Serie 14 Aufgabe 1

a) Sei $N \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f. Dann ist $\{N, \mathbb{R} \setminus N\}$ eine Partition von $\mathbb{R}$.
Betrachte zunächst $f|_{\mathbb{R} \setminus N}$. Diese Funktion ist stetig und somit messbar.
Für $f|_N$ gilt, dass $(f|_N)^{-1}(B) \subset N$ für beliebige offene Mengen $B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Wegen der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes ist $f|_N^{-1}(B)$ wieder eine Lebesgue-Nullmenge.
Damit ist f messbar.

b) Man kann sich leicht überlegen, dass der Absolutbetrag auf $\overline{\mathbb{R}}$ messbar ist. Damit ist $|f|$ messbar.
$\max\{f, g\}$ ist messbar, da es durch
$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$
ausgedrückt werden kann.

c) Aus den Eigenschaften von sup und inf folgt:
$$(\sup f_n)^{-1}((-\infty, a)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n)^{-1}((-\infty, a)) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
und
$$(\inf f_n)^{-1}((a, \infty)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n)^{-1}((a, \infty)) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$
Mit der Messbarkeit von f_n, $n \in \mathbb{N}$ folgt damit direkt die Messbarkeit von $\sup f_n$ und $\inf f_n$

Es gilt $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} f_k\right)$, somit folgt die Messbarkeit von $\limsup f_n$ bereits mit den beiden obigen Aussagen.

Aufgabe 2

a) Wir betrachten zunächst einfache Funktionen:

Sei $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ und $g = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$.

Sei weiterhin $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Damit gilt direkt

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X \sum_i a_i \chi_{A_i} \, d\mu + \int_X \sum_j b_j \chi_{B_j} \, d\mu$$

$$= \int_X \sum_i a_i \chi_{A_i} + \sum_j b_j \chi_{B_j} \, d\mu = \int_X \sum_{i,j} (a_i + b_j) \chi_{C_{ij}} \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu$$

Nun approximieren wir f und g durch eine Folge von einfachen Funktionen. Dann gilt nach der Definition des Integrals:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu + \int_X g_n \, d\mu \right)$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n + g_n \, d\mu = \int_X f + g \, d\mu .$$

Dabei teilen wir den Integrationsbereich nach den Vorzeichen von f und g so auf, dass wir f_n und g_n auf den entsprechenden Teilen monoton wählen können.

b) Ist $f \leq g$, so gilt $(g-f) \geq 0$. Damit gilt: $0 \leq \int_X (g-f)\,d\mu \overset{a)}{=} \int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu$

$\Rightarrow \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$.

c) Sei $f^+ := \max(f, 0)$ und $f^- := \min(f, 0)$.
Dann gilt:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f^+ + f^-\,d\mu\right| \overset{a)}{=} \left|\int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu\right|$$

$$\leq \left|\int_X f^+\,d\mu\right| + \left|\int_X f^-\,d\mu\right| = \int_X f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu$$

$$\overset{a)}{=} \int_X f^+ - f^-\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu$$

Aufgabe 3

a) Offensichtlich ist f δ_p-messbar.
Wir approximieren f durch eine Folge f_n von einfachen Funktionen. Sei für ein beliebiges, fixes n $f_n = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$.
Dies schreiben wir um als $f_n = f(p)\chi_{\{p\}} + \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i \setminus \{p\}}$
Integration liefert $\int_X f_n\,d\delta_p = f(p)\delta_p(\{p\}) + \sum_{i=1}^{m} a_i \delta_p(A_i \setminus \{p\})$
$= f(p)$.
Im Grenzwert liefert das:

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\delta_p = \int_X f\,d\delta_p$$

b) Sei $f_n^+ := \sum_{k=1}^{n} f^+(k) \chi_{\{k\}}$, monoton konvergent gegen $f^+ = \max(f, 0)$ und $f_n^- := \sum_{k=1}^{n} f^-(k) \chi_{\{k\}}$, monoton konvergent gegen $f^- = \max(-f, 0)$.

Dann gilt: $\int_{\mathbb{N}} f_n^{\pm} \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} f^{\pm}(k) \mu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} f^{\pm}(k)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f^{\pm} \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f^{\pm}(k)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} f^{\pm}(k)$$

Beide Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} f^+(k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} f^-(k)$ müssen konvergent sein, damit f^+ und f^- integrierbar sind, was äquivalent zur absoluten Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ist.

Damit gilt: $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$