Musterlösung Blatt 3

A1

Lösen: (i) $x'(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}^{=:A} x(t)$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

EWe und EVen von A

EW $\lambda_1 = 2$ mit EV $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EW $\lambda_2 = -3$ mit EV $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen haben die Form

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

Also Lsg: $x(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} e^{2t} - e^{-3t} \\ e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}}}.$

(ii) $x'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t)$, $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

EW $\lambda = 1$ (Vielfachheit 2) mit einem dazugehörigen EV (bis auf Vielfache): $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eine Lsg der allg. DGL $x_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$

Ansatz $x_2(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$

$\rightsquigarrow$ Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t \overset{!}{=} \left(A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$$

und daraus $(a, b) = (3, 1) \Rightarrow x_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$

$\Rightarrow$ Alle Lsg der DGL haben die Form $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Da $x_2(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist $\underline{\underline{x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t}}$ die Lösung des AWP.

(2i) Suchen ein Fundamentalsystem von

$$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot x(t)$$

Berechnung von EWen und EVen von A:

Charakteristisches ~~Pz~~ Polynom $-\lambda^3 - 14\lambda$

$\Rightarrow$ EWe $\underline{\lambda_1 = 0}$, $\underline{\lambda_2 = 14i}$, $\underline{\lambda_3 = -14i}$

lösen von $(A - \lambda_j I)v = 0$ $j = 1,2,3$ liefert dazugehörige EVen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{13}(2+3\sqrt{14}\,i) \\ \frac{1}{13}(-3+(\sqrt{2})^3\sqrt{7}\,i) \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{13}(2-3\sqrt{14}\,i) \\ \frac{1}{13}(-3-(\sqrt{2})^3\sqrt{7}\,i \end{pmatrix}$$

Haben $(\lambda_2, v_2) = (\overline{\lambda_2}, \overline{v_2})$.

$\Rightarrow$ Eine Fundamentalmatrix ist gegeben durch

$$F(t) = \left(v_1,\ Re\left(v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}\right),\ Im\left(v_2 \cdot e^{\lambda_2 t}\right)\right)$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 1 & \cos(14t) & \sin 14t \\ 2 & -\frac{2}{13}\cos(14t) + \frac{3\sqrt{14}}{13}\sin(14t) & -\frac{3\sqrt{14}}{13}\cos(14t) - \frac{2}{13}\sin(14t) \\ 3 & -\frac{3}{13}\cos(14t) - \frac{(\sqrt{2})^3\sqrt{7}}{13}\sin(14t) & -\frac{3}{13}\sin(14t) + \frac{(\sqrt{2})^3\sqrt{7}}{13}\cos(14t) \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2

③

(i) Finden allg. Lösung von

a) $$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{=A} x(t) + \begin{pmatrix} -5t+2 \\ -8t-8 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wissen aus A1 a):

A hat EW $\lambda_1 = 2$ und EV $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EW $\lambda_2 = -3$ und EV $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ein Fundamentalsystem für die hom. Gl. $x'(t) = A \cdot x(t)$ ist

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -4e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Suchen eine spezielle Lsg. des inh. Systems mit dem Ansatz

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} \qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{cases} a_1 = (a_1 + a_2)t + b_1 + b_2 - 5t + 2 \\ a_2 = (4a_1 - 2a_2)t + 4b_1 - 2b_2 - 8t - 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 5 \\ 4a_1 - 2a_2 = 8 \\ -a_1 + b_1 + b_2 = -2 \\ -a_2 + 4b_1 - 2b_2 = 8 \end{cases}$$

lösen $\Rightarrow$

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 2$

$b_1 = 2 \qquad b_2 = -1.$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x_p(t) = \begin{pmatrix} 3t + 2 \\ 2t - 1 \end{pmatrix}}}$$ ④

$\Rightarrow$ Alle Lösungen des inh. Systems haben die Form

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3t + 2 + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \\ 2t - 1 + c_1 e^{2t} - 4 c_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5) $$x'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} x(t) + \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

<u>Lösung</u>: Berechnung der EWe und EVen von A liefert:

EW $\lambda_1 = 2+2i$ mit EV $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

EW $\lambda_2 = 2-2i$ mit EV $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$.

Insbesondere $(\lambda_1, v_1) = (\bar{\lambda}_1, \bar{v}_1)$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem der hom. Gl.

$x'(t) = A\, x(t)$ ist

$$\left(x_1(t) = \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t} v_1\right) = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos(2t) \\ -2e^{2t} \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t} v_1\right) = \begin{pmatrix} e^{2t} \sin(2t) \\ 2e^{2t} \cos(2t) \end{pmatrix} \right).$$

Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{cases} a_1 \cdot e^{2t} + 2(a_1 t + b_1) e^{2t} = 2(a_1 t + b_1) e^{2t} + (a_2 t + b_2) e^{2t} + 3e^{2t} \\ a_2 e^{2t} + 2(a_2 t + b_2) e^{2t} = -4(a_1 t + b_1) e^{2t} + 2(a_2 t + b_2) e^{2t} + t e^{2t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 2b_1 + b_2 + 3 \\ 2a_1 = 2a_1 + a_2 \\ a_2 + 2b_2 = -4b_1 + 2b_2 \\ 2a_2 = -4a_1 + 2a_2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = 0} \quad \underline{b_1 = 0,\ b_2 = -\frac{11}{4}}.$$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} t \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen des inh. Systems haben die Form

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} t e^{2t} + c_1 e^{2t} \cos(2t) + c_2 e^{2t} \sin(2t) \\ -\frac{11}{4} e^{2t} - 2c_1 e^{2t} \sin(2t) + 2c_2 e^{2t} \cos(2t) \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Lösen

$$x''(t) - 4x(t) = 5\cos t + 8e^{-2t}$$

Ein Fundamentalsystem für die Lösungen der hom. DGL $x''(t) - 4x(t) = 0$ ist gegeben durch $(x_1(t) = e^{2t},\ x_2(t) = e^{-2t})$.

Ansatz für eine spezielle Lösung des inh. Systems: $x_p(t) = a\cos t + bte^{-2t}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Einsetzen liefert $(-a+4a)\cos t + b(-4e^{-2t} + 4te^{-2t} - 4te^{-2t}) = 5\cos t + 8e^{-2t}$

$\Rightarrow$ $a = -1$, $b = -2$. Also

$x_p(t) = -\cos t - 2te^{-2t}$. Alle Lsg. der inh. DGL haben die Form $x(t) = -\cos t - 2t e^{-2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

(i) Es gilt: $\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle = 2\langle x'(t), x(t)\rangle$.

Falls also x die DGL $x'(t) = Ax(t)$ löst,

dann ist $\frac{d}{dt}(\|x(t)\|^2) = 2\langle Ax(t), x(t)\rangle$.

- Falls $A = -A^T$ gilt, dann folgt

$\langle Ax(t), x(t)\rangle = \langle x(t), A^T x(t)\rangle = -\langle x(t), Ax(t)\rangle$

$= -\langle Ax(t), x(t)\rangle \Rightarrow \langle Ax(t), x(t)\rangle \equiv 0 \Rightarrow$

$\|x(t)\|$ ist konstant.

- Ist umgekehrt $\|x(t)\|$ konstant für jede Lösung der DGL, dann folgt durch Auswertung in jeder beliebigen Anfangsbedingung $x_0 = v \in \mathbb{R}^4$:

$\langle Av, v\rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^4$.

Hieraus folgt wiederum $A = -A^T$ nach grundlegenden Tatsachen aus der Lin. Algebra

(ii) Suchen allg. Lösung von

$$f''(t) = 2f(t) + 2t f'(t)$$

Wissen: $g(t) = e^{t^2}$ ist eine Lösung

und für die Wronski-Determinante gilt

$$W(t) = C \cdot e^{\int_0^t 2s\,ds} = C \cdot e^{t^2} \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Also folgt

$$\det\begin{pmatrix} g(t) & f(t) \\ g'(t) & f'(t)\end{pmatrix} = e^{t^2} \cdot f'(t) - 2te^{t^2} f(t) = Ce^{t^2}$$

$\Rightarrow f'(t) - 2t f(t) = C$.

Die letztere DGL hat allg. Lsg.

$$\underline{\underline{f(t) = C \cdot \int_0^t e^{-s^2} ds \cdot e^{t^2}}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Berechnung der Letzteren ist über Variation der Konstanten.