma(x_u, u) \\
&= \gamma(x_v, v) - \gamma(x_u, v) + \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) \\
&= \gamma_x(x_u, v)(x_v - xu) + o(x_v - x_u) + \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) \\
&= \gamma_x(x_u, u)(x_v - x_u) + o(v - u) + r + \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) \quad (o := 2o), \\
\Rightarrow \quad J_v - J_u &= \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) + \gamma_x(x_u, u)(x_v - x_u) + o(v - u).
\end{aligned}$$

Einfacher vielleicht so mit Stetigkeit der Ableitung in beiden Variablen:

$$\begin{aligned}
J_v - J_u &= J(x_v, v) - J(x_u, u) = J(x_v, v) - J(x_u, v) + J(x_u, v) - J(x_u, u) \\
&= J_x(x_u, v)(x_v - x_u) + o(x_v - x_u) + J(x_u, v) - J(x_u, u) \\
&= J_x(x_u, u)(x_v - x_u) + o(x_v - x_u) + (J_x(x_u, v) - J_x(x_u, u))(x_v - x_u) + J(x_u, v) - J(x_u, u) \\
&= J_x(x_u, u)(x_v - x_u) + o(x_v - x_u) + o(x_v - x_u) + J(x_u, v) - J(x_u, u)
\end{aligned}$$

Wenn $J_x(x_u, u) = 0$, so folgt

$$J_v - J_u = o(x_v - x_u) + J(x_u, v) - J(x_u, u).$$

Unterscheiden sich x_u und x_v nur um $\|x_v - x_u\| \leq C\|v - u\|$, was hier über Gronwalls Lemma gesichert ist (siehe unten), so wird

$$\frac{\|o(x_v - x_u)\|}{\|v - u\|} \leq \frac{\|o(x_v - x_u)\|}{\|x_v - x_u\|} \cdot \frac{\|x_v - x_u\|}{\|v - u\|} = o(v - u).$$

Analog lässt sich abschätzen

$$F(x_v, v) - F(x_u, u) = F(x_u, v) - F(x_u, u) + F_x(x_u, u)(x_v - x_u) + o(v - u).$$

Wir addieren und beachten $L_x(x_u, u, \lambda) = 0$ sowie Zulässigkeit:

$$\begin{aligned}
J_v - J_u &= J_v - J_u + (\lambda, F(x_v, v) - F(x_u, u)) \\
&= \gamma_x(x_u, u)(x_v - x_u) + \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) + o(v - u) \\
&\quad + (\lambda, F_x(x_u, u)(x_v - x_u) + F(x_u, v) - F(x_u, u) + o(v - u)) \\
&= \gamma(x_u, v) - \gamma(x_u, u) + o(v - u) + (\lambda, F(x_u, v) - F(x_u, u) + o(v - u)) \\
&= L(x_u, v, \lambda) - L(x_u, u, \lambda) + o(v - u).
\end{aligned}$$

Beachte: x_v tritt nicht mehr explizit auf! Variiert wird nur u, v. Das war das Ziel dieser Abschätzung.
Bei Optimalität von (u, x_u) für $(S0)$ muss deshalb gelten

$$D := L(x_u, v, \lambda) - L(x_u, u, \lambda) \geq -|o(v - u)|.$$

Sei $H(x, \lambda, u, t) = h(x, u, t) + \langle \lambda(t), f(x, u, t) \rangle$ die Hamilton Funktion der betrachteten Aufgabe. Wir haben schon ausgerechnet, dass gilt:

$$L(x, u, \lambda) := \gamma(x, u) + (\lambda, F(x, u)) = \int_a^b H(x(t), \lambda(t), u(t), t)dt - \int_a^b \lambda(t)x'(t)dt.$$

Hier bleibt das 2. Integral bei Variation von u fest, $x = x_u,\ \lambda = \lambda_u$.
Also muss bei Optimalität von (u, x_u) für $(S0)$ mit $\lambda = \lambda_u$ für jedes Paar (v, x_v) gelten:

$$\int_a^b H(x_u(t), \lambda(t), v(t), t) - H(x_u(t), \lambda(t), u(t), t)dt \geq -|o(v - u)|. \tag{3.4}$$

3.7 Maximum-Bedingung

Wir zeigen hiermit die entscheidende Maximum-Bedingung. Sie wird hier nach Definition der adjungierten Gleichung eine Minimum-Bedingung:

Satz 3.3 (Minimum-Bedingung).

$$\omega = u(t) \textit{ realisiert stets } \min_{\omega\in U} H(x_u(t),\lambda(t),\omega,t), \textit{ sofern } \lambda \ (AD) \textit{ löst, d.h.} \tag{MX}$$

$$-\lambda'(t) = A(t)^T\lambda(t)+B(t);\ \lambda(b) = 0 \tag{AD}$$

mit $A(t) = f_x(x(t),u(t),t)$ *und* $B(t) = h_x(x(t),u(t),t)$.

Beweis. Andernfalls fixieren wir t und bilden mittels ω, sodass

$$H(x_u(t),\lambda(t),\omega,t) < H(x_u(t),\lambda(t),u(t),t) - \delta \quad (\delta > 0)$$

eine Steuerung $v = v_{\varepsilon,\omega}$, sodass $v(s) = u(s)$ für $|s-t| > \varepsilon$ und $v(s) = \omega$ sonst.

Ist ε klein, gilt auf dem ε-Intervall um t:

$$H(x_u(s),\lambda(s),v(s),s) < H(x_u(s),\lambda(s),u(s),s) - \delta \quad \forall s:\ |s-t| \le \varepsilon.$$

In den übrigen Punkten fallen u und v zusammen. Außerdem ist

$$\|v-u\|_{L^1} \le \varepsilon C$$

mit einer Konstanten C und deshalb $|o(v-u)| \ll \varepsilon$.

Nun erhalten wir durch Zerlegung des Integrationsbereiches

$$\begin{aligned} D_H &:= \int_a^b H(x_u(s),\lambda(s),v(s),s) - H(x_u(s),\lambda(s),u(s),s)ds \\ &= \int_a^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{b} = 0 + r + 0 \end{aligned}$$

wobei $r \le -2\varepsilon\delta$.

Also folgt mit (3.4) der Widerspruch

$$-2\varepsilon\delta \ge \int_a^b H(x_u(t),\lambda(t),v(t),t) - H(x_u(t),\lambda(t),u(t),t)dt \ge -|o(v-u)|.$$

□

Man beachte: Es entsteht nur dann ein Widerspruch, wenn zu v auch eine Trajektorie x_v gehört!
Dies erforderte eine Zusatzbedingung an die Differentialgleichung (falls sie nichtlinear ist) bei großem $b-a$, während bei kleinem $b-a$ die Existenz mittels des Satzes von Picard-Lindelöff gesichert werden kann.

3.7.1 Abschätzung für Trajektorien

Seien y und x die Lösungen zu u und v, d.h.,

$$y(t) \;=\; x^0 + \int_0^t f(y(s),v(s),s)ds \quad \text{und} \quad x(t) = x^0 + \int_0^t f(x(s),u(s),s)ds.$$

Sei a der linke Randpunkt des Intervalls $I(\varepsilon)$, auf dem $v = v^0$ gilt. Dann ist auf dem Intervall

$$\begin{aligned} y(t) - x(t) &= \int_a^t [f(y(s), v(s), s) - f(x(s), u(s), s)]ds = \int_a^t f(y(s), v^0, s) - f(x(s), u(s), s)ds \\ &= \int_a^t f(y(s), v^0, s) - f(x(s), v^0, s) + f(x(s), v^0, s) - f(x(s), u(s), s)ds \\ &\leq \int_a^t L\|x(s) - y(s)\|ds + \int_a^t \|f(x(s), v^0, s) - f(x(s), u(s), s)\|ds. \end{aligned}$$

Das zweite Integral liefert die Funktion $g(t)$ in Gronwalls Lemma. Also ist auf dem Intervall

$$\|y(t) - x(t)\| \leq g(t)e^{L(t-a)}.$$

Anschließend, im Rest-Intervall, wende man die Abhängigkeit vom Anfangswert an.
Es folgt so $\|y - x\| \leq C\varepsilon$, wobei C von v^0 und $u(\tau)$ abhängt.

3.7.2 Variationsaufgabe als Steuerungsaufgabe

Zielfunktion $\min \int_a^b h(x, u, t)dt$, DGL $x' = u = f(x, u, t),\ f_x = 0, H(x, \lambda, u, t) = h(x, u, t) + \lambda^T u$.
Das adjungierte System

$$-\lambda' = h_x$$

liefert $\lambda(t) = -\int_a^t h_x ds + c$, $\lambda(b) = -\int_a^b h_x ds + c = 0$.

Hamilton-Funktion minimal bzgl. ω in $u(t)$:

$$H(x(t), \lambda(t), \omega, t) = h(x, \omega, t) + \lambda(t)\omega, \quad \omega \in U,\ U \text{ sei offen.}$$

Dann muss wegen Min-Bedingung in jedem t gelten:

$$0 = \frac{dH}{d\omega} = h_u + \lambda(t); \qquad h_u = h_{x'} \text{ in Variationsaufgabe.}$$

Die Ableitung nach t von $h_u + \lambda(t)$ ist also Null, d.h. $\frac{dh_u}{dt} = h_x$. Das ist die Eulersche Gleichung (mit $u = x'$).

3.7.3 Steuerungsaufgabe als Variationsaufgabe

Zielfunktion $\min \int_a^b h(x, u, t)dt$, DGL $x' = f(x, u, t)$, Anfangs- und End-Bedingung $x(a) = A$, $x(b) = B$.

Wir denken uns u als optimal, fest und stetig in $[a, b]$ und betrachten die Ersatz-Aufgabe: Finde $x = x(t)$, sodass die Randbedingungen erfüllt sind und das Integral

$$\int_a^b h(x, u, t) + \frac{1}{2}p(f(x, u, t) - x')^2 dt, \quad p = \varepsilon^{-1}$$

minimal wird (eindimensionaler Fall).

Diese Aufgabe sei lösbar. Die zugehörige Eulersche Gleichung besitzt mit $F(x,u,t) = h(x,u,t) + \frac{1}{2}p(f(x,u,t) - x')^2$, die Form $F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0$, also

$$h_x + p(f(x,u,t) - x')f_x + p\frac{d}{dt}(f(x,u,t) - x') = 0.$$

Im rechten Randpunkt muss gelten, wenn $x(b)$ nicht vorgegeben ist, $F_{x'} = 0$, also hier

$$p(f(x,u,t) - x')_{|t=b} = 0.$$

Mit $\mu(t) = p(f(x(t),u(t),t) - x'(t))$ wird dies $h_x + \mu(t)f_x + \frac{d}{dt}\mu(t) = 0$, d.h., $-\mu'(t) = h_x + \mu(t)f_x$. Also erfüllt μ die adjungierte Gleichung (AD) und, wenn $x(b)$ frei ist, auch die Randbedingung $\mu(b) = 0$.

Variiert $u(t)$ in einer offenen Menge und nutzt man aus, dass auch u optimal ist, erhält man

$$0 = h_u + p(f(x,u,t) - x')f_u = h_u + \mu(t)f_u$$

was jetzt einfach sagt, dass jedes $u(t)$ stationär (bzgl. ω) für die Hamilton-Funktion

$$H = h(x(t),\omega,t) + \langle \mu(t), f(x(t),\omega,t)\rangle$$

zu sein hat.

3.7.4 Bedingungen an den Endpunkt, Transversalitätsbedingung

Der Endzeitpunkt b und/oder die Lage von $x(b)$ seien nun vorgegeben als $g(x(b),b) = 0$. Zunächst bleibe b fest.

Wie oben seien h, f und h_x, f_x Lipschitz (in allen Variablen).
$F(x,u)$ gegeben durch $x(t) - x^0 - \int_a^t f(x(s),u(s),s)ds$ (DGL)

$\gamma(x,u) = \int_a^b h(x(s),u(s),s)ds$ Zielfunktional.

Wir variieren wie schon bei Variationsaufgaben.

$$L(x,u,\lambda,\mu) = g(x,u) + (\lambda, F(x,u)) + \mu g(x(b),b)$$

(mit einem geeigneten μ endlicher Dimension). Nun hat L die schon ausgerechnete Form

$$L(x,u,\lambda,\mu) = \int_a^b H - \lambda(t)x'(t)dt + \mu g(x(b),b) \tag{L^*}$$

$$\Rightarrow \quad L(x,u,\lambda,\mu) = \int_a^b H + \lambda'(t)x(t)dt - [\lambda x]_a^b + \mu g(x(b),b).$$

wobei $H(x,\lambda,u,t) = h(x,u,t) + \langle \lambda(t), f(x,u,t)\rangle$ und

$$\int_a^b -\lambda x' dt = \int_a^b \lambda' x dt - [\lambda x]_a^b = \int_a^b \lambda'(t)x(t)dt - \lambda(b)x(b) + \lambda(a)x(a).$$

Die Ableitung L_x muss Null sein.
Dies bedeutet bei Anwendung von L_x auf Δx mit $\Delta x(a) = 0$, wieder mit $\lambda \in C^1$ (oben schon ausgerechnet)

$$0 = \int_a^b [H_x + \lambda'(t)]\Delta x(t)dt + [-\lambda(b) + \mu g_x(x(b),b)]\Delta x(b).$$

Mittels $\Delta x(b) = 0$ folgt so (notwendig) die schon bekannte adjungierte Gleichung:

$$H_x + \lambda'(t) = 0 \quad \text{(adjungierte Gleichung ist Euler Gleichung zu } \min \int_a^b H - \lambda x' dt) \qquad (3.5)$$

Daher wird das Integral zu Null. Mittels $\Delta x(b) \neq 0$ folgt weiter

$$\lambda(b) = \mu g_x(x(b), b). \qquad (3.6)$$

Jetzt ist die Endbedingung $\lambda(b) = 0$ durch (3.6) ersetzt.

Man sieht außerdem, dass bei freiem $x(b)$ (wenn g nicht auftaucht) notwendig $\lambda(b) = 0$ folgt. Gleichung (3.6) bedeutet allgemein, dass $\lambda(b)$ orthogonal zum Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $M = \{\xi \mid g(\xi, b) = 0\}$ ist (daher der Name Transversalitätsbedingung, weil die Kurve $\lambda(\cdot)$ die Mannigfaltigkeit M in $t = b$ transversal schneidet).

Damit diese Interpretation richtig und die angegebenen Bedingungen notwendig sind, brauchen wir *Regularität*. Dazu reicht:

$g_x(x(b), b)$ hat vollen Rang. $(V1)$

Zu Endbedingungen $x(b) = \xi$ mit ξ nahe $x_u(b)$ finden sich Steuerungen u_ξ, sodass entsprechende $x = x(t)$ den Punkt x^0 in ξ überführen (und die DGL erfüllen), d.h. $x' = f(x(t), u_\xi(t), t),\ x(a) = x^0,\ x(\beta) = \xi \quad (\beta = b)$. $(V2)$

Bei variabler Endzeit b muss $(V2)$ auch für β nahe b möglich sein.

3.7.5 Variable Endzeit

Ist auch b variabel, muss die Ableitung L_b ebenfalls verschwinden.
Das heißt mit der 1. Gleichung in (L^*); immer bei entsprechender *Regularität*:

$$0 = H(x(b), \lambda(b), u(b), b) - \lambda(b)x'(b) + \mu[g_x(x(b), b)x'(b) + g_b(x(b), b)].$$

Man beachte, dass schon $\lambda(b) = \mu g_x(x(b), b)$ gilt, deshalb kann man dafür auch schreiben

$$0 = H(x(b), \lambda(b), u(b), b) + \mu g_b(x(b), b). \qquad (3.7)$$

Dazu kommt die schon abgeleitete

$$\text{Min-Bedingung: } \omega = u(t) \text{ realisiert stets } \min_{\omega \in U} H(x_u(t), \lambda(t), \omega, t). \qquad (3.8)$$

Notwendige Bedingungen
Als notwendige Bedingungen erhält man also insgesamt bei $g(x(b), b) = 0$:
Es existieren $\lambda = \lambda(t)$ und μ mit

$$\begin{aligned} h_x + \lambda(t)^T f_x &= -\lambda(t)' \\ \lambda(b) &= \mu g_x(x(b), b) \quad \text{(variabler Endpunkt } x(b) \text{ entspricht } g = 0) \\ H(x(b), \lambda(b), u(b), b) + \mu g_b(x(b), b) &= 0 \quad \text{(variable Endzeit } b) \end{aligned}$$

und die Min. Bedingung (3.8).

Dieselben Nebenbedingungen in einer Variationsaufgabe (s.o.) führten zu

$$\begin{aligned} 0 &= f_{x'} + \mu g_x(x(b), b) \quad \text{im Endpunkt (schon bei festem } b \text{ notwendig) und} \\ 0 &= f - x' f_{x'} + \mu g_b(x(b), b) \quad \text{im Endpunkt.} \end{aligned}$$

3.7.6 Fester Endpunkt bei variabler Zeit

Interessant ist besonders der Fall $x(b) = B$ bei variablem b.
Dann soll die Trajektorie irgendwann durch den gegebenen Punkt B verlaufen (womit der Prozess beendet ist). Wir erhalten dann wegen $g_x = E$ und $g_b = 0$:

$$\lambda(b) = \mu \quad \text{und} \tag{3.6'}$$

$$H(x(b), \lambda(b), u(b), b) = 0. \tag{3.7'}$$

Beides sagt, weil μ sonst nirgends auftritt, dass $\lambda(b)$ beliebig sein kann, aber zusammen mit den übrigen Werten (3.7′) erfüllen muss. Es bleibt also nur die Zusatzbedingung

$$H(x(b), \lambda(b), u(b), b) = 0 \quad (\text{neben } h_x + \lambda(t)^T f_x = -\lambda(t)' \text{ und Min.-Bedingung (3.8)}) \tag{3.9}$$

3.7.7 Phasenbedingungen

Sei zusätzlich

$$G(x(t), t) \leq 0$$

gefordert ($G : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ hinreichend glatt). Die linke Seite ist eine stetige Funktion in t mit zusätzlicher Glattheit, da $x = x_u$ die DGL löst.
In der Lagrange Funktion tritt nun noch ein Term (φ, G) auf mit der Ableitung (φ, G_x), wobei

$$(\varphi, G_x \Delta x) = \int_a^b G_x(x(t), t)\Delta x(t) d\varphi(t) \quad \text{und} \quad \varphi(t) \geq 0 \quad \text{sowie} \quad \varphi(t) = 0 \text{ für } G(x(t), t) < 0$$

erfüllt.
Achtung: $(\varphi, G_x \Delta x)$ hängt nicht explizit von u ab, daher geht der Term nicht in die Max.-Bedingung ein.
Im Variationsansatz entspricht φ der Funktion $\varepsilon^{-1} G(x(t), t)^+$:

$$\min \int_a^b h(x, u, t) + \frac{1}{2} p(f(x, u, t) - x')^2 + \frac{1}{2} p(G(x, t)^+)^2 dt; \quad p = \varepsilon^{-1}$$

wobei $G(x, t)^+ = \max\{G(x, t), 0\}$.
Die zugehörige Eulersche Gleichung besitzt die Form

$$h_x + p(f(x, u, t) - x')f_x + pG(x(t), t)^+ G_x(x(t), t) + p\frac{d}{dt}(f(x, u, t) - x') = 0.$$

Mit $\mu(t) = p(f(x(t), u(t), t) - x'(t))$ und $\varphi(t) = pG(x(t), t)^+$ folgt so in der Tat $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(t) = 0$ für $G(x(t), t) < 0$ und die Eulersche Gleichung

$$\begin{aligned} h_x + \mu(t) f_x + \varphi(t) G_x(t) + \frac{d}{dt}\mu(t) &= 0, \quad \text{d.h.,} \\ -\mu'(t) &= h_x + \mu(t) f_x + \varphi(t) G_x(t) \end{aligned}$$

Also erfüllten μ, φ die durch φG_x ergänzte adjungierte Gleichung.
Der Term φG_x erscheint zusätzlich zu h_x in der rechten Seite.

Das ist an dieser Stelle nur eine heuristische Überlegung, weil wir nicht gezeigt haben, dass die Variationsaufgabe lösbar bleibt.
Der korrekte Beweis könnte wieder mittels Lagrange-Prinzip für die Steuerungsaufgabe geführt werden. Ein anderer Weg besteht in der Anwendung des Ekeland-Prinzips (s. Anhang 5.1, S.60), das die Existenz von Lösungen nach beliebig kleinen speziellen Störungen der Aufgabe garantiert,

sofern entsprechende Infima endlich sind.
Variiert $u(t)$ in einer offenen Menge und nutzt man aus, dass auch u optimal ist, erhält man

$$0 = h_u + p(f(x,u,t) - x')f_u = h_u + \mu(t)f_u$$

was jetzt einfach sagt, dass jedes $u(t)$ stationär (bzgl. ω) für die Hamilton-Funktion

$$H = h(x(t),\omega,t) + \langle \mu(t), f(x(t),\omega,t)\rangle$$

zu sein hat.

3.8 Lineare zeitoptimale Probleme mit gegebenem Endpunkt

Sei $x(T)$ gegebener Endpunkt.
Lineare DGL mit festen Koeffizienten, minimale Endzeit b so, dass $x(b) = \xi^b$ (fixiert).

$$\begin{aligned} \gamma(x,u) &= b - a = \int_a^b 1dt, \\ g(x,b) &= x - \xi^b = 0, \\ x' &= Ax + Bu + \beta, \\ x(a) &= x^0, \\ u(t) &\in U. \end{aligned}$$

Dann $H = 1 + (\lambda, Ax + Bu + \beta)$, $h_x = 0$. Im Folgenden spielt β keine Rolle.

Optimalitätsbedingung:
Adjungiertes System: $-\lambda' = \lambda^T A$.
Max-Bedingung:
Die in ω lineare Funktion $(\lambda(t)^T B, \omega)$ ist minimal in $\omega = u(t)$ bzgl. $\omega \in U$, sowie

$$0 = -\lambda(b) + \mu g_x(x(b), b) \tag{3.6}$$

d.h. $\lambda(b) = \mu$ und

$$0 = H(x(b),\lambda(b),u(b),b) + \mu g_b(x(b),b),\ x(b) = \xi^b,\ \text{d.h. wegen } g_b = 0\ \wedge\ \lambda(b) = \mu \tag{3.7}$$

$$0 = 1 + \left\langle \lambda(b), A\xi^b + Bu(b) + \beta \right\rangle. \tag{3.7'}$$

Dies ist i.A. (bei $\dim U > 1$) auch mit Min-Bedingung keine eindeutige Bedingung an $\lambda(b), u(b) \in U$.
Man rechne weiche Mondlandung als ÜA (siehe auch 3.11.2, S.44)(dort liefert diese Bedingung μ und $u(b)$ eindeutig)!
Wegen (3.7) ist λ nicht die triviale Lösung der adjungierten Gleichung!

Was ändert sich, wenn man statt zeitoptimal möglichst „billig“ steuern will?

$$\gamma(x,u) = \int_a^b |u(t)|dt \quad \text{oder einfacher} \quad \gamma(x,u) = \int_a^b u(t)dt, \quad 0 \le u(t) \le 1.$$

Nun ist

$$H = u + (\lambda, Ax + Bu + \beta), \quad 0 = u(b) + (\lambda(b), Ax(b) + Bu(b) + \beta) \qquad (= H(b))$$

und $u(t)$ minimiert erneut eine lineare Funktion über der Menge U:
$(\mathbb{1}, \omega) + (\lambda(t)^T B, \omega)$ minimal in $\omega = u(t)$ bzgl. $\omega \in U$.

Bei $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ ist $\mathbb{1}$ der m-dimensionale 1-Vektor und das Zielintegral eine Summe über die Komponenten.
Die Addition einer festen Funktion $p(x)$ in den Zielintegranden würde daran nichts ändern, also etwa

$$\gamma(x, u) = \int_a^b u(t) + p(x(t))dt, \quad 0 \leq u(t) \leq 1.$$

Wie vorher spielen bei Polyedern U die Ecken die entscheidende Rolle.
Aber: Jetzt kann man aus $H(b) = 0$ (in $b = T$) nicht folgern, dass λ nichttrivial ist!
Deshalb kann sich die Max-Bedingung als trivial erweisen.
Insbesondere gibt es die letzte Bedingung (die ja aus variabler Zeit T resultiert) nicht, wenn man sich die Endzeit als gegeben denkt und „billig“ gelandet werden soll.

3.8.1 Bang-bang-Prinzip

Voraussetzung an die Aufgabe: zeitoptimal, linear, allgemeine Lagebedingung.
Wir suchen $\min T$, sodass

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset \mathbb{R}^m \quad \text{(ein kompaktes Polyeder im } \mathbb{R}^m\text{, } u \text{ stückweise stetig)}, \\ x' &= Ax + Bu \ (+\text{const.}), \\ x(0) &= x^0 \in \mathbb{R}^n, \\ x(T) &= x^1 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen zeigen wir als erstes:

Satz 3.4 (Endlich viele Sprünge)**.** *Für jedes Tripel (x, u, λ), das die notwendigen Bedingungen erfüllt, ist u eine stückweise konstante Funktion mit Werten in der Eckpunktmenge von U, sofern die sogenannte **Bedingung der allgemeinen Lage** erfüllt ist.*
Sie verlangt, dass die Vektoren $Bw, ABw, \ldots, A^{n-1}Bw$ linear unabhägig *im $\mathbb{R}^n$ sind für jeden Kantenvektor w von U.*

Beweis. Sei (x, u, λ) ein solches Tripel. Die Minimum-Bedingung verlangt, dass

$$\lambda(t)Bu(t) = \langle \varphi(t), u(t) \rangle \quad \text{(mit stetigem } \varphi\text{)}$$

jeweils minimal bzgl. $u \in U$ ist. Im „Normalfall“ ist dann $u(t)$ -als Lösung einer linearen Optimierungs-Aufgabe- eine eindeutig bestimmte Ecke von U.
Nur wenn die Lösung der LO-Aufgabe nicht eindeutig ist, kann u seine Werte ändern. Dann sind aber mindestens 2 Ecken optimal, und damit auch eine Kante $w = w(t)$, die beide verbindet. Sind unendlich viele Sprunge möglich, so wird eine der endlich vielen Kanten auch unendlich oft in dieser Weise aktiv. Sei w eine solche Kante zu Sprungen in $t_1, t_2, \ldots$ Da beide ihrer Endpunkte optimal sind, muss gelten $\lambda(t)Bw = 0$ in diesen $t = t_k$. Als Lösung der adjungierten Gleichung

$$\lambda'(t) = -\lambda(t)A \tag{ad}$$

(linear mit konstantem A) ist λ eine analytische Funktion, ebenso die Abbildung $t \to h(t) := \lambda(t)Bw$.
Weil sich die Nullstellen von h häufen, muss deshalb h *identisch* Null sein. Damit folgt

$$\lambda(t)Bw = 0 \quad \forall t$$

und also auch

$$0 = \frac{d}{dt}\lambda(t)Bw = \lambda'(t)Bw = -\lambda(t)ABw.$$

Weiteres Differenzieren von $\lambda(t)ABw$ ergibt analog mittels (ad):

$$0 = \lambda(t)A^2Bw$$

und bei Wiederholung diese Schlusses ...

$$0 = \lambda(t) A^{n-1} Bw.$$

Damit ist stets $\lambda(t)$ orthogonal zu den Basisvektoren $Bw, ABw, \dots, A^{n-1}Bw$ des $\mathbb{R}^n$, somit also $\lambda(t)$ identisch Null, was der notwendigen Bedingung

$$0 = 1 + \langle \lambda(b), Ax(b) + Bu(b) + \beta \rangle = 1 \tag{3.7'}$$

widerspricht. □

3.8.2 Die Zahl der Umschaltpunkte

Satz 3.5. *Besitze außerdem A nur reelle Eigenwerte, und sei U ein Quader. Dann hat jede der Funktionen u_k maximal $n-1$ Sprünge.*

Beweis. Wieder ist nach „Maximumprinzip“ $\lambda(t)Bu$ zu minimieren, diesmal mit $\alpha_i \le u_i \le \beta_i$.

$$\lambda(t)Bu = \sum_i \sum_k \lambda_i(t) b_{i,k} u_k = \sum_k u_k \left(\sum_i b_{i,k} \lambda_i(t) \right) = \sum_k u_k \varphi_k(t).$$

Man erhält jetzt für die Lösung des adjungierten Systems die spezielle Form (aufgeschrieben nur für λ_1):

$$\lambda_1(t) = \sum_\nu g_\nu(t) \exp(\theta_\nu t);$$

wobei θ_ν $(\nu = 1, \dots, p)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $-A^T$ mit Vielfachheit r_ν durchläuft und demzufolge $g_\nu(t)$ ein Polynom in t vom Grade $d_\nu \le r_\nu - 1$ ist.
Als Linearkombination der $\lambda_i(t)$ hat jede Funktion $\varphi_k(t)$ dieselbe Form

$$\varphi_k(t) = \sum_\nu g_{\nu,k}(t) \exp(\theta_\nu t),$$

und $u_k(t)$ kann nur umschalten, wenn $\varphi_k(t) = 0$.
Also muss die Anzahl von Nullstellen von Funktionen der Form

$$\varphi(t) = \sum_{\nu \in \{1,\dots,p\}} g_\nu(t) \exp(\theta_\nu t)$$

abgeschätzt werden.

Also folgt aus nachfolgendem Lemma 3.6, dass die Zahl der Umschaltpunkte von $u_k(t)$ nicht größer als

$$(r_1 - 1) + \ldots + (r_p - 1) + (p - 1) = r_1 + \ldots + r_p - 1 = n - 1$$

ist. □

Lemma 3.6. *Sind $g_\nu(t)$ Polynome vom Grade d_ν (p Stück), so hat $\varphi(t)$ maximal $\mu = d_1 + d_2 + \ldots + d_p + (p-1)$ Nullstellen.*

Beweis. Angenommen $\varphi(t)$ hat mindestens $\mu = d_1 + d_2 + \ldots + d_p + p$ Nullstellen.
Für $p = 1$ ist das unmöglich, also Induktionsbeweis:
Multiplikation von $\varphi(t)$ mit $\exp(-\theta_p t)$ liefert

$$\varphi_{neu}(t) = \sum_{\nu < p} g_\nu(t) \exp[(\theta_\nu - \theta_p)t] + g_p(t)$$

mit derselben Zahl von Nullstellen wie φ.

Wir „differenzieren das letzte Polynom weg".
Zwischen 2 Nullstellen von φ_{neu} gibt es eine Nullstelle der Ableitung: Also hat die erste Ableitung von φ_{neu}, nämlich $\frac{d}{dt}\varphi_{neu}(t)$ noch mindestens $d_1 + d_2 + \ldots + d_p + (p-1)$ Nullstellen.

Differenziert man $(d_p + 1)$ mal, bleiben so mindestens

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_p + p - (d_p + 1) = d_1 + d_2 + \ldots + d_{p-1} + p - 1$$

Nullstellen übrig. Die d_{p+1}-te Ableitung besteht aus nur $p-1$ Summanden, d.h. sie hat die Form

$$\varphi_p(t) = \sum_{\nu<p} g_{\nu,p}(t) \exp[(\theta_\nu - \theta_p)t].$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist ihre Nullstellenzahl aber höchstens

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_{p-1} + (p-1) - 1 < d_1 + d_2 + \ldots + d_{p-1} + p - 1.$$

$\square$

3.9 Feedback-Steuerung (Rückkoppelung)

Wann hängt eine optimale Steuerung $u = u(t)$ nur von $x(t)$ (und t) ab ?

Standard-Beispiel:

$$\min \tfrac{1}{2} \int_a^b xPx + uQu \; dt, \quad P \text{ symmetrisch},$$

$$x' = Ax + Bu, \quad x(a) = x^0, \quad Q \text{ symmetrisch, posititiv definit, } U = \mathbb{R}^m.$$

Adjungiertes System:

$$-\lambda' = Px + A^T\lambda, \quad \lambda(b) = 0. \tag{3.10}$$

Min-Bedingung: $H = \frac{1}{2}(xPx + uQu) + \langle\lambda, Ax + Bu\rangle$ in $u = u(t)$ minimal.
D.h. $u = u(t)$ realisiert $Qu + B^T\lambda = 0$, $u = -Q^{-1}B^T\lambda$.
Nun kann man die explizite Gestalt von u nutzen: Dann beschreiben (3.10) und

$$x' = Ax - BQ^{-1}B^T\lambda \quad \text{(hier würde } +\beta \text{ in der DGL für } x' \text{ stören)} \tag{3.11}$$

unsere Funktionen. Randbedingungen teils in a (für x) teils in b (für λ).
Alles zusammen lässt sich mittels einer **Matrix-Riccati Gleichung** behandeln.
Die Forderung: Finde $R = R(t)$, sodass

$$\lambda(t) = R(t)x(t),$$

lässt sich erfüllen (ausrechnen!) durch die Lösung von

$$\frac{dR}{dt} = -(RA + A^TR) + R(BQ^{-1}B^T)R - P, \quad R(b) = 0. \tag{3.12}$$

Mit $-\lambda' = Px + A^T\lambda$, aus (3.10) ergibt das

$$\begin{aligned} -(R'(t)x(t) + R(t)x'(t)) &= Px + A^TR(t)x(t) \\ -R'(t)x(t) - R(t)(Ax - BQ^{-1}B^T\lambda) &= Px + A^TR(t)x(t) \\ -R'(t)x(t) - R(t)(Ax - BQ^{-1}B^TR(t)x(t)) &= Px + A^TR(t)x(t). \end{aligned}$$

Die Riccati Gleichung (3.12) hat eine symmetrische, positiv semi-definite Lösung $R(t) = R^T(t)$.
Man erhält so:

$$u(t) = -Q^{-1}B^T\lambda(t) = -Q^{-1}B^TR(t)x(t),$$

also ist $u(t)$ *nur* abhängig von $x(t)$ und über R von t.

3.10 Ansatz mittels dynamische Optimierung

3.10.1 Ansatz über dynamische Optimierung I

Zeitoptimales Problem, Überführung von x^0 in x^1; minimale Zeit sei T; $x' = f(x, u)$.
Bei Anfangspunkt $x(0) = z$ sei $F(z)$ die zugehörige minimale Zeit; $F(x^0) = T$.

Die Funktion F sei erklärt für Punkte z nahe irgendwelcher $x(t)$ aus einer zu x^0 gehörenden Trajektorie $x = x(t)$ zu einer optimalen Steuerung $u = u(t)$.

1. Dann gilt für die Punkte auf einer Trajektorie $x_z(\cdot)$ zu optimalem $u_z(\cdot)$, beginnend in einem festen z mit Zeit 0:
   $F(x_z(t)) = F(z) - t$, und bei Differenzierbarkeit von F:
   $$\frac{d}{dt}F(x_z(t)) = \langle DF(x_z(t)), x_z'(t)\rangle = -1. \tag{3.13}$$
   Außerdem ist $\langle DF(x_z(t)), x_z'(t)\rangle = \langle DF(x_z(t)), f(x_z(t), u_z(t))\rangle$.
2. Mit Anfangs-Punkt z steuere man nun zunächst über die Zeit ε mittels $v \in U$ (beliebig fest), anschließend mit der zum resultierende Punkt ζ optimalen Steuerung.
   Dann ist $\zeta = z + \varepsilon f(z, v) + o(\varepsilon)$, und für die Zeit gilt $\varepsilon + F(\zeta) \geq F(z)$.
   Also: $F(z + \varepsilon f(z, v) + o(\varepsilon)) - F(z) \geq -\varepsilon$ und über $\varepsilon \searrow 0$:
   $$\langle DF(z), f(z, v)\rangle \geq -1 \quad \forall v \in U \text{ mit Minimum } -1 \text{ in } v = u_z(0) \text{ nach (3.13).} \tag{3.14}$$
3. Sei $\lambda(t) = DF(x(t))$ mit einer optimalen Trajektorie $x(\cdot)$ und Steuerung $u(\cdot)$ zu $x(0) = x^0$. Dann realisiert also $u(t)$ stets die *Minimumbedingung*
   $$\langle \lambda(t), f(x(t), v)\rangle \geq -1 \equiv \langle \lambda(t), f(x(t), u(t))\rangle \quad \forall v \in U. \tag{3.15}$$
4. Adjungiertes System: Mit $v = u(t)$ in (3.14) Variation von z nahe $x(t)$.
   Wir betrachten
   $$P(z) := \langle DF(z), f(z, u(t))\rangle$$
   für z nahe $x(t)$; t fixiert.

   Es gilt wegen (3.14), $P(z) \geq -1$; und P nimmt in $z^* = x(t)$ wegen (3.13) das Minimum -1 an. Also gilt neben
   $$\begin{array}{rrcl} & \langle DF(x(t)), f(x(t), v)\rangle & \geq & -1 \equiv \langle DF(x(t)), f(x(t), u(t))\rangle \quad \forall v \in U. \\ \text{auch} & \langle DF(z), f(z, u(t))\rangle & \geq & \langle DF(x(t)), f(x(t), u(t))\rangle \quad \forall z \text{ nahe } x(t). \end{array}$$

   Sei sogar $F \in C^2$. Dann existiert $\nabla P(z)$, und es folgt mit festem t nach Produktregel:
   $$0 = \nabla P(z^*) = \nabla P(x(t)) = D^2F(x(t))f(x(t), u(t)) + DF(x(t))f_x(x(t), u(t)). \tag{3.16}$$
   Damit erfüllt $\lambda(t) = DF(x(t)) \ \in \mathbb{R}^n$,
   $$\lambda'(t) = D^2F(x(t))x'(t) = D^2F(x(t))f(x(t), u(t)) = \langle -DF(x(t)), f_x(x(t), u(t))\rangle\,,$$
   also die adjungierte Gleichung:
   $$\lambda'(t) = -\lambda(t)f_x(x(t), u(t)). \tag{3.17}$$
   Die Bedingungen (3.15) und (3.17) sind die schon bekannten Optimalitätsbedingungen einschließlich der Endbedingung $1 + \langle \lambda(T), f(x(T), u(T))\rangle = 0$ (Dies ist Hamilton-Funktion, ausgewertet in T).
   Wir erhalten somit zusätzlich (bei entsprechender Differenzierbakeit von F) die Zusammenhänge
   $$\begin{aligned} \lambda(t) &= DF(x(t)) \\ \lambda'(t) &= D^2F(x(t))f(x(t), u(t)) = -\langle DF(x(t)), f_x(x(t), u(t))\rangle\,. \end{aligned}$$

Achtung: Im Allgemeinen muss F nicht differenzierbar sein (in Sprüngen von u).
Die Ableitungen DF und D^2F können dann allerdings auch in einem verallgemeinerten Sinne verstanden werden; insbesondere wird DF dann ein gewisses Subdifferential (mehrelementig; in vielen Fällen reicht das von Clarke) und D^2F dessen verallgemeinerte Ableitung (oft ein sogenanntes „approximate“ oder „proximal“ Subdifferential).
In den C^1 bzw. C^2 Punkten von F sind diese Ableitungen wieder die gewöhnlichen (F-)Ableitungen.

3.10.2 Ansatz über dynamische Optimierung II

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir das Problem $\min \int_0^b u(t)dt$ bei Überführung von x^0 in x^1; minimaler Treibstoffverbrauch; $x' = f(x,u)$, z.B. $0 \le u \le 1$. Alles analog zu oben:
Bei Anfangspunkt $x(0) = z$ sei $F(z)$ der zugehörige minimale Treibstoffverbrauch; $F(x^0) = v_0$.
Die Funktion F sei erklärt für Punkte z nahe irgendwelcher $x(t)$ aus einer zu x^0 gehörenden Trajektorie $x = x(t)$ zur optimalen Steuerung $u = u(t)$.

1. Dann gilt für die Punkte auf einer Trajektorie $x_z(\cdot)$ zu optimalem $u_z(\cdot)$, beginnend in einem festen z mit Zeit 0:

$$F(x_z(t)) = F(z) - \int_0^t u(s)ds, \quad \text{und bei Differenzierbarkeit von } F\text{:}$$

$$\frac{d}{dt}F(x_z(t)) = \langle DF(x_z(t)), x_z'(t)\rangle - u(t) \;\; \text{(in Stetigkeits-Punkten von } u) \tag{3.18}$$

   Außerdem ist $\langle DF(x_z(t)), x_z'(t)\rangle = \langle DF(x_z(t)), f(x_z(t), u_z(t))\rangle$.

2. Mit Anfangs-Punkt z steuere man nun zunächst über die Zeit ε mittels $v \in U$ (beliebig fest), anschließend mit der zum resultierende Punkt ζ optimalen Steuerung.
   Dann ist $\zeta = z + \varepsilon f(z,v) + o(\varepsilon)$, und für den Verbrauch gilt $\varepsilon v + F(\zeta) \ge F(z)$.
   Also: $F(z + \varepsilon f(z,v) + o(\varepsilon)) - F(z) + \varepsilon v \ge 0$ und über $\varepsilon \searrow 0$:

$$\langle DF(z), f(z,v)\rangle + v \ge 0 \quad \forall v \in U \text{ mit Minimum in } v^* = u_z(0) \text{ nach (3.18).} \tag{3.19}$$

3. Sei $\lambda(t) = DF(x(t))$ mit einer optimalen Trajektorie $x(\cdot)$ und Steuerung $u(\cdot)$ zu $x(0) = x^0$.
   Dann realisiert also $u(t)$ stets die Minimumbedingung

$$\langle \lambda(t), f(x(t),v)\rangle + v \ge u(t) + \langle \lambda(t), f(x(t),u(t))\rangle \;\; (=0) \qquad \forall v \in U. \tag{3.20}$$

4. Wir betrachten $P(z) := \langle DF(z), f(z,u(t))\rangle + u(t)$ für z nahe $x(t)$; t fixiert.
   Es gilt wegen (3.19), $P(z) \ge 0$, und P nimmt in $z^* = x(t)$ wegen (3.18) das Minimum 0 an. Sei sogar $F \in C^2$. Dann existiert $\nabla P(z)$, und es folgt:

$$0 = \nabla P(z^*) = \nabla P(x(t)) = D^2F(x(t))f(x(t),u(t)) + DF(x(t))f_x(x(t),u(t)). \tag{3.21}$$

   Damit erfüllt

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= DF(x(t)), \\ \lambda'(t) &= D^2F(x(t))x'(t) = D^2F(x(t))f(x(t),u(t)) = \langle -DF(x(t)), f_x(x(t),u(t))\rangle, \end{aligned}$$

   die adjungierte Gleichung:

$$\lambda'(t) = -\lambda(t)f_x(x(t),u(t)). \tag{3.22}$$

   Die Bedingungen (3.20) und (3.22) sind die schon bekannten Optimalitätsbedingungen einschließlich der Bedingung

$$H(t) := u(t) + \langle \lambda(t), f(x(t),u(t))\rangle = 0.$$

Die Hamiltonfunktion ist konstant wenn f und h nicht explizit von t abhängen, wissen wir schon. Also ist dies die ebenfalls bekannte Endbedingung.
Wir erhalten somit keine neuen, aber wieder die bekannten Bedingungen und die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= DF(x(t)) \\
\lambda'(t) &= D^2F(x(t))f(x(t),u(t)) = -\langle DF(x(t)), f_x(x(t),u(t))\rangle .
\end{aligned}$$

3.11 Beispiele

3.11.1 Federaufgabe

$\min -(x_1(T)-x_1(0)) = -\int\limits_0^T x_2 dt$, T fest; Ortskoordinate x_1 mit Ableitung $x_1' = x_2$ soll maximal werden in $t = T$ (also ist maximaler Wert $x_1(T)$ gefragt).

u: Zugkraft an Feder (nach rechts $\rightarrow$).

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= -w^2x_1 + Bu, \quad -1 \le u \le 1, \quad x(0) = (a_0, v_0), \quad B > 0. \\
w &= \text{Federkonstante.} \\
x' &= Ax + (0,B)^T u \quad \text{mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Hamilton-Funktion: $H = -x_2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-w^2x_1 + Bu)$.
Min-Bedingung liefert: $u = 1$ falls $\lambda_2 B < 0$; $u = -1$ falls $\lambda_2 B > 0$.

Adjungiertge Gleichung $-\lambda' = H_x$:

$$\begin{aligned}
-\lambda_1' &= H_{x_1} = -w^2\lambda_2 \\
-\lambda_2' &= H_{x_2} = \lambda_1 - 1
\end{aligned}$$

Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -w^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind: $\mu^2 = -w^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = -wi$, $\mu_2 = wi$ liefert allgemeine Form der homogenen Lösung:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = a\sin wt + b\cos wt \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1' = w(a\cos wt - b\sin wt) \\
\lambda_2 = c\sin wt + d\cos wt \quad &\Rightarrow \quad \lambda_2' = w(c\cos wt - d\sin wt)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
-\lambda_1' &= -w(a\cos wt - b\sin wt) = -w^2(c\sin wt + d\cos wt) = -w^2\lambda_2 \\
-\lambda_2' &= -w(c\cos wt - d\sin wt) = a\sin wt + b\cos wt = \lambda_1
\end{aligned}$$

liefert $-aw = -dw^2$, $bw = -w^2c$ und $-cw = b$, $dw = a$, also

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= w(d\sin wt - c\cos wt) \\
\lambda_2 &= c\sin wt + d\cos wt.
\end{aligned}$$

Inhomogene Lösung $\lambda(t)$:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 + w(d\sin wt - c\cos wt) \\
\lambda_2 &= c\sin wt + d\cos wt.
\end{aligned}$$

Wegen $\lambda(T) = 0$ muss man setzen:

$$\begin{aligned} c &= w^{-1} \cos wT, \\ d &= -w^{-1} \sin wT, \end{aligned}$$

woraus das Vorzeichen von $\lambda_2(0) = d$ (falls $\neq 0$) den Wert $u_0 = u(0)$ definiert.
Trajektorie $x(t)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= ku(t) + \frac{v_0}{w} \sin wt + (a_0 - u_0 k) \cos wt, \quad k = \frac{B}{w^2}. \\ x_2 &= w \left[\frac{v_0}{w} \cos wt - (a_0 - u_0 k) \sin wt \right]. \end{aligned}$$

Die Kurve $x(t)$ wird erzeugt mit $u(t) = -\mathrm{sgn}\lambda_2(t)$.

Die Gleichung ist nur im ersten Stetigkeits-Abschnitt $[0, t_1]$ von u gültig!

Im nächsten hat man einen neuen Anfangswert $(a_1, v_1) = x(t_1)$ und erhält nun in obiger Weise die Werte von $x(t) := x(t + t_1)$ bis zum nächsten Umschaltpunkt von u. Dazu ist also $t = t - t_1$ zu setzen.

3.11.2 Lösung weiche Mond-Landung, zeitoptimal

$h' = v$, $v' = -g_M + \rho u$, $0 \leq u \leq 1$.

Man kann ausrechnen: Umschaltpunkt

$$\tau = \frac{v_0}{g_M} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g_M}\right)^2 - \frac{v_0^2 - 2Rh_0}{W}},$$

wobei $R = \rho - g_M$, $W = g_M^2 + Rg_M = (g_M + R)g_M$.

Positive Anfangs-Geschwindigkeit in Richtung Mond heißt: v_0.

Notwendige Bedingungen an Existenz einer Lösung:

$$\left(\frac{v_0}{g_M}\right)^2 - \frac{v_0^2 - 2Rh_0}{W} > 0 \quad \wedge \quad \rho > g_M.$$

Zusammen mit $\tau > 0$ sind sie hinreichend.

Die Endzeit wird dann $\tau + t$ mit $t = \frac{-v(\tau)}{R} = -\frac{v_0 - g\tau}{R}$.

3.12 Diskretisierung für Standard-Aufgabe; fester Endpunkt, keine Endbedingung

1. Man sehe u als gegeben an, etwa konstant in Intervallen einer Diskretierung von $[a, b]$.
2. Damit löse man die DGL $x' = f(x, u, t)$, $x(a) = x^0$; (exakt bzw. näherungsweise).
3. Hat man u und $x = x_u$, kann man das adjungierte System lösen um $\lambda = \lambda_u$ zu erhalten
4. Danach benutze man die Maximum-Bedingung:
   ω realisiert bei diskreten t das Minimum von $H = h(x_u, \omega, t) + \lambda^T f(x_u, \omega, t)$, $\omega \in U$.
5. Mit jeweils einem, für einen Punkt des Teilintervalls minimierenden ω, definiert man eine neue Steuerung $u' = Next(u)$.

Diskrete Optimalität (Stationarität) bedeutet nun $u' = u$, bzw., falls die Minimalpunkte nicht eindeutig sind, die Kakutani-Fixpunkt-Bedingung: $u \in Next(u)$. Hierzu sollte also "$Next$" abgeschlossen und konvex-wertig sein.
Allerdings kann ein Kakutani- oder Brouwer Fixpunkt (im Gegensatz zu Banach-Fixpunkten) i.A. nicht mittels sukzessiver Approximation bestimmt werden, der einfache Übergang von u zu u' führt deshalb i.A. nicht zum Ziel.
Stattdessen kann man die Minimalität über notwendige Optimalitätsbedingung als Gleichung $\Phi(x_u, \omega, t, \lambda_u) = 0$ formulieren. Sie enthält zumeist noch eine zusätzliche Variable (Lagrange Multiplikator bzgl. $\omega \in U$), und Φ ist i.A. nicht differenzierbar.
Dann gibt es die Teilssysteme zur Bestimmung von x und λ als Funktion von u, die Gleichung

$$\Phi(x, \omega, t, \lambda) = 0$$

und schließlich noch die Forderung $u = \omega$.

Insgesamt hat man also, bei Diskretisierung überall, ein System

$$F(u, x, \lambda, \omega) = 0$$

zu lösen, in dem F gewöhnlich nur stückweise glatt ist. Minimierung von $\|F\|^2$ per Abstiegsverfahren oder „nichtglattes" Newton-Verfahren sind hierfür Standard-Methoden.

Bei $N+1$ Diskretisierungspunkten erhält man $3N$ Komponenten für $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, wobei noch p Lagrange Multiplikatoren y zu p Ungleichungen hinzukommen, wenn diese U beschreiben.
Das System $\Phi(x, \omega, t, \lambda, y) = 0$ besteht dann aus $N(m+p)$ reellen Gleichungen, die dem Gradient bzgl. ω und den Ungleichungen entsprechen.

Die Gesamtzahl von reellen Gleichungen wird so $2Nn$ aus den beiden Differentialgleichungen, plus $N(m+p)$ aus Φ, plus die Nm Gleichungen zu $u = \omega$, also

$$2Nn + N(2m + p) = N(2n + 2m + p).$$

Die Zahl der reellen Variablen wird $N(2n + m)$ (zu x, λ, u) plus die $N(m + p)$ Variablen zu ω und y, also

$$N(2n + m) + N(m + p) = N(2n + 2m + p).$$

Für die analoge transformierte Variationsaufgabe (b fest, keine Endbedingung) mit Zielfunktion $\min \int_a^b h(x, u, t)dt$, und DGL $x' = u = f(x, u, t) \in \mathbb{R}^n$, wird $f_x = 0$ und $H(x, \lambda, u, t) = h(x, u, t) + \lambda^T u$.
Das adjungierte System $-\lambda' = h_x$ liefert explizit

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\int_a^t h_x ds + c, \\ \lambda(b) &= -\int_a^b h_x ds + c = 0. \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion minimal bzgl. ω in $u(t)$:

$$H(x(t), \lambda(t), \omega, t) = h(x, \omega, t) + \lambda(t)\omega, \quad \omega \in U, \text{ U sei offen.}$$

Dann muss wegen Min-Bedingung in jedem t gelten:

$$0 = \frac{dH}{d\omega} = h_u(x(t), u(t), t) + \lambda(t); \qquad h_u = h_{x'} \text{ in Variationsaufgabe}$$

Die Ableitung nach t von $h_u + \lambda(t)$ ist also Null, d.h. $\frac{dh_u}{dt} = h_x$.
Das ist die Eulersche Gleichung (mit $u = x'$).

Aus den $N(m+p)$ Optimierungsvariablen werden jetzt Nn Stück mit Nn Bedingungen $(h_u + \lambda = 0)$.

Angenommen, alle DGL werden diskretisiert und $f = Ax + Bu + \beta$. Dann ist $u \to x_u$ (affin) linear, $(u, x_u) \to \lambda_u$ ebenfalls und ω realisiert bei diskreten t das Minimum von $H = h(x_u, \omega, t) + \lambda^T(Ax_u + B\omega + \beta),\ \ \omega \in U$.

Ist H konvex in ω und U konvex und kompakt, existieren nichtleere konvexe Lösungsmengen $Next(u)$, und die Abbildung „$Next$“ genügt den Voraussetzungen des Kakutani-Fixpunkt-Satzes.

Je nach Gestalt von U kann man die Minimalpunkte ω bzw. die Gleichung $\Phi(x_u, \omega, t, \lambda_u) = 0$ (siehe oben) mehr oder weniger leicht finden und das dann stückweise lineare System $F(u, x, \lambda, \omega) = 0$ lösen.

Ergänzungen

4 Einige Grundlagen der Funktionalanalysis

4.1 Banach Räume

Ein Banach Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein linearer (hier ueber $\mathbb{R}$), normierter und vollständiger Raum. $\|x\|$ sei die Norm von $x \in X$.
Im Folgenden sei stets:

- $f : X \to \mathbb{R}$ ein lineares, stetiges Funktional
- X^* der Dualraum von X
- $A : X \to Y$ ein linearer stetiger Operator von X in einen Banach Raum Y. Der Raum $L(X,Y)$ wird mit $\|A\| := \sup\limits_{x \in B} \|Ax\|$ wieder ein Banach Raum. ($B := \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$ ist die abgeschlossene Einheitskugel)

4.1.1 Konvergenz-Begriffe

- (starke) Konvergenz: $x^k \to x$ wenn $\|x^k - x\| \to 0$
- schwache Konvergenz in X: $x^k \to_s x$ wenn $\|f(x^k) - f(x)\| \to 0 \ \ \forall f \in X^*$
- schwache Konvergenz in X^*: $f^k \to_s f$ wenn $\|F(f^k) - F(f)\| \to 0 \ \ \forall F \in X^{**}$ $(\supset X)$
- schwach* Konvergenz in X^*: $f^k \xrightarrow{*} f$ wenn $\|f^k(x) - f(x)\| \to 0 \ \ \forall x \in X$

Bemerkung: Schwach* Konvergenz verlangt i.a. weniger als schwache Konvergenz in X^* (dasselbe im reflexiven Raum wegen $X^{**} = X$).
Beachte: $f^k \to f \ \Leftrightarrow\ \|f^k - f\| \to 0 \Rightarrow\ f^k \to_s f \ \Rightarrow\ f^k \xrightarrow{*} f$.

Definition 4.1. *Eine Menge $M \subset X$ heißt* schwach (Folgen-) abgeschlossen, *wenn jeder schwache Häufungspunkt von M in M liegt:*

$$x^k \to_s x \text{ und } x^k \in M \quad \Rightarrow \quad x \in M.$$

M heißt schwach (Folgen-) kompakt, *wenn jede unendliche, abzählbare Folge in M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt mit Limes in M.*

$M^* \subset X^*$ heißt schwach* abgeschlossen, *wenn jeder schwach* Häufungspunkt von M^* in M^* liegt:*

$$f^k \xrightarrow{*} f \text{ und } f^k \in M^* \quad \Rightarrow \quad f \in M^*.$$

Bemerkung: *schwach* abgeschlossen $\Rightarrow$ schwach abgeschlossen (in X^*)*

Ein (nichtlineares) Funktional $F : X \to \mathbb{R}$ heißt schwach stetig, *wenn $x^k \to_s x \quad \Rightarrow F(x^k) \to F(x)$ (analog für Funktionen).*

Achtung: *Das verlangt mehr als stetig, denn $x^k \to_s x$ kann gelten, ohne dass $x^k \to x$!*
Trivial: Jedes $f \in X^*$ ist schwach stetig.

4.1.2 Typen von Banach Räumen

- *reflexiv:* $X^{**} = X$ (es gibt eine lineare Bijektion zwischen X und X^{**}, die die Norm erhält)
- *separabel:* X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge
- *Hilbert Raum:* Die Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ wird durch ein Skalarprodukt induziert.
- Norm in X^*: $\|f\|^* := \sup\limits_{x \in B} \|f(x)\|$, $B =$ Einheitskugel in X.

4.1.3 Adjungierter Operator

Sei $A \in L(X,Y)$. Mit $g \in Y^*$ wird durch $f(x) := g(Ax)$ ein lineares Funktional $f \in X^*$ definiert.

Offenbar ist $f = f(g,A)$. Die Abbildung ist linear in g, denn $f(\alpha g_1 + \beta g_2, A)$ ist nach Definition das Funktional u mit $u(x) = \alpha g_1(Ax) + \beta g_2(Ax)$.

Der Operator $g \to f$ bildet so von Y^* in X^* ab. Er heißt adjungierter Operator von A und wird mit A^* bezeichnet; es gilt $f = A^* g$. Man beachte, dass $A^* \in L(Y^*, X^*)$.

4.1.4 Trennungssatz

Satz 4.2. *Es sei X ein (linearer) normierter Raum über $\mathbb{R}$, $M \subset X$ sei offen, konvex, nichtleer und $0 \neq M$.*
Dann gilt: Es existiert $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ mit $0 \leq x^*(x)$ $\forall x \in M$.

Beweis. Wir wählen ein festes $x^0 \in M$ und betrachten den eindimensionalen Unterraum $U = \{tx^0 \mid t \in \mathbb{R}\}$.
Setzt man $u(tx^0) = t$, dann erfüllt u offenbar $0 \leq u(x)$ $\forall x \in M \cap U$.
Sei nun $G \supset U$ ein Unterraum von X (abgeschlossen oder nicht) und $g : G \to \mathbb{R}$ additiv und homogen mit

$$0 \leq g(x)\ \forall x \in M \cap G \quad \wedge \quad g_{|U} = u.$$

Unter diesen Paaren (g, G) definieren wir eine Halbordnung:

$$(g, G) < (g', G') \text{ falls } G \subsetneq G' \text{ und } g' = g \text{ für } x \in G.$$

Die Menge dieser (zulässigen) Paare ist nicht leer, z.B. nehme man $G = U$ und setze $g = u$.

Für eine beliebige Kette (g^α, G^α) mit $(g^\alpha, G^\alpha) < (g^\beta, G^\beta)$, falls $\alpha < \beta$, findet man dann eine obere Schranke (g', G') in $G' = \bigcup\limits_\alpha G^\alpha$ und $g'(x) = g^\alpha(x)$ falls $x \in G^\alpha$.
Damit gibt es (Zornsches Lemma) ein *maximales* Element bzgl. der Halbordung, wir bezeichnen es erneut mit (g, G). Maximal heißt, dass man kein (g', G') mit $(g, G) < (g', G')$ findet.

Wir zeigen indirekt, dass $G = X$ gelten muss.
Angenommen, es gibt ein $p \in X \setminus G$. Dann ist $G' := \text{lin}(G \cup \{p\}) \supset G$, und $x' \in G'$ hat eine eindeutige Darstellung $x' = x + tp$ ($x \in G$, $t \in \mathbb{R}$).

Eindeutig: Aus $x' = y + sp$ ($y \in G$, $s \in \mathbb{R}$) folgt $0 = y - x + (s-t)p$. Da 0 und $y - x$ aus G sind, liegt auch $(s-t)p$ in G. Letzteres liefert $s = t$ wegen $p \notin G$. Somit ist auch $y = x$.
Wir definieren nun $g'(x') := g(x) + at$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Damit (g', G') zulässig wird, brauchen wir ein spezielles a, so dass

$$0 \leq g(x) + at \text{ für alle } (x,t) \in (G, \mathbb{R}) \text{ mit } x + tp \in M. \tag{4.1}$$

Wir unterscheiden positive und negative t, d.h. wir betrachten (x,t) mit $t > 0$ und (y,s) mit $s < 0$.
Da M offen ist, existieren Paare beider Typen, denn $x^0 + rp$ ist aus M für betragskleine r.
Der Fall $t = 0$ liefert in (4.1) $0 \leq g(x)$ $\forall x \in M \cap G$ nach Wahl von (g, G), was a nicht einschränkt.
Also nimmt (4.1) die Form an:

$$0 \leq g(x) + at\ \forall (x,t) \in (G, \mathbb{R}),\ t > 0,\ \text{ sodass } x + tp \in M. \tag{4.2}$$

$$0 \leq g(y) + as\ \forall (y,s) \in (G, \mathbb{R}),\ s < 0,\ \text{ sodass } y + sp \in M. \tag{4.3}$$

Seien (x,t) und (y,s) wie oben beliebig fixiert. Wir betrachten $(z, 0)$ als Konvexkombination mit

$$0 = \lambda t + (1-\lambda)s, \quad z = \lambda x + (1-\lambda)y.$$

Dann ist $\lambda = -\frac{s}{t-s}$, $1-\lambda = \frac{t}{t-s}$ und $z = \frac{ty-sx}{t-s}$.
Der Punkt z gehört offenbar zu G. Als Konvexkombination zweier Punkte aus M, ist $z = z+0\cdot p \in M$. Folglich gilt:

$$0 \le g(z) = -\frac{s}{t-s}g(x) + \frac{t}{t-s}g(y) = \frac{-sg(x)+tg(y)}{t-s}$$

und $sg(x) \le tg(y)$ bzw. nach Division durch $-st > 0$:

$$-\frac{g(x)}{t} \le -\frac{g(y)}{s}.$$

Damit können wir a so wählen, dass

$$\sup_{(x,t)} -\frac{g(x)}{t} \le a \le \inf_{(y,s)} -\frac{g(y)}{s}.$$

Dies liefert $-g(x) \le at$ und $as \ge -g(y)$, wonach (4.2) und (4.3) richtig sind. Wir erhalten daher einen Widerspruch zur Maximalität von (g, G), sofern $G \ne X$ ist. Also ist tatsächlich $G = X$.

Nun ist g additiv und homogen und erfüllt $0 \le g(x)\ \forall x \in M$. Wegen $g = g^0$ $(= u)$ auf U ist g nicht Null.
Sei schließlich $y \in \text{int}M$ und $y + \varepsilon B \subset M$. Dann gilt:

$$0 \le g(y) + \varepsilon g(b)\ \forall b \in B,$$

also ist g auf B durch $g(b) \ge -\varepsilon^{-1}g(y) =: C$ nach unten beschränkt. Als additives, homogenes Funktional ist g damit auch nach oben durch $|C|$ beschränkt. Folglich ist g stetig, und $x^* = g$ liefert die Behauptung. □

4.1.5 Weitere grundlegende Sätze

- *Riesz:* Einheitskugel B ist kompakt $\Leftrightarrow$ $\dim X < \infty$
- *Banach:* $A : X \to Y$ bijektiv $\Rightarrow A^{-1}$ ist stetig
- *Banach-Steinhaus:* $A_k \in L(X,Y)$ und $\sup_k \|A_k x\| < \infty\ \forall x \ \Rightarrow\ \sup_k \|A_k\| < \infty$
- *Trennungssatz:* $M, N \subset X$ konvex, nichtleer, $\text{int}M \ne \emptyset$, $N \cap \text{int}M = \emptyset$
  $\Rightarrow\ \exists f \in X^*,\ f \ne 0 :\ f(m) \le f(n)\ \forall m \in M,\ n \in N$
- *Closed range Theorem:* $\text{Im}(A) := AX$ abgeschlossen in Y $\Leftrightarrow$ $\text{Im}(A^*) := A^*Y^*$ abgeschlossen in X^*
- $f^k \xrightarrow{*} f\ \wedge\ x_k \to x\ \Rightarrow\ \langle f^k, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$ $\quad$ ($\langle f, x\rangle = f(x)$ kanonische Bilinearform)
- $f^k \xrightarrow{*} f\ \Leftrightarrow\ \sup \|f^k\| < \infty\ \wedge\ \langle f^k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ für alle x in einer dichten Teilmenge von X
- $f^k \to f\ \wedge\ x_k \to_s x\ \Rightarrow\ \langle f^k, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$
- Konvexe, abgeschlossene Mengen sind schwach abgeschlossen.
- Konvexe stetige Funktionale sind schwach stetig und subdifferenzierbar.
- X separabel $\Rightarrow$ Jede beschränkte Folge $(f^k)_k \subset X^*$ besitzt eine schwach*-konvergente Teilfolge.
- X reflexiv $\Rightarrow$ B ist schwach kompakt $\Rightarrow$ jedes schwach stetige Funktional nimmt auf B das Minimum an (dasselbe für beschränkte, abgeschlossene konvexe Teilmengen M von X)

4.1.6 Der Banach Raum der stetigen Funktionen

Definition 4.3. *Der* ***Banach Raum*** $C[a,b]$ *besteht aus allen stetigen reellen Funktionen* $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$ *mit der Norm* $\|x\| = \sup_{a\leq t\leq b} |x(t)|$.

Satz 4.4 (Satz von Arzela-Ascoli (1883, 1893))**.** *Sei* $X \subset C[a,b]$ *abgeschlossen.*
X *ist kompakt genau dann wenn:*

$$\textit{alle } x \in X \textit{ sind gleichmäßig beschränkt, d.h. } \exists K : |x(t)| \leq K \ \forall x \in X \ \forall t \in [a,b] \tag{4.4}$$

und

$$\textit{alle } x \in X \textit{ sind gleichgradig gleichmäßig stetig,} \tag{4.5}$$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ |x(t) - (t')| \leq \varepsilon \ \forall x \in X \ \forall t, t' \in [a,b]$ *mit* $|t - t'| \leq \delta$.

Beweis.($\underline{\Longleftarrow}$:) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig fixiert. Wir wählen δ nach (4.5) und teilen $[a,b]$ in endlich viele, etwa m, Intervalle $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ der Länge $< \delta$. Sei L die Menge aller stückweise linearen (stetigen) Funktionen y zur Intervallzerlegung, die $|y(t)| \leq K \ \forall t \in [a,b]$ erfüllen. Sie lassen sich durch $2m$ reelle Zahlen des Intervalls $[-K, K]$ charakterisieren (die Werte von y in den Randpunkten von I_k).
Also ist L kompakt in C, denn jede unendliche Folge solcher Zahlentupel hat eine unendliche konvergente Teilfolge, und die entsprechenden Funktionen y konvergieren dann in C.
Sei nun $x \in X$. Wir ordnen x diejenige Funktion y zu, die in allen t_k gerade $y(t_k) = x(t_k)$ leistet. Dann folgt:

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon \ \forall t \ \Rightarrow \ \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Damit ist L ein kompaktes ε-Netz für X. Aus der Vollständigkeit von C folgt so die Kompaktheit von X.

($\underline{\Longrightarrow}$:) Sei M ein endliches ε-Netz für X, bestehend aus irgendwelchen Funktionen $y^1, \ldots, y^m \in C$.

Mit $K = \max_k \|y^k\| + \varepsilon$ folgt dann (4.4). Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass (4.5) für alle endlich vielen Funktionen $x = y^k$ gilt, denn jede einzelne ist gleichmäßig stetig über dem kompakten Intervall.
Sei nun $x \in X$ beliebig gewählt. Wir finden $y = y^k$, sodass $\|x - y\| \leq \varepsilon$.
Dann gilt für $|t - t'| < \delta$:

$$|x(t) - x(t')| \leq |x(t) - y(t)| + |y(t) - y(t')| + |y(t') - x(t')| \leq 3\varepsilon.$$

Also ist (4.5) mit $\varepsilon' = 3\varepsilon$ und δ erfüllt.

□

Satz 4.5 (Vollständigkeit der stetigen Funktionen)**.** *Der Raum der stetigen Funktionen* $C[a,b]$ *ist vollständig.*

Beweis. Betrachte Cauchy-Folgen x^k in C. Gelte $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$:

$$\|x^m - x^n\| \leq \varepsilon \ \ \forall n, m > N(\varepsilon). \tag{4.6}$$

Dann gilt mit allen t:

$$|x^m(t) - x^n(t)| \leq \varepsilon.$$

Also existiert (da $\mathbb{R}$ vollständig ist) für jedes t: $x(t) = \lim_{m\to\infty} x^m(t)$ im Reellen. Mit $m \to \infty$ in (4.6) folgt dann:

$$|x(t) - x^n(t)| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x - x^n\| \leq \varepsilon \ \forall n > N(\varepsilon).$$

Wir müssen noch zeigen, dass $x = x(t)$ stetig ist. Dazu hält man irgendein $n > N(\varepsilon)$ fest, und schätzt wie folgt ab:

$$|x(t) - x(t')| \leq |x(t) - x^n(t)| + |x^n(t) - x^n(t')| + |x^n(t') - x(t')| \leq \varepsilon + |x^n(t) - x^n(t')| + \varepsilon.$$

Da x^n stetig ist (also über dem Kompaktum $[a,b]$ auch gleichmäßig stetig), gilt auch $|x^n(t) - x^n(t')| < \varepsilon$ falls nur $|t' - t|$ hinreichend klein ist, etwa $< \delta$.
Folglich ist dann auch $|x(t) - x(t')| < 3\varepsilon$ wenn $|t' - t| < \delta$. □

4.1.7 Projektionen im Hilbert Raum

Satz 4.6 (Projektionssatz). *Sei X reeller Hilbert Raum, $C \subset X$, konvex, abgeschlossen, nichtleer, $x \in X \setminus C$. Dann gilt:*
Es gibt ein $z \in C$ mit $\|x - z\| = dist(x, C)$ $(= d)$.

Bemerkung: Der Beweis im komplexen Hilbert Raum mit C = Teilraum von X ist derselbe.

Beweis. Man nutzt die Parallellogrammgleichung $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$, die durch direktes Ausrechnen folgt. Sei $\{z_n\}$ eine Folge in C mit $\|x - z_n\|^2 < d^2 + n^{-2}$.
Man zeigt Konvergenz der z_n durch Abschätzen von $\|z_m - z_n\|^2$.
Dazu wird (4.6) auf $a = x - z_n$ und $b = x - z_m$ angewandt.

$$\|z_m - z_n\|^2 + \|2x - (z_m + z_n)\|^2 = 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2).$$

Mit $\frac{(z_m+z_n)}{2} \in C$ folgt $\|2x - (z_m + z_n)\|^2 = 4\|x - \frac{z_m+z_n}{2}\|^2 \geq 4d^2$ und somit

$$\begin{aligned} \|z_m - z_n\|^2 &\leq 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_m\|^2) - 4d^2 \leq 2(d^2 + n^{-2} + d^2 + m^{-2}) - 4d^2 \\ &\leq 2(n^{-2} + m^{-2}). \end{aligned}$$

Die Folge z_n ist damit eine Cauchy-Folge, $z = \lim z_n$ ist der gesuchte Punkt. □

Bemerkung: Ein solches z heißt *Projektion* von x auf C. Es ist *eindeutig*, was man über die Norm wie im $\mathbb{R}^n$ sofort ausrechnet (bei $z' \neq z''$ wird der Abstand zu $\frac{1}{2}(z' + z'') \in C$ kürzer). Man kann auch so argumentieren: Gibt es zwei Punkte $z' \neq z''$ mit kleinstem Abstand zu x, kann man obige z_n so auswählen, dass $z_n \to z'$ für gerade n und $z_n \to z''$ für ungerade n. Damit hat man einen Widerspruch zur bewiesenen Konvergenz der ganzen Folge.

Satz 4.7 (Normalen-Eigenschaft). *Es ist $\|y - p(y)\| \leq \|y - x\| + \|x - p(x)\|$. Sei $z = p(x)$ die Projektion von x auf C.*
Dann gilt mit $0 < t < 1$ und $c \in C$ für den Punkt $a = c - p(x)$:

$$p(x) + ta \in C \ \wedge \ h(t) := \|x - (p(x) + ta)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + t^2\|a\|^2 - 2t\,\langle x - p(x), a\rangle\,.$$

Wäre $\langle x - p(x), a\rangle > 0$, würde $h(t) < \|x - p(x)\|^2$ für kleine t folgen, was der Projektionseigenschaft widerspricht. Also gilt:

$$\langle x - p(x), c - p(x)\rangle \leq 0 \ \forall c \in C, \text{ d.h. } x - p(x) \in N_C(p(x)) \tag{4.7}$$

(Hierbei bezeichnet $N_C(p(x))$ den Normalenkegel an C in $p(x)$.)

Andererseits charakterisiert (4.7) die Projektion $p(x)$ vollständig, d.h. (4.7) und $p(x) \in C$ liefert gerade, dass $p(x)$ die Projektion von x auf C ist.

Sei U ein (abgeschlossener) Teilraum von X. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eindeutige $u \in U$ und $v \in V$ mit

$$x = u + v, \tag{4.8}$$

wenn nur V der durch $\{v \mid \langle v, u\rangle = 0 \ \forall u \in U\} = N_U(0)$ definierte Orthogonalraum zu U ist.

Beweis. Man setze $u = p_U(x)$ (Projektion auf U), $v = x - u$. Damit gilt (4.8) sowie $u \in U$ und $v \in V$.
Eindeutigkeit: Wenn auch $x = u' + v'$, so folgt $u - u' = v' - v$, $u - u' \in U$ und $v' - v \in V$. Weil nun $u - u' \in V \cap U$, muss gelten $\langle u - u', u - u'\rangle = 0$, d.h. $u = u'$. □

Satz 4.8 (Lipschitzeigenschaft der Projektion). *$p(\cdot)$ ist nicht nichtexpansiv, d.h.,*

$$\|p(y) - p(x)\| \leq \|y - x\|.$$

Beweis. Dazu verwendet man (4.7), denn man erhält:

$$\begin{aligned} & \langle x - p(x), p(y) - p(x) \rangle \le 0 \quad \text{mit } c = p(y) \\ & \langle y - p(y), p(x) - p(y) \rangle \le 0 \quad \text{mit } c = p(x) \\ \Rightarrow \quad & \langle x - p(x) - (y - p(y)), p(y) - p(x) \rangle \le 0. \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} \langle x - y, p(y) - p(x) \rangle + \|p(y) - p(x)\|^2 &\le 0 \\ \Rightarrow \quad \|p(y) - p(x)\|^2 &\le \langle x - y, p(x) - p(y) \rangle \le \|x - y\| \cdot \|p(y) - p(x)\| \end{aligned}$$

Nach Division durch $\|p(y) - p(x)\|$ (> 0) ist das die Behauptung. □

Satz 4.9 (Schwarzsche (Bonjakowskische) Ungleichung)**.** *Es gilt die Ungleichung*

$$|\langle a, b \rangle|^2 \le \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \,,$$

die letzlich (auf den Axiomen des Skalarproduktes basierend) die Beziehung zwischen Skalarprodukt und Norm im Hilbert-Raum herstellt, heißt Schwarzsche Ungleichung, oft auch Ungleichung von Schwarz und Bonjakowski.

Beweis. Wir schreiben den Beweis gleich für einen komplexen Hilbert Raum auf. Man betrachtet, für $b \neq 0$ und komplexe t zunächst

$$0 \le \langle a + tb, a + tb \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, tb \rangle + \langle tb, a \rangle + |t|^2 \langle b, b \rangle = \langle a, a \rangle + \mathrm{conj}(t) \langle a, b \rangle + t \langle b, a \rangle + |t|^2 \langle b, b \rangle$$

und setze $t = -\frac{\langle a,b \rangle}{\langle b,b \rangle}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle a, a \rangle - \frac{\langle b, a \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot \langle a, b \rangle - \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot \langle b, a \rangle + \frac{|\langle a, b \rangle|^2}{\langle b, b \rangle} \\ 0 &\le \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle b, a \rangle \langle a, b \rangle - \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle + |\langle a, b \rangle|^2. \end{aligned}$$

Wegen $c \cdot \mathrm{conj}(c) = |c|^2$ erhält man so $\langle a, b \rangle \langle b, a \rangle = |\langle a, b \rangle|^2$ und $0 \le \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - |\langle a, b \rangle|^2$. □

Übungsaufgaben

1. Wie sieht A^* für $\dim X + \dim Y < \infty$ aus ?
2. Beispiele für schwache Konvergenz: $x^k \to_s x$ ohne $x^k \to x$.
3. Zeige: B ist kompakt $\Leftrightarrow$ $\dim X < \infty$. (Satz von Riesz)

4.1.8 Riesz-Schauder Theorie linearer vollstetiger Operatoren

Zusammenfassung aus E. Zeidler, Vorlesung über nichtlinearer Analysis, Teil I Teubner Leipzig 1976

Voraussetzungen: $L : X \to X$ linear, vollstetig (vollstetig = Bilder beschränkte abgeschlossene Mengen sind kompakt), X Banach Raum

(1) $\quad Tx := (I - \mu L)x = y$

$(1)^*$ $\quad T^* y^* := (I - \mu L)^* y^* = x^*$

$L^* : X^* \to X^*$ dualer (adjungierter) Operator

Behauptungen:

(A) L^* ist vollstetig.

(B) Die charakteristischen Zahlen μ von L können sich im Endlichen nicht häufen.

(C) Ist μ keine charakteristische Zahl von L, so existieren die Inversen von T und T^*.

(D) Sei μ eine charakteristische Zahl von L. Dann gilt:

(1) lösbar $\Leftrightarrow$ $\langle x^*, y\rangle = 0 \; \forall x \in N(T^*)$ $\quad$ (N = Nullraum, Kern)

$(1)^*$ lösbar $\Leftrightarrow$ $\langle y^*, x\rangle = 0 \; \forall x \in N(T)$

$\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty$

Die Ketten
$$N(T) \subset N(T^2) \subset \ldots \subset N(T^k) = N(T^{k+1})$$
$$R(T) \supset R(T^2) \supset \ldots \supset R(T^k) = R(T^{k+1}) \quad (R = \text{Range, Image})$$

brechen nach k Schritten ab.

Es existiert ein Projektionsoperator P mit $P \in L(X,X)$, $P^2 = P$, $PL = LP$.
Mit $Q = I - P$ gilt: $X = PX + QX$, $PX = N(T^k)$, $QX = R(T^k)$
L bildet PX und QX jeweils in sich ab.
$LP = PL$ und L/PX besitzen μ als einzige charakteristische Zahl.
$QL = LQ$ und L/QX besitzen μ nicht als charakteristische Zahl, d.h. $(I - \mu QL)^{-1} \in L(X,X)$
$\dim PX < \infty$
In PX gibt es eine Basis $x(i,j)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m(i)$ (Jordans Normalform) sodass $\mu Lx(i,j) - x(i,j) = \mu x(i,j+1)$, wobei per Definition $x(i, m(i)+1) := 0$
$v(\mu) = n$, $\chi(\mu) = m(1) + \ldots + m(n)$ wobei $v(\mu) = \dim N(T)$ Vielfachheit von μ, $\chi(\mu) = \dim \bigcup_k N(T^k)$ algebraische Vielfachheit von μ ($\chi(\mu) \geq v(\mu)$ gilt generell).

4.2 Minimax, Subdifferential und gestörte Extremalaufgaben

Wir betrachten die Aufgabe

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \in K\} \tag{P}$$

wobei K ein konvexer, abgeschlossener Kegel in Y ist, sowie $x \in X$, $y \in Y$ mit X, Y Banach Räume. Wir definieren:

$$\begin{aligned}
M(y) &= \{x \mid g(x) \in y + K\}, \\
\varphi(y) &= \inf\{f(x) \mid x \in M(y)\} \text{ Störungsfunktion; wobei } \varphi(y) = \infty, \text{ falls } M(y) = \emptyset, \\
v_P &= \varphi(0) \text{ sei endlich}, \\
L(x, y^*) &= f(x) + (y^*, g(x)) \text{ Lagrange-Funktion}, \\
K^* &= \{y^* \in Y^* \mid (y^*, k) \leq 0 \; \forall k \in K\} \text{ Polarkegel zu } K, \\
H(y^*) &= \inf_{x \in X} L(x, y^*).
\end{aligned}$$

Ist g linear, so wird durch $y^* \to x^* := (y^*, g(\cdot))$ gerade der adjungierte Operator $g^* : Y^* \to X^*$ definiert.
Weiter betrachten wir die Dualaufgabe

$$\sup\{H(y^*) \mid y^* \in K^*\} \tag{D}$$

mit dem endlichen oder unendlichen Extremalwert v_D.

Lemma 4.10. *Es gilt:* $v_P = \inf_x \sup_{y^* \in K^*} L(x, y*) \geq v_D$.

Beweis. Man kann zulässige $x \in M(y)$ für (P) betrachten, da v_P endlich ist.
Wenn $g(x) \in K$, so folgt $(y^*, g(x)) \leq 0$ aus $y^* \in K^*$; somit auch $(y = 0)$:

$$H(y^*) = \inf_{x \in X} f(x) + (y^*, g(x)) \leq \inf_{x \in M(y)} f(x) + (y^*, g(x)) \leq \inf_{x \in M(y)} f(x) = v_P.$$

Also ist auch $v_D \leq v_P$ richtig. $\square$

Satz 4.11 (Starke Dualität und Störungsfunktion im Banach Raum)**.** *Sei v_P endlich. Die Störungsfunktion φ besitzt in $y = 0$ einen Subgradienten $u^* \in Y^*$ genau dann, wenn es ein $y^* \in K^*$ derart gibt, dass $H(y^*) = v_P$ ist. In diesem Fall gilt $y^* = -u^*$ und $v_P = v_D$.*

Bemerkung: Für den Beweis braucht man nicht einmal Stetigkeit von f oder g.

Beweis. $\underline{\Longrightarrow}$: Sei $u^* \in \partial\varphi(0)$, d.h. per Definition, dass u^* ein Subgradient von φ im Nullpunkt ist und bedeutet:

$$\begin{aligned} \varphi(y) &\geq \varphi(0) + (u^*, y - 0) \ \forall y, \\ \inf_y \varphi(y) - (u^*, y) &\geq \varphi(0). \end{aligned}$$

Monotonie: Für beliebige y und jedes $k \in K$ folgt aus $g(x) - y \in K$ auch $k + (g(x) - y) \in K$. Damit gilt

$$M(y) \subset M(y - k) \ \wedge \ \varphi(y - k) \leq \varphi(y).$$

Speziell ist $\varphi(-k) \leq \varphi(0)$. Wegen dieser Beschränktheit und der Subdifferentialeigenschaft

$$\varphi(0) \geq \varphi(-k) \geq \varphi(0) + (u^*, -k)$$

muss daher $(u^*, -k) \leq 0$ sein, sonst multipliziere man k mit großem $\lambda > 0$. Also ist $y^* := -u^* \in K^*$.
Wegen $u^* \in \partial\varphi(0)$ gilt weiter:

$$\varphi(0) \leq \inf_y (\varphi(y) + (y^*, y)) = \inf_y \left(\underbrace{\inf_{x:\ g(x) \in y + K} f(x) + (y^*, y)}_{=:\alpha} \right).$$

Da $0 \in K$, wird α höchstens größer, wenn man $g(x) = y$ fordert. Also

$$\varphi(0) \leq \inf_y \left(\inf_{x:\ g(x) = y} f(x) + (y^*, g(x)) \right)$$

und damit (da von y nichts verlangt wird):

$$v_P = \varphi(0) \leq \inf_x f(x) + (y^*, g(x)) = H(y^*), \ y^* \in K^* \qquad (sd1)$$

Da $v_D \leq v_P$ durch das Lemma 4.10 gesichert wird, folgt so $H(y^*) = v_D = v_P$.

$\underline{\Longleftarrow}$: Sei $H(y^*) = \varphi(0) = v_P$ und $y^* \in K^*$. Dann ist

$$\inf_x f(x) + (y^*, g(x)) = H(y^*) \geq \varphi(0).$$

Wegen $y^* \in K^*$ folgt aus $g(x) - y \in K$ die Ungleichung $(y^*, g(x)) \leq (y^*, y)$.
Wir können daher (ohne die Ungleichung zu verletzen) links den Term $(y^*, g(x))$ durch (y^*, y) ersetzen, sofern $g(x) \in y + K$ ist. Da $0 \in K$ ist, gibt es derartige y, z. B. $y = g(x)$.
Dies liefert

$$\varphi(0) \leq \inf_x \inf_{g(x) \in y + K} f(x) + (y^*, y).$$

Wir lesen nun die rechte Seite einfach zweckmäßiger:

$$\varphi(0) \leq \inf_y \left(\inf_{x,\ g(x) \in y + K} f(x) \right) + (y^*, y) = \inf_y (\varphi(y) + (y^*, y)).$$

Also ist $u^* = -y^*$ Subgradient für φ in 0.

$\square$

4.2.1 Subdifferenzierbarkeit

Damit wird die Subdifferenzierbarkeit von φ interessant. Um sie nachzuweisen, braucht man im allgemeinen:

- Endlichkeit des Extremalwertes v_P zu (P),
- Konvexität von f und Konvexität von g bzgl. K (d.h. die Menge $\{(x,y) \mid g(x) \in y + K\}$ sei - wie im Fall affin-linearer g - eine konvexe Menge)
- Stetigkeit von f und g.

Außerdem

$$\text{existiere ein } x^s \text{ mit } g(x^s) \in \text{int}K \text{ (also muss } K \text{ innere Punkte besitzen).} \qquad (reg1)$$

Der Beweis ist nun analog zur Subdifferenzierbarkeit in endlicher Dimension (dort heißt x^s Slater Punkt), nur der benutzte Trennungssatz muss hier allgemeiner sein; s.o.

Beweis der Subdifferenzierbarkeit von φ unter diesen Voraussetzungen. Man bildet die Menge aller Paare $M = \{(r,y) \mid \exists x: \ f(x) \leq r, \ g(x) \in y + K\}$, die ebenfalls konvex wird (das ist der *Epigraph* von φ; epi$\varphi = \{(r,y) \mid r \geq \varphi(y)\}$, wenn man formal $\varphi(y) = \infty$ setzt, sofern es kein x mit $g(x) \in y + K$ gibt).
Der Punkt $m^0 = (v_P, 0)$ gehört zu M, aber nicht zu int$M$ wegen $(v_P - \varepsilon, 0) \notin M$.
Mittels x^s und der Stetigkeit sieht man, dass der Punkt $(f(x^s)+1, 0)$ aus int$M$ ist.
Man kann deshalb m^0 und int$M$ (Trennungssatz) nichttrivial trennen.
Das Trennungsfunktional ist ein Element $(r^*, v^*) \in (\mathbb{R}, Y^*)$ und sichert

$$r^* v_P + (v^*, 0) \leq r^* r + (v^*, y) \ \forall (r,y) \in M.$$

Achtung: links Bilinearformen, rechts Punktepaar (r,y)!

Die Existenz von x^s sichert dann $r^* \neq 0$ (weil die y in einer Kugel variieren dürfen und $r^* = 0$ nun $v^* \neq 0$ impliziert). Weiter folgt $r^* > 0$ aus $(v_P + p, 0) \in M \ \forall p > 0$. Damit kann man durch r^* teilen und erhält mit $w^* = \frac{v^*}{r^*}$:

$$v_P \leq r + (w^*, y) \ \forall (r,y) \in M,$$

also auch $\varphi(0) \leq \varphi(y) + (w^*, y) \ \forall y$.
Damit ist $-w^* \in \partial\varphi(0)$. □

Bemerkung: Bis hierher haben wir nicht die Vollständigkeit der Räume X, Y benötigt.

4.2.2 Zusätzliche lineare Gleichung

Bei einer zusätzlichen linearen Gleichung $h(x) = 0 \in Z$ (hat nichts mit der obigen dualen Zielfunktion zu tun), also für

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \in K, \ h(x) = 0\} \qquad (P)$$

wird die Lagrange Funktion um den Term $+(z^*, h(x))$ erweitert und $\varphi(y)$ wird durch Variation der Gleichung $h(x) = z$ zu $\varphi(y,z)$. Die Beweise bleiben ansonsten gleich, wenn

$$x^s \in \text{Ker}(h), \ g(x^s) \in \text{int}K \text{ und } h(X) = Z. \qquad (Reg)$$

Jetzt sind die Räume X, Z als vollständig vorauszusetzen, um Banachs Inversensatz auf h anwenden zu können (mit Faktorisierung nach Ker(h) in X).

4.2.3 Spezialfall linearer Funktionen und Hahn-Banach Satz

Seien f, h und g linear. Jetzt ist $\varphi(y,z) = \inf\{f(x) \mid h(x) = z,\ g(x) \in y + K\}$ sublinear (konvex und positiv homogen bzw. (äquivalent) subadditiv und posititiv homogen), und wenn $\varphi(0,0)$ endlich ist, bleibt nur $\varphi(0,0) = v_P = 0$ (denn x zulässig für $(0,0)$ liefert λx zulässig $\forall \lambda > 0$). Damit kann φ bei Stetigkeit durch eine lineare Funktion gestützt werden: $\exists y^* \in Y^*,\ z^* \in Z^*$ mit (Hahn-Banach Satz):

$$\varphi(y,z) \geq y^*(y) + z^*(z)\ \forall y, z.$$

(Ohne Stetigkeit von φ nur mit additiven und homogenen Funktionalen).
Die Ungleichung bedeutet aber $(y^*, z^*) \in \partial\varphi(0,0)$ und führt wie oben zur starken Dualität.

4.2.4 Stetigkeit des Extremalwertes

Satz 4.12. *Die Stetigkeit von φ folgt aus (Reg), affin-lineare und stetige Funktionen reichen dazu.*

Beweis. Sei x zulässig für (y,z), $h(x) = z$, $g(x) = y + k$, $k \in K$, und sei (y', z') gegeben. Dann finden wir zunächst ein x' mit $h(x') = z'$ und (Banachs Inversensatz)

$$\|x' - x\| \leq L\|z' - z\|.$$

Weiter sei $g(x^s) + \delta B \subset K$, $\delta > 0$.
Für $x' + \lambda x^s$ bleibt h konstant und $g(x' + \lambda x^s) = g(x') + \lambda g(x^s)$.
Wir können weiter schreiben $g(x') = g(x) + v$ mit $\|v\| \leq L_g L\|z' - z\|$. Also:

$$\begin{aligned} g(x' + \lambda x^s) &= g(x) + v + \lambda g(x^s) \\ &= y + k + v + \lambda g(x^s) \\ &= y' + (y - y') + k + v + \lambda g(x^s). \end{aligned}$$

Damit ist $g(x' + \lambda x^s) \in y' + K \quad \Leftrightarrow \quad (y - y') + k + v + \lambda g(x^s) \in K$. Hierzu reicht schon $(y - y') + v + \lambda g(x^s) \in K$, was wegen der Kegel-Eigenschaft bei $\|(y - y') + v\| \leq \delta\lambda$ gesichert ist. Letzteres gilt sicher bei $\|y - y'\| + L_g L\|z' - z\| \leq \delta\lambda$ bzw. bei $\lambda = \delta^{-1}(\|y - y'\| + L_g L\|z' - z\|)$.
Also ist $x'' = x' + \delta^{-1}(\|y - y'\| + L_g L\|z' - z\|)\, x^s$ zulässig für (y', z').
Mit $\|x' - x\| \leq L\|z' - z\|$ gilt daher eine Lipschitz-Abschätzung für einen zulässigen Punkt x'' zu (y', z'):

$$\|x'' - x\| \leq K\|(y' - y, z' - z)\|.$$

Damit können sich auch die Infima mit der linearen (es reicht Lipschitz-stetigen) Funktion f nur Lipschitz stetig unterscheiden:

$$|\varphi(y', z') - \varphi(y, z)| \leq L(f)K\|(y' - y, z' - z)\|.$$

□

4.2.5 Folgerung aus starker Dualität für stetig differenzierbare Funktionen

Satz 4.13. *Ist x^0 eine Lösung von*

$$\inf\,(f(x) \mid g(x) \in y + K, h(x) = z) \qquad (P)$$

und gilt starke Dualität, so gibt es duale Funktionale y^* und z^* mit $y^* \in K^*$ so dass

$$Df(x^0)u + (y^*, Dg(x^0)u) + (z^*, Dh(x^0)u) = 0 \quad \forall u \in X \qquad (4.9)$$

$$\textit{und} \quad (y^*, g(x^0)) = 0.$$

Beweis. Mit gewissen $(y^0)^* \in K^*$ und $(z^0)^* \in Z^*$ ist aufgrund des Dualitätssatzes

$$\begin{aligned}\inf_x L(x,(y^0)^*,(z^0)^*) &:= \inf_x f(x) + ((y^0)^*, g(x)) + ((z^0)^*, h(x)) \\ &= f(x^0) = \sup_{y^*\in K^*,\ z^*\in Z^*} \inf_x L(x,y^*,z^*).\end{aligned}$$

Weil $h(x^0) = 0$ und $g(x^0) \in K$, also insbesondere $((y^0)^*, g(x^0)) \le 0$ ist, gilt auch

$$\inf_x L(x,(y^0)^*,(z^0)^*) \le L(x^0,(y^0)^*,(z^0)^*) \le f(x^0).$$

Da hier die Gleicheit erfüllt ist, muss $x = x^0$ die Lagrange-Funktion minimieren und $((y^0)^*, g(x^0)) = 0$ sein.
Ersteres liefert wegen $D_x L(x^0,(y^0)^*,(z^0)^*) = 0$ gerade (4.9).
Gleichung (4.9) schreibt man oft in adjungierter Form als

$$Df(x^0)+Dg(x^0)^*y^*+Dh(x^0)^*z^* = 0 \text{ bzw. } -Df(x^0) \in Dg(x^0)^*K^*+Dh(x^0)^*Z^*. \qquad (4.9')$$

□

4.2.6 Nichtkonvexe Probleme

Starke Dualität bzw. Subdifferenzierbarkeit gilt hier i.a. nicht. Man muss deshalb anders vorgehen.
Wir betrachten die Aufgabe

$$\inf\{f(x) \mid g(x) \in K, h(x) = 0\} \qquad (P)$$

mit K konvexer, abgeschlossener Kegel in Y, $\mathrm{int}K \ne \emptyset$, $x \in X$, $y \in Y$, X, Y, Z Banach Räume, $h(x) \in Z$.
Alle Funktionen seien C^1, x^0 sei eine (lokale) Lösung von (P).
Idee: Linearisierung aller Funktionen in x^0 liefert ein konvexes Problem

$$\inf\left\{f(x^0) + Df(x^0)(x-x^0) \mid g(x^0) + Dg(x^0)(x-x^0) \in K,\ h(x^0) + Dh(x^0)(x-x^0) = 0\right\} \quad (P_L)$$

Angenommen,

$$x = x^0 \text{ loest } (P_L)\ . \qquad (4.10)$$

Dann liefern die obigen Voraussetzungen (sofern sie für (P_L) erfüllt sind) die starke Dualität und damit auch die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren $y^* \in K^*$ und $z^* \in Z^*$, sodass

$$Df(x^0)u + (y^*, Dg(x^0)u) + (z^0, Dh(x^0)u) = 0 \ \ \forall\, u \in X \ \wedge\ (y^*, g(x^0)) = 0. \qquad (4.11)$$

Um (4.10) nachzuweisen, sind allerdings Zusatzvoraussetzungen nötig.
Z.B. Sei die folgende Standard-Voraussetzung (sie entspricht MFCQ im endlich dimensionalen Fall) erfüllt:

$$Dh(x^0)X = Z \text{ und } \exists u^s \text{ mit } Dh(x^0)u^s = 0 \text{ und } g(x^0) + Dg(x^0)u^s \in \mathrm{int}K. \quad (Reg, MFCQ)$$

Hiermit sind zugleich die Voraussetzungen für Subdifferenzierbarkeit für φ zu (P_L) erfüllt, also auch für starke Dualität von (P_L).

Die grundlegende Überlegung ist die folgende:
Angenommen, x^0 löst (P) , aber nicht (P_L). Dann gibt es offenbar ein u mit

$$Df(x^0)u < 0 \ \wedge\ g(x^0) + Dg(x^0)u \in K,\ Dh(x^0)u = 0.$$

Setzt man $v^\varepsilon = u + \varepsilon u^s$ $(\varepsilon > 0)$, so folgt

$$h(x^0) + Dh(x^0)v^\varepsilon = 0 \ \wedge\ g(x^0) + Dg(x^0)v^\varepsilon \in \mathrm{int}K, \qquad (4.12)$$

und bei kleinem ε auch $Df(x^0)v^\varepsilon < 0$.
Man zeigt nun, dass es (für kleine $t > 0$) Punkte der Form $x(t) = x^0 + tv^\varepsilon + o(t)$ mit $h(x(t)) = 0$ und $g(x(t)) \in K$ gibt.
Sie erfüllen wegen $Df(x^0)v^\varepsilon < 0$ auch $f(x(t)) < f(x^0)$, im Widerpruch zur (lokalen) Optimalität von x^0.

Kernpunkt ist der Nachweis, dass $x(t)$ mit obigen Eigenschaften (Zulässigkeit für (P)) existiert. Hierbei ist die Gleichung entscheidend.
Aus (4.12) folgt nämlich $g(x^0) + tDg(x^0)v^\varepsilon \in \text{int}K$ ($t > 0$ klein), wonach auch alle Punkte der Form $x(t) = x^0 + tv^\varepsilon + o(t)$ die Forderung $g(x(t)) \in K$ erfüllen.
Es bleibt also nur das Problem, Punkte der Form $x(t) = x^0 + tv^\varepsilon + o(t)$ als Lösung der Gleichung zu finden.

Prinzip: Man konstruiert ein entsprechendes $x(t)$ per (modifizierte) sukzessive Approximation mit Start in $x^0 + tv^\varepsilon$. Die nötige (klein o-) Abschätzung für $\|x(t) - x^0 - tv^\varepsilon\|$ folgt dann bei Regularität, wie wir gleich sehen werden, aus $\|h(x^0 + tv^\varepsilon)\| = o(t)$.

4.3 Lipschitz-stabile Lösungen über modifizierte sukzessive Approximation

Im Folgenden darf man sich F als stetige Funktion vorstellen, aus Inklusionen werden dann Gleichungen.

Allgemein kann $F : X \to Y$ eine Multifunktion sein, das ist einfach eine Abbildung mit $F(x) \subset Y$ (leer oder nicht). Die Menge gph$F$ besteht aus den Paaren (x, y) mit $y \in F(x)$, und man definiert wie bei Funktionen $x \in F^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; y \in F(x)$.
F sei abgeschlossen (closed), was einfach heißt, dass gph$F$ abgeschlossen in (X, Y) ist.

Wir brauchen hier:

- X = vollständiger metrischer Raum;
- Y = linearer normierter Raum (später sind beide Banach Räume).

F heißt pseudo regulär in (nahe) $(x^0, y^0) \in$ gph$F$, wenn es Umgebungen $U(x^0)$ und $V(y^0)$ sowie eine Konstante L derart gibt, dass zu beliebigen $x \in U(x^0),\; y, y' \in V(y^0)$ im Falle $y \in F(x)$ ein x' existiert mit $y' \in F(x')$ und $d_X(x', x) \le L d_Y(y', y)$.

Andere Bezeichnungen dafür:
F heißt metrisch regulär, F^{-1} heißt pseudo-Lipschitz in/nahe (x^0, y^0) bzw. (y^0, x^0).
Die Eigenschaft pseudo regulär ist offenbar auch für alle $(x', y') \in$ gph$F$ in einer kleinen Umgebung von (x^0, y^0) erfüllt (mit demselben L), wenn sie es schon für (x^0, y^0) ist.

Sind außerdem die Lösungen $x \in U(x^0)$ zu $y \in F(x)$ eindeutig für alle $y \in V(y^0)$, so heißt F streng regulär. Dann ist F^{-1} (lokal) eine Lipschitz-Funktion (auch wenn F mehrdeutig war).

Typische einfache Beispiele:

- Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $Df(x) \neq 0 \;\forall x$ ist f (überall) pseudo regulär.
- Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $\det Df(x) \neq 0 \;\forall x$ ist f (überall) streng regulär.
- Die komplexe Funktion f mit $f(z) = \frac{z^2}{|z|}$ $(z \neq 0)$ und $f(0) = 0$ ist pseudo regulär, aber nicht streng regulär im Ursprung.

4.3.1 Konstruktion über modifizierte sukzessive Approximation

Wir betrachten jetzt Lösungen $x = x(g)$ der nichtlinear gestörten Gleichung $g(x) = F(x)$ oder Inklusion $g(x) \in F(x)$, wenn die Funktion $x \to g(x) - y^0$ auf $U = U(x^0)$ eine kleine Lipschitz

Funktion ist, d.h., es sollen $\alpha := \sup_{x \in U} \|g(x) - y^0\|$ und eine Lipschitz Konstante β von g auf U hinreichend klein sein.

Satz 4.14 (Satz über sukzessive Approximation)**.** *Sei F pseudo regulär in (x^0, y^0) mit Konstante L und Umgebungen $U(x^0)$ und $V(y^0)$, die jeweils eine Kugel um x^0 bzw. y^0 vom Radius $\delta_F > 0$ enthalten. Sei (o.B.d.A.) $L > 1$, und weiter seien α und β so klein, dass $\Theta := L\beta < \frac{1}{2}$ und $2\alpha L < \delta_F$.*
Dann hat die Gleichung $g(x) = F(x)$ (analog die Inklusion) eine Lösung x^* mit $d(x^*, x^0) < 2L\alpha$.

Beweis. Um $g(x) \in F(x)$ zu lösen, wähle man zunächst ein x^1, sodass $x^1 \in F^{-1}(g(x^0))$ und $d(x^1, x^0) \le L\|g(x^0) - y^0\|$ gilt.
Wegen Pseudo-Regularität existiert ein solches x^1, wenn nur $\alpha < \delta_F$ ist, und dann folgt

$$d(x^1, x^0) \le L\|g(x^0) - y^0\| \le L\alpha < \frac{\delta_F}{2}. \tag{4.13}$$

Also bleibt x^1 in $U(x^0)$, und $\|g(x^1) - g(x^0)\| \le \beta d(x^1, x^0)$ liefert

$$\|g(x^1) - y^0\| \le \|g(x^1) - g(x^0)\| + \|g(x^0) - y^0\| \le \beta L\alpha + \alpha < \frac{1}{2}L\alpha + \alpha < L\alpha < \frac{\delta_F}{2}.$$

Damit liegt auch $g(x^1)$ in $V(y^0)$.
Beginnend mit $k = 1$ wählen wir nun $x^{k+1} \in F^{-1}(g(x^k))$ mit $d(x^{k+1}, x^k) \le L\|g(x^k) - g(x^{k-1})\|$. Die Existenz folgt aus $g(x^k), g(x^{k-1}) \in V(y^0)$, $x^k \in U(x^0)$ und $x^k \in F^{-1}(g(x^{k-1}))$. Außerdem erhält man $d(x^{k+1}, x^k) \le L\|g(x^k) - g(x^{k-1})\| \le L\beta d(x^k, x^{k-1}) = \Theta d(x^k, x^{k-1})$.
Das liefert induktiv mit $\Theta < \frac{1}{2}$,

$$d(x^{k+1}, x^0) \le d(x^{k+1}, x^k) + \ldots + d(x^1, x^0) \le L\alpha \left[1 + \Theta^1 + \ldots + \Theta^k\right] < L\alpha(1-\Theta)^{-1} < 2L\alpha < \delta_F \tag{4.14}$$

und

$$\|g(x^{k+1}) - y^0\| \le \|g(x^{k+1}) - g(x^0)\| + \|g(x_0) - y^0\| \le 2\beta L\alpha + \alpha < L\alpha + \alpha < \delta_F.$$

Die entsprechenden Punkte bleiben daher in den jeweiligen Umgebungen, und die Folge der x^k bildet nach (4.14) eine Fundamentalfolge in X. Die Vollständigkeit von X sichert Konvergenz $x^* = \lim x^k$ und wegen Stetigkeit (Abgeschlossenheit) auch $x^* \in F^{-1}(g(x^*))$, also $g(x^*) = F(x^*)$ bzw. $g(x^*) \in F(x^*)$, und es gilt (da $\Theta < \frac{1}{2}$) auch $d(x^*, x^0) < 2L\alpha$. □

Bemerkungen:

1) Man kann auch einfach mit $\alpha' = \|g(x^0) - y^0\|$ statt $\alpha = \sup_{x \in U} \|g(x) - y^0\|$ abschätzen, ohne dass sich der Beweis ändert. Mit kleinerem β kann man mittels (4.14) die Abschätzung zu $d(x^*, x^0) \le L\alpha(1 - \Theta)^{-1} < 2L\alpha$ verbessern. Bei Definition von α und β kann man statt U auch die δ_F-Kugeln verwenden.

2) Ist F eine lineare Abbildung (wie in den meisten Anwendungen), bedeutet die Iterations-Vorschrift $x^{k+1} \in F^{-1}(g(x^k))$ gerade, die lineare Gleichung $F(x) = g(x^k)$ zu lösen und bei Mehrdeutigkeit $d(x, x^k)$ hinreichend klein zu machen.

3) Im Falle strenger Regularität ist (bei kleinem β) die eindeutige Abbildung $\varphi(x) = F^{-1}(g(x))$ eine kontraktive Funktion und $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ wird die „normale“ sukzessive Approximation für Banachs Fixpunktsatz.

4.3.2 Sätze von (Lyusternik / Graves) und Polyak

Satz 4.15 (Satz von (Lyusternik / Graves))**.** *Sei $f : X \to Y$ (Banach Räume) stetig differenzierbar, $f(x^0) = 0$ und $Df(x^0)X = Y$.*
Dann ist f pseudo regulär in $(x^0, 0)$. (Ist $Df(x^0)$ sogar bijektiv, folgt strenge Regularität).

Beweis. Wir können nutzen, dass $f(x) = Df(x^0)(x - x^0) + r(x)$ mit einer C^1-Funktion r richtig ist, die $Dr(x^0) = 0$ erfüllt. Die Gleichung $f(x) = y$ bedeutet so

$$y - r(x) = F(x) := Df(x^0)(x - x^0). \tag{4.15}$$

Wir müssen eine Lösung von $f(x') = y'$ finden, die nahe einem festen x_y (nahe x^0) mit $f(x_y) = y$ ist.
Also gilt $y^0 := y - r(x_y) = F(x_y)$, und zu lösen ist $g(x') := y' - r(x') = F(x')$.
Die affin lineare Funktion F ist (nach Banach's Inversensatz überall) pseudo-regulär mit festem L und Umgebungen vom Radius 1. Schränkt man x auf eine Kugel $K(x^0, 2\delta)$ mit $2\delta < 1$ ein, folgt wegen $r \in C^1$:
$\sup_{x \in K} \|Dr(x)\| = O(\delta)$, und $g(x) - y^0$ hat Lipschitz Konstante $\beta \leq O(\delta)$ auf K, ($\beta \leq O(\delta)$ folgt über Mittelwert-Satz), die für kleine δ also auch $\beta L < \frac{1}{2}$ erfüllt. Außerdem ist

$$\alpha := \sup_{x \in K} \|g(x) - y^0\| \leq \|y' - y\| + \sup_{x \in K} \|r(x) - r(x_y)\| \leq \|y' - y\| + 4\beta\delta$$

und $\alpha' := \|g(x_y) - y^0\| = \|y' - y\|$.
Wir ersetzen δ_F aus dem obigen Satz durch 2δ.
Liegen nun y und y' in einer Kugel vom Radius γ mit $4\gamma L < \delta$ und x_y in $K(x^0, \delta)$, wonach $K(x_y, \delta) \subset K(x^0, 2\delta)$, so ist auch $2\alpha' L < \delta$.
Der Satz über sukzessive Approximation lässt sich also mit $x^0 = x_y$ anwenden und liefert wie verlangt die Existenz einer Lösung x' mit $d(x', x_y) \leq 2L\|y' - y\|$. □

Zur Information:

Satz 4.16 (Satz von A. Polyak (2000))**.** *Sei $f : X \to Y$ (reelle Hilbert Räume) stetig differenzierbar, $f(x^0) = 0$ und $Df(x^0)X = Y$. Dann ist für kleine $\varepsilon > 0$ das f- Bild der Kugel $B(x^0, \varepsilon)$ konvex.*
Bemerkung: *Natürlich braucht man die stetige Differenzierbarkeit in allen Fällen nur nahe x^0.*

5 Einige Elemente nichtglatter Analysis

5.1 Ekeland's variational principle

Satz 5.1 (Ekeland's variational principle)**.** *Let X be a complete metric space and $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ be a l.s.c. functional with a finite infimum.*
Let ε and α be positive, and let x satisfy $\varphi(x) \leq \varepsilon + \inf_X \varphi$. Then, there is some $z \in X$ such that

$$d(z, x) \leq \alpha, \quad \varphi(z) \leq \varphi(x) \quad \text{and} \quad \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(\xi, z) \geq \varphi(z) \quad \forall \xi \in X.$$

Beweis. Put $h(z) = \inf_{\xi \in X} \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(\xi, z)$.
For arbitrary ξ, z and z' in X, we observe

$$\varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(\xi, z) \leq \varphi(\xi) + \frac{\varepsilon}{\alpha}[d(\xi, z') + d(z', z)].$$

Taking the infimum over all $\xi \in X$ on both sides, we obtain

$$h(z) \leq h(z') + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(z', z).$$

Therefore, h is a Lipschitz function. To construct a sequence z^k we set $z^0 = x$.

If $h(z^0) \geq \varphi(z^0)$ then $z = z^0$ satisfies the requirements of the theorem. Thus, beginning with $k = 0$, assume that $h(z^k) < \varphi(z^k)$. Then one finds some z^{k+1} such that

$$\varphi(z^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(z^{k+1}, z^k) < \varphi(z^k) \tag{5.1}$$

and, in addition,

$$\varphi(z^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(z^{k+1}, z^k) < h(z^k) + 2^{-k}. \tag{5.2}$$

From (5.1) and $\varphi(z^0) \leq \inf_X \varphi + \varepsilon$, we obtain for each k,

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{s \leq k} d(z^{s+1}, z^s) < \sum_{s \leq k} (\varphi(z^s) - \varphi(z^{s+1})) = \varphi(z^0) - \varphi(z^{k+1}) \leq \varepsilon.$$

This yields particularly

$$d(z^{k+1}, z^0) \leq \sum_{s \leq k} d(z^{s+1}, z^s) \leq \alpha. \tag{5.3}$$

By (5.1) and (5.3), $z = z^k$ is the point in question whenever $\varphi(z^k) \leq h(z^k)$.
Otherwise (5.3) shows that the Cauchy sequence z^k has a limit z^* in the complete space X. Clearly, $d(z^*, z^0) \leq \alpha$.

Since φ is l.s.c., it follows by (5.1), $\varphi(z^*) \leq \liminf \varphi(z^k) \leq \varphi(z^0)$.

Finally, recalling that h is continuous., we infer due to (5.2),

$$\varphi(z^*) \leq \liminf \left(\varphi(z^{k+1}) + \frac{\varepsilon}{\alpha} d(z^{k+1}, z^k) \right) \leq \limsup \left(h(z^k) + 2^{-k} \right) \leq h(z^*).$$

□

5.2 Reformulierung einer Steuerungsaufgabe mittes Multifunktionen

Idee: $x' = f(x, u, t)$ als $x' \in F(x, t) = \{p \mid \exists u \in U : \ p = f(x, u, t)\}$ schreiben.
Dann wird also die Zulässigkeit abstrakt zu

$$x' \in F(x, t)$$

mit einer mehrwertigen Abbildung F (Differential-Inklusion).
Die Min.-Bedingung -wenn h in der Zielfunktion nicht von u abhängt- wird wegen

$$\langle \lambda, f(x(t), u(t), t) \rangle = \min_{w \in U} \langle \lambda, f(x(t), w, t) \rangle = \min_{p \in F(x(t), t)} \langle \lambda(t), p \rangle = \min \langle \lambda(t), F(x(t), t) \rangle$$

$$\text{zu} \qquad \langle \lambda(t), x'(t) \rangle = \min \langle \lambda(t), F(x(t), t) \rangle .$$

Das bedeutet:
$-\lambda(t)$ ist ein Normalenvektor an die Menge $F(x(t), t)$ im Punkte $x'(t)$.
Hierbei hängt h nicht von u ab, wenn z.B. ein Wert $H(x(T))$ zu minimieren ist.
Das kann man schreiben als

$$H(x(T)) = H(x(0)) + \int_0^T \frac{dH(x(s))}{ds} ds = H(x(0)) + \int_0^T H_x(x(s)) x'(s) ds.$$

Um die Inklusion analytisch auszuwerten, braucht man Aussagen darüber, wann es (Lipschitz-) stetige oder (Lebesgue-) messbare Auswahl-Funktionen $g = g(x, t)$ für $F(x, t)$ gibt.
Man kann dann $x' = g(x, t)$ für entsprechende g behandeln.
Dies motiviert u.a. die folgenden Fragestellungen.

5.3 E. Michael's selection Theorem

Satz 5.2 ((1956), vereinfachte $\mathbb{R}^n$-Version)**.** *Es sei $F : X \to Y$ eine mehrwertige, unterhalb stetige Abbildung mit nichtleeren, konvexen Bildern $F(x) \subset Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, X nichtleer und kompakt. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to Y$ mit $f(x) \in F(x)$ $\forall x \in X$.*

Unterhalb stetig bedeutet für mehrwertige Abbildungen F, dass für jede offene Menge $\Omega \subset Y$ die Urbildmenge $F^{-1}(\Omega) := \{x \mid F(x) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ ebenfalls (relativ) offen in X ist.
Äquivalent zu unterhalb stetig sind:

(i) $\lim_{x' \to x} d(y, F(x')) = 0 \;\; \forall (x,y)$ *mit* $y \in F(x)$ *[diese Paare bilden gphF] bzw.*

(ii) $\forall (x,y) \in gphF$ *gibt es eine in x stetige Auswahlfunktion* $g_{x,y}$ *für F mit* $g_{x,y}(x) = y$.

Beweis. *Teil 1:*
Konstruktion von stetigem f, sodass $f(x) \in clF(x)$ (Abschließung von $F(x)$) $\forall x \in X$.
Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei $F_\varepsilon(x) = \{y' \mid d(y', F(x)) < \varepsilon\}$. Dann ist $F(x) \subset F_\varepsilon(x)$, und die Bilder der („um ε aufgeblasenen") mehrdimensionalen Abbildund F_ε bleiben konvex. Wir zeigen zuerst die Existenz einer stetigen Auswahl für $F_\varepsilon(x)$.
Ist $y' \in F_\varepsilon(x)$, so gibt es ein $y \in F(x)$ mit $d(y', y) = \delta < \varepsilon$. Weil die offene Kugel $K(y, \varepsilon - \delta)$ stets Punkte aus $F(x')$ enthält, sofern $x' \in X$ und $d(x', x)$ hinreichend klein ist (unterhalb stetig), folgt für diese x' auch $y \in F_\varepsilon(x')$. Damit sind die Urbildmengen $F_\varepsilon^{-1}(y') = \{x \in X \mid y' \in F_\varepsilon(x)\} \subset X$ alle offen.
Zu jedem $x \in X$ gibt es weiter ein $y \in F(x)$; also ist dann $x \in F^{-1}(y) \subset F_\varepsilon^{-1}(y)$.
Die Mengen $F_\varepsilon^{-1}(y')$ mit $y' \in Y$ bilden daher eine offene Überdeckung der kompakten Menge X. Nach Heine-Borel gibt es somit endlich viele y_i, mit denen schon $X \subset \bigcup F_\varepsilon^{-1}(y_i)$ gilt. Nach bekanntem Vorbild konstruiert man wieder eine Zerlegung der Einheit für diese Überdeckung, wir erhalten also stetige Funktionen λ_i mit den Eigenschaften:

$$\lambda_i(x) \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i(x) = 1 \;\text{ und }\; \lambda_i(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in F_\varepsilon^{-1}(y_i).$$

Damit definieren wir

$$f(x) = \sum_i \lambda_i(x) y_i.$$

Dann ist f stetig und $f(x)$ jeweils eine Konvex-Kombination von Punkten y_i mit $x \in F_\varepsilon^{-1}(y_i)$ bzw. $y_i \in F_\varepsilon(x)$. Wegen Konvexität von $F_\varepsilon(x)$ gilt also $f(x) \in F_\varepsilon(x)$; f ist eine stetige Auswahlfunktion für $F_\varepsilon(x)$. Wir nennen eine solche Funktion f nun f_ε.
Konstruktion einer stetigen Auswahlfunktion für clF: Hat man f_ε, kann man die Abbildung

$$G_\varepsilon(x) = F(x) \cap \{y \mid d(y, f_\varepsilon(x)) < \varepsilon\} \subset F(x)$$

definieren, die wegen $d(f_\varepsilon(x), F(x)) < \varepsilon$ erneut nichtleere, konvexe Bilder besitzt und (wie man leicht direkt zeigt) wieder unterhalb stetig ist.
Beginnend mit $F_1 = F$, ist dann mit $\varepsilon_k = 4^{-k}$ folgende Konstruktion möglich:
Zu F_k wähle man f_k als stetige ε_k-Auswahl und bilde

$$F_{k+1}(x) = F_k(x) \cap \{y \mid d(y, f_k(x)) < \varepsilon_k\}.$$

Da $F_{k+1}(x)$ wieder nichtleer und konvex ist und F_{k+1} auch unterhalb stetig bleibt, lässt sich die Konstruktion tatsächlich wiederholen. Man erhält so eine Folge von Abbildungen $F_{k+1} \subset F_k$ und Funktionen, die in allen Argumenten x erfüllen:
$d(f_k, F_k) < \varepsilon_k$, also erst recht $d(f_k, F) < \varepsilon_k$, und

$$d(f_k, f_{k+m}) \leq d(f_k, f_{k+1}) + d(f_{k+1}, f_{k+2}) + \ldots + d(f_{k+m-1}, f_{k+m}).$$

Mit $y \in F_{k+1}(x)$, sodass $d(f_{k+1}, y) < \varepsilon_{k+1}$, folgt so per Definition

$$d(f_k, f_{k+1}) \leq d(f_k, y) + d(y, f_{k+1}) < \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} < 2^{-k}.$$

Die stetigen Funktionen f_k bilden somit eine Fundamental (Cauchy-) Folge im vollständigen Raum $C(X)$. Also existiert $f = \lim f_k$ in $C(X)$ und erfüllt wegen $d(f_k(x), F(x)) < \varepsilon_k$ auch $f(x) \in clF(x)$ $\forall x$.

Der Satz gilt also zumindest dann, wenn die Bilder abgeschlossen sind.
Teil 2:
Konstruktion von stetigem g, sodass $g(x) \in \mathrm{relint}F(x) \subset F(x)$ $\forall x \in X$.

Definiere relint$M$ (relatives Innere) für konvexe Mengen M: Sei U_M der kleinste affine Teilraum, der M enthält, also

$$U_M = \{u \mid \exists N, \exists r_k \in \mathbb{R}, \exists y_k \in M: \ u = \sum r_k y_k, \ \sum r_k = 1, \ k = 1, \dots, N\}.$$

Für $M \subset \mathbb{R}^m$ ist U_M abgeschlossen, und es reicht $N \leq m+1$ zu wählen; vergleiche mit *convM* (Caratheodory).

Man definiert: $y \in \text{relint}M$, falls $B(y,\varepsilon) \cap U_M \subset M$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. In der Folge benutzen wir

1.) falls $y \in \text{relint}M$, $y' \in clM$ und $\lambda \in (0,1)$, so ist $z(\lambda) = \lambda y + (1-\lambda)y' \in \text{relint}M$
(man wähle für $z(\lambda)$ jeweils $0 < \varepsilon(\lambda) < \lambda\varepsilon$)

2.) $\text{relint}M = \text{relint}(clM)$.

Erfülle eine stetige Funktion f zunächst $f(x) \in clF(x) \ \forall x$.

Mit $G(x) = F(x) \cap B(f(x), 1)$ (die offene Kugel um $f(x)$) ist G wieder unterhalb stetig, und alle Bilder sind beschränkt. Sei $Y_0 = \{y_1, y_2, \dots\}$ abzählbar und dicht in $Y = \mathbb{R}^m$.
Wir bilden mit offenen Kugeln $B(y_p, k^{-1})$ (z.B. alle offenen Kugeln mit rationalem Radius und rationalem Zentrum)

$$X_{p,k} = \{x \in X \mid clG(x) \cap B(y_p, k^{-1}) \neq \emptyset\}.$$

Da G unterhalb stetig ist (somit auch clG), sind dann alle $X_{p,k}$ offen.
Damit kann jedes $X_{p,k}$ auch als *abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen* geschrieben werden: $X_{p,k} = \bigcup\limits_q A_{p,k,q} \quad (q = 1,2,3,\dots)$; z.B. so:
Man nimmt eine abzählbare dichte Teilmenge W von $X_{p,k}$, betrachtet alle abgeschlossenen Kugeln mit rationalem Radius um $w \in W$, die ganz in $X_{p,k}$ liegen, und vereinigt sie alle.

Nun definiert man

$$G_{p,k,q}(x) = clG(x), \quad \text{falls } x \in X \setminus A_{p,k,q}$$

und

$$G_{p,k,q}(x) = clG(x) \cap B(y_p, k^{-1}) \ \text{ falls } x \in A_{p,k,q}.$$

Weil alle Mengen $A_{p,k,q}$ abgeschlossen sind und $G_{p,k,q}$ auf $A_{p,k,q}$ eine unterhalb stetige Teilabbildung von clG ist, wird $G_{p,k,q}$ insgesamt unterhalb stetig auf X.

Damit gibt es (wie schon gezeigt) stetige $f_{p,k,q}$ mit

$$f_{p,k,q}(x) \in clG_{p,k,q}(x) \ \ \forall x \in X.$$

Dichtheit der Bilder:
Wir zeigen: Die abzählbare Menge $a(x)$ aller Bild-Punkte $f_{p,k,q}(x)$ ist dicht in $clG(x)$.

Sei $y \in clG(x)$ und $\varepsilon > 0$.
Dann gibt es ein k mit $k^{-1} < \varepsilon$ und ein p mit $y \in B(y_p, k^{-1})$. Da auch $y \in clG(x)$, folgt nach Definition $x \in X_{p,k}$, wonach auch $x \in A_{p,k,q}$ für ein q gilt.
Mit diesem q folgt weiter, dass auch

$$f_{p,k,q}(x) \in clG_{p,k,q}(x) = cl(clG(x) \cap B(y_p, k^{-1}))$$

richtig ist. Also muss gelten

$$\|f_{p,k,q}(x) - y\| \leq \|f_{p,k,q}(x) - y_p\| + \|y_p - y\| \leq \frac{2}{k} < 2\varepsilon.$$

Das bedeutet:
Die abzählbare Menge $a(x)$ aller Punkte $f_{p,k,q(x)}$ ist dicht in $clG(x)$.

Schließlich lassen sich alle $f_{p,k,q}(x)$ umnummerieren in $g_1(x), \ldots, g_\nu(x), \ldots$
Bildet man nun mit den beschränkten und stetigen Funktionen g_ν

$$g(x) = \sum_\nu 2^{-\nu} g_\nu(x),$$

so wird auch g stetig.

Weil (für jedes x wegen der gezeigten Dichtheit) wenigstens ein $g_\nu(x)$ aus relint$G(x)$ ist, besitzt auch $g(x)$ diese Eigenschaft, denn es gilt

$$g(x) = 2^{-\nu} g_\nu(x) + \sum_{\mu \neq \nu} 2^{-\mu} g_\mu(x) = 2^{-\nu} g_\nu(x) + (1 - 2^{-\nu}) \sum_{\mu \neq \nu} (1 - 2^{-\nu})^{-1} 2^{-\mu} g_\mu(x)$$

wobei die zweite Summe $\sum_{\mu \neq \nu} (1 - 2^{-\nu})^{-1} 2^{-\mu} g_\mu(x)$ aus $clG(x)$ ist.

Man erhält so die gesuchte Funktion:

$$g(x) \in \text{relint } clG(x) = \text{relint} G(x) \subset \text{relint} F(x).$$

$\square$

Folgerung 5.3. *Sei F eine mehrwertige, unterhalb stetig Abbildung, definiert auf einer konvexen, kompakten Menge $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ mit $\emptyset \neq F(x)$ konvex und $F(x) \subset S$ $\forall x \in S$. Dann besitzt F einen Fixpunkt.*

Beweis. Man wende Brouwer's Fixpunkt-Satz auf eine stetige selection von F an. $\square$

5.4 Messbare Multifunktion F in endlich dimensionalen Räumen

Definition 5.4. *Sei $F : X \to Y$ eine Multifunktion. Messbar bedeute: Für* offene *$U \subset Y$ ist $F^{-1}(U) := \{x \mid F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ stets* messbar.

Vergleich: $F : X \to Y$ ist unterhalb stetig: Für offene *$U \subset Y$ ist $F^{-1}(U)$ stets* offen.

Satz 5.5. *Sei F messbar, beschränkt, alle $F(x)$ konvex, abgeschlossen, nicht leer.
Dann ist $f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in F(x)} \|y\|$ eine messbare Auswahlfunktion für F (Euklidische Norm).*

Beweis. Sei $g(x)$ der Minimalwert. Wenn $g(x) < c$, so schneidet die offene Kugel cB^0 die Menge $F(x)$ und umgekehrt. Die Menge $F^{-1}(cB^0)$ dieser x ist messbar nach Voraussetzung. Also ist g messbar.
Damit ist auch die (Kugel-) Abbildung $G_c(x) = \{y \mid \|y\| < g(x) + c\}$ messbar.
Denn für offene $U \subset Y$ ist

$$G_c^{-1}(U) := \{x \mid \text{ein } y \text{ mit } \|y\| < g(x) + c \text{ ist aus } U\} = \{x \mid \inf \|U\| < g(x) + c\}$$

und g ist messbar.
Für offene $U \subset Y$ sind deshalb $F^{-1}(U)$ und $G_{k^{-1}}^{-1}(U) = \{x \mid G_{k^{-1}}(x) \cap U \neq \emptyset\}$ stets messbar.
Ebenso der Durchschnitt $D_k(U) = F^{-1}(U) \cap G_{k^{-1}}^{-1}(U)$.

Weiter ist $y \in f(x)$ genau dann, wenn $y \in F(x) \cap G_{k^{-1}}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Und $f^{-1}(U)$ besteht aus allen x mit $f(x) \cap U \neq \emptyset$, also $[F(x) \cap G_{k^{-1}}(x)] \cap U \neq \emptyset$ für alle k.
Betrachte nun offene Kugeln $B(y_\nu, m^{-1})$ mit einer abzählbaren dichten Menge von y_ν in Y. (z.B. alle offenen Kugeln mit rationalem Radius und rationalem Zentrum). Nun ist auch

$$f(x) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left[\bigcap_m \bigcup_\nu (B(y_\nu, m^{-1}) \cap F(x)) \cap (B(y_\nu, m^{-1}) \cap G_{k^{-1}}(x)) \right].$$

Die Menge aller x, sodass die rechten Mengen U schneiden, ist messbar.
Das bleibt nach den abzählbar vielen Operationen der Vereinigung und des Durchschnitts richtig. Es folgt damit Messbarkeit von f.

Wir habe so gezeigt: Die Teilabbildung $f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in F(x)} \|y\|$ ist immer messbar. Unter der Konvexitaets- und Kompaktheits-Voraussetzung ist $f(x)$ einelementig, also ist f eine messbare Selektion. □

5.5 Lipschitz stetige Selektionen

Wir bezeichnen hier den Parameter mit t, um x als Element der Bilder $F(t)$ benutzen zu können. Sei $F = F(t) \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz stetig mit Konstante L, was mit dem Hausdorff-Abstand bedeuten soll:

$$d_H(F(t), F(t')) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid F(t) \subset U_\varepsilon(F(t')) \text{ und } F(t') \subset U_\varepsilon(F(t))\} \leq Ld(t, t').$$

U_ε bezeichnet eine ε-Umgebung der Menge. Außerdem seien die Mengen konvex, kompakt und nicht leer für alle t aus einem kompakten metrischen Raum T.

Satz 5.6 (G. Dommisch, s. preprint Nr. 91 der Sekt. Math. der Humb. Univ.. 1984)**.** *Dann gibt es eine Selektion f für F , die mit Konstante nL auf T Lipschitz stetig ist.*

Beweisidee. Der Beweis kann direkt auf differenzierbare bzw. messbare Abbildungen übertragen werden.
Man beschreibt $F(t)$ für festes t als Subdifferential einer sublinearen Funktion, $p(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nämlich mittels

$$p(x, t) = \max\{\langle x, x' \rangle \mid x' \in F(t)\}.$$

Dann wird gerade das Subdifferential bzgl. x zu $\partial p(0, t) = F(t)$ (eine Folgerung des Trennungssatzes).
Glaettung: Für festes t lässt sich die (Lipschitz stetige) Funktion $p(., t)$ von $x \in \mathbb{R}^n$ glätten über eine glatte Mittelwertfunktion H_ε: Man erhält dann (wir integrieren ueber $\mathbb{R}^n$)

$$p_\varepsilon(x, t) = \int p(x - y, t) H_\varepsilon(y) dy,$$

und mittels der Transformation $z = x - y$ folgt

$$p_\varepsilon(x, t) = \int p(-z, t) H_\varepsilon(x + z) dz$$

sowie für den Gradienten bzgl. x

$$\nabla p_\varepsilon(x, t) = \int p(-z, t) \nabla H_\varepsilon(x + z) dz.$$

Die Funktion H_ε wähle man speziell als nur von der (Euklidischen) Norm abhängig:

$$H_\varepsilon(y) = h_\varepsilon(\|y\|)$$

mit $h_\varepsilon(r) = \alpha(\varepsilon)\left[1 + \cos\left(\pi \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)\right]$ für $|r| < \varepsilon$ und $h_\varepsilon(r) = 0$ sonst. Man integriert also nur ueber kleine Kugeln. Dabei sei $\alpha(\varepsilon)$ so fixiert, dass $\int H_\varepsilon(z)dz = 1$ wird.

Man berechnet leicht, dass für stetiges $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und die Einheitskugel B im $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int_B \beta(\|y\|) dy = \int_0^1 \beta(r) v_n'(r) dr,$$

wenn $v_n(r)$ das Volumen der n-dimensionalen Kugel vom Radius r bezeichnet. Das erleichtert uns spätere Berechnungen.

Man beweist nun schrittweise die folgenden Aussagen:

$\nabla p_\varepsilon(0,t)$ ist Lipschitz stetig mit der Konstanten nL.

$$|p_\varepsilon(x,t) - p(x,t)| \leq O(\varepsilon).$$

Zu jedem (x,t) existiert ein Paar (y',x') , $y \in \partial p(x',t)$ mit Abstand $\|(\nabla p_\varepsilon(x,t),x) - (y',x')\| < \sqrt{2O(\varepsilon)}$ (dazu wendet man das Ekeland-Prinzip an).
Anwendung auf $x = 0$ liefert dann

$$d(\nabla p_\varepsilon(0,t), \partial p(x',t)) < \sqrt{2O(\varepsilon)}. \tag{5.4}$$

Weil $p(\cdot,t)$ sublinear ist, folgt auch $\partial p(x',t) \subset \partial p(0,t)$ und so

$$d(\nabla p_\varepsilon(0,t), \partial p(0,t)) = d(\nabla p_\varepsilon(0,t), F(t)) < \sqrt{2O(\varepsilon)}.$$

Schließlich folgt aus (5.4) auch Beschränktheit der Lipischitz stetigen Funktionen $\nabla p_\varepsilon(0,t)$, wonach die Konvergenz einer Teilfolge gegen die gesuchte Auswahlfunktion über $\varepsilon \to 0$ folgt. $\square$

5.6 Stetigkeit des Lagrange Multiplikators

(Wurde bisher nicht gebraucht: Stetigkeit des Lagrange Multiplikators λ)

Es gelte für alle $u \in X$:

$$0 = L_x(x,\lambda)u = DF(x)u + (\lambda, u - DG(x)u) = DF(x)u + (\lambda, u - v) = \int_a^b B(t)u(t)dt + \int_a^b (u(t) - v(t))d\lambda(t) \tag{5.5}$$

$$v(t) = \int_a^t A(s)u(s)ds.$$

Sei $\sigma \in (a,b)$ eine fixierte Unstetigkeits-Stelle von λ. Wir setzen voraus, dass λ monoton ist. Mit festen p und q gilt dann

$$\lambda(\sigma - \varepsilon) \leq p < q \leq \lambda(\sigma + \varepsilon).$$

Die Monotonie ist eine Vereinfachung, die allerdings für die monotonen Teile von $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ vorausgesetzt werden kann.
Auf dem ε-Intervall $I(\varepsilon)$ um σ nehmen wir u als „symmetrische Dreieck-Funktion“ mit Randwerten 0 und dem Maximum h. Wir schätzen die Integrale einzeln ab und zeigen, dass einerseits

$$\int_a^b u(s)d\lambda(s) \geq h(q-p)$$

und dass die beiden anderen Integrale

$$\int_a^b B(t)u(t)dt, \quad \int_a^b v(t)d\lambda(t)$$

im Betrag $< h\varepsilon M$ sind. Mit kleinem ε, $(\varepsilon M < q - p)$ entsteht so ein Widerspruch zu (5.5).

1) Wegen Stetigkeit von B ist $|B(t)| \leq K_B$ beschränkt. Da auch $u = 0$ außerhalb $I(\varepsilon)$ gilt, folgt

$$\left| \int_a^b B(t)u(t)dt \right| \leq 2\varepsilon h K_B.$$

2) Es ist weiter

$$\int_a^b u(s)d\lambda(s) = \lim \sum_k u(t_k)[\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)].$$

Wegen Monotonie sind die Summen nichtnegativ, und bei jeder hinreichend feinen Zerlegungen des Intervalls mit $t_k < \sigma < t_{k+1}$ (für ein festes k) folgt so

$$u(t_k)[\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)] > \frac{1}{2}h(q-p).$$

Also ist auch

$$\int_a^b u(s)d\lambda(s) \geq \frac{1}{2}h(q-p).$$

3) Nun betrachten wir

$$\int_a^b v(t)d\lambda(t) = \lim \sum_k v(t_k)[\lambda(t_{k+1}) - \lambda(t_k)].$$

Es ist $v(\sigma) = \int\limits_a^\sigma A(t)u(t)dt = \int\limits_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} A(t)u(t)dt$ und $|v(\sigma)| = \left|\int\limits_{\sigma-\varepsilon} A(t)u(t)dt\right| \leq \varepsilon h K_A$, $K_A = \sup|A(t)|$.
Sei $\delta_A(\varepsilon) = \sup\{|A(\sigma) - A(t)|,\ t \in I(\varepsilon)\}$. Wir haben nur $t \in I(\varepsilon)$ zu betrachten.
Alle Werte

$$v(t_k) = \int_a^{t_k} A(t)u(t)dt = v(\sigma) + \int_\sigma^{t_k} A(t)u(t)dt$$

schwanken um $v(\sigma)$ höchstens um

$$\begin{aligned}
|v(t_k) - v(\sigma)| &= \left|\int_\sigma^{t_k} A(t)u(t)dt\right| \\
&\leq \varepsilon \sup_t \left(|A(t)u(\sigma)| + |A(t)u(t) - A(t)u(\sigma)|\right) \\
&\leq \varepsilon(|A(\sigma)| + \delta_A(\varepsilon))h + \varepsilon(|A(\sigma)| + \delta_A(\varepsilon))|u(\sigma) - u(t_k)| \leq \varepsilon h K_A.
\end{aligned}$$

Damit gilt (für eine positive Konstante $C(\lambda)$):

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b v(t)d\lambda(t)\right| &\leq \left|\int_a^b v(\sigma)d\lambda(t)\right| + \left|\int_a^b v(t)d\lambda(t) - \int_a^b v(\sigma)d\lambda(t)\right| \\
&\leq |v(\sigma)|C(\lambda) + |v(t) - v(\sigma)|C(\lambda) \leq 2\varepsilon h K_A C(\lambda).
\end{aligned}$$

Für kleine ε, h entsteht ein Widerpruch, also kann σ keine Unstetigkeitsstelle sein.

Index

abgeschlossen
schwach, 47
schwach*, 47
adjungierter Operator, 48

Bedingung der allgemeinen Lage, 38

Diskrete Optimalität, 45

Epigraph, 55

Feedback-Steuerung, 40

Hamilton Funktion, 27
Hamiltonfunktion, 21
Hilbert Raum, 47

Jacobi Bedingung, 17
starke, 17

kompakt
schwach, 47

Lagrange-Funktion, 53
Legendre Bedingung, 16
starke, 16

Matrix-Riccati Gleichung, 40
Maximum-Bedingung, 31
Maximumsbedingung, 21
Minimum-Bedingung, 31

Normalenkegel, 51

Operator
adjungiert, 48
Orthogonalraum, 51

Polarkegel, 53
Projektion, 51
Projektionssatz, 51
pseudo regulär, 58

Rückkoppelung, 40
reflexiver Banach-Raum, 47
reguär
streng, 58
regulär
pseudo, 58
Riccati Gleichung, 40

schwach abgeschlossen, 47
schwach kompakt, 47
schwach stetig, 47
schwach* abgeschlossen, 47
seperabler Banach-Raum, 47
Slater Punkt, 55
Störungsfunktion, 53
starke Jacobi Bedingung, 17
starke Legendre Bedingung, 16
stetig
schwach, 47
Steuerung, 21
streng regulär, 58
Subdifferenzierbarkeit, 55

Trajektorie, 21
Transversalitätsbedingung, 34, 35

Variation
erste, 14
zweite, 15
vollstetig, 52

zweite Variation, 15

Literatur

[1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Warschau, 1932.

[2] O. Bolza. Vorlesungen ueber Variationsrechnung. Chelsea Publ. Company. New York 1904. spaetere Ausgabe: Koehler und Amelang, Leipzig 1949.

[3] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley, New York, 1983.

[4] G. Dommisch, preprint Nr. 91 der Sekt. Math. der Humb. Univ. 1984.

[5] P. Funk, Variationsrechnung und ihre Anwendung auf Physik und Technik, Springer. Verlag, Berlin, 1962.

[6] L.M. Graves. *Some mapping theorems. Duke Mathematical Journal*, 17: 11–114, 1950.

[7] A.D. Ioffe and V.M. Tichomirov. Theory of Extremal Problems. Nauka, Moscow, 1974, in Russian.

[8] L.W. Kantorovich and G.P. Akilov. Funktionalanalysis in normierten Raeumen. Akademie Verlag, Berlin 1964.

[9] D.G. Luenberger. Linear and Nonlinear Programming. 2nd Edition. Addison-Wesley Inc., Reading, Massachusetts, 1984.

[10] D.G. Luenberger. Optimization by Vector Space Methods. John Wiley and Sons, 2009.

[11] L. Lyusternik. Conditional extrema of functions. *Math. Sbornik*, 41: 390–401, 1934.

[12] E. Polyak. Optimization: Algorithms and Consistent Approximations. Springer, Berlin, 1997.

[13] L.S. Pontrjagin, V.G. Boltjanski, R.V. Gamkrelidse, E.F. Mischtschenko. Mathematische Theorie Optimaler Prozesse. Nauka, Moskau, 1969 (russisch, es gibt Uebersetzungen).

[14] R.T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational Analysis.* Springer, Berlin, 1998.

[15] V.I. Smirnov. Kurs Hoehere Mathematik, Bd. IV. (3. Ausgabe) Isdat. Techn.-theoret. Literatur, Moskau, 1957 (in russian).

[16] E. Zeidler. Vorlesungen ueber nichtlineare Funktionalanalysis. Teubner Verlag, Leipzig 1976.