Analysis III
Gliederung zur Vorlesung im Wintersemester 2015

Markus Reiß
Humboldt-Universität zu Berlin
mreiss@math.hu-berlin.de

VORLÄUFIGE FASSUNG: 5. Februar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Maß- und Integrationstheorie

1.1 Das Problem der Volumendefinition

1.1 Definition. Forderungen an eine geometrische Volumenfunktionen $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty] = [0, \infty) \cup \{+\infty\}$:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$ (Monotonie)

(b) $B_1, \ldots, B_m$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \mu(\dot\bigcup_{i=1}^m B_i) = \sum_{i=1}^m \mu(B_i)$ (Additivität)

(c) $\mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ für $b_i \geqslant a_i$ (geometrisches Volumen)

(d) $A \subseteq \mathbb{R}^d, x_0 \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \mu(A + x_0) = \mu(A)$ (Translationsinvarianz)

(e) $A_n \uparrow A$ (d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\dot\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A$) $\Rightarrow \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ (σ-Stetigkeit)

1.2 Lemma. *μ ist additiv und σ-stetig genau dann, wenn μ σ-additiv ist, d.h. B_n, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt $\Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu(B_n)$.*

1.3 Satz (Vitali, 1905). *Eine solche geometrische Volumenfunktion existiert nicht.*

1.2 σ-Algebren und Maße

1.4 Definition. Im folgenden sei X stets eine nichtleere (Grund-)Menge. Ein nichtleeres Mengensystem $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt

- Algebra, falls $A, B \in \mathscr{A}$ impliziert $A \cup B, A^\complement \in \mathscr{A}$;
- σ-Algebra, falls $A, A_n \in \mathscr{A}$, $n \geqslant 1$, impliziert $\cup_{n=1}^\infty A_n, A^\complement \in \mathscr{A}$.

Das Tupel $(X, \mathscr{F})$ mit einer σ-Algebra $\mathscr{F}$ auf X heißt messbarer Raum.

1.5 Lemma. *Für Algebren $\mathscr{A}$ gilt:*

(a) $\varnothing, X \in \mathscr{A}$*;*

(b) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$*;*

(c) $A_1, \ldots, A_m \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcap_{i=1}^m A_i \in \mathscr{A}$.

1.6 Lemma. *Für σ-Algebren $\mathscr{F}$ gilt darüberhinaus $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geqslant 1 \Rightarrow \cap_{n=1}^\infty A_n \in \mathscr{F}$. Ist $(\mathscr{F}_i)_{i \in I}$, $I \neq \varnothing$ beliebige Indexmenge, eine Familie von σ-Algebren auf X, so ist auch $\cap_{i \in I} \mathscr{F}_i$ eine σ-Algebra auf X.*

1.7 Beispiele.

(a) $\mathscr{F} = \{\varnothing, X\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$ sind stets σ-Algebren auf X.

(b) Ist X eine unendliche Menge, so ist $\mathscr{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ oder } A^\complement \text{ endlich}\}$ Algebra, aber nicht σ-Algebra.

(c) Ist $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathscr{F}$ σ-Algebra auf X, so ist $f[\mathscr{F}] = \{B \subseteq Y \,|\, f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$ σ-Algebra auf Y. Ist $\mathscr{G}$ σ-Algebra auf Y, so ist $f^{-1}[\mathscr{G}] = \{f^{-1}(B) \,|\, B \in \mathscr{G}\}$ σ-Algebra auf X.

(d) (Verallgemeinerte) Quader $Q = [a_1, b_1) \times \cdots [a_d, b_d)$ im $\mathbb{R}^d$ mit $-\infty \leqslant a_i \leqslant b_i \leqslant \infty$ (lese dabei $[-\infty, b_i) := (-\infty, b_i)$, nur bei Quadern!) führen auf die Algebra der Figuren

$$\mathscr{A}_{Fig} = \Big\{ \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \,\Big|\, m \in \mathbb{N},\, Q_i \subseteq \mathbb{R}^d \text{ verallg. Quader}\Big\}.$$

1.8 Definition.

(a) Ist $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein Mengensystem, so heißt

$$\sigma(\mathscr{E}) = \bigcap \{\mathscr{F} \,|\, \mathscr{F} \ \sigma\text{-Algebra}, \mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}\}$$

die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra.

(b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so heißt $\mathscr{B}_X := \sigma(\{\mathscr{O} \,|\, \mathscr{O} \subseteq X \text{ offen}\})$ Borel-σ-Algebra auf X.

1.9 Lemma. *Es gilt $\mathscr{B}_X = \sigma(\{\mathscr{C} \,|\, \mathscr{C} \subseteq X \text{ abgeschlossen}\})$. $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ wird auch erzeugt von $\mathscr{A}_{Fig}$, $\{Q \subseteq \mathbb{R}^d \,|\, Q \text{ verallgemeinerter Quader}\}$ oder $\{[a_1, \infty) \times \cdots \times [a_d, \infty) \,|\, a_1, \ldots, a_d \in D\}$ für eine dichte Teilmenge D in $\mathbb{R}$.*

1.10 Definition. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ auf einer Algebra $\mathscr{A}$ heißt Inhalt, falls

(a) $\mu(\varnothing) = 0$;

(b) $A, B \in \mathscr{A}, A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$.

μ heißt Prämaß, falls sogar σ-Additivität gilt:

$$A_n \in \mathscr{A},\ n \geqslant 1,\ \text{paarweise disjunkt}, \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \mu\Big(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Ein Prämaß μ auf einer σ-Algebra $\mathscr{F}$ heißt Maß und $(X, \mathscr{F}, \mu)$ Maßraum. Gilt $\mu(X) < \infty$, so heißt μ endliches Maß; gilt $\mu(X) = 1$, so heißt μ Wahrscheinlichkeitsmaß; gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit $A_n \in \mathscr{F}$ und $\mu(A_n) < \infty$, so heißt μ σ-endliches Maß.

1.11 Beispiele.

(a) Das Zählmaß (Kardinalität) $\mu(A) = |A| \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, $A \subseteq X$, ist ein Maß auf $\mathscr{P}(X)$. μ ist endlich, falls X endlich ist, und σ-endlich, falls X abzählbar ist.

(b) Das Diracmaß $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$, $A \subseteq X$, für ein $x \in X$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(X)$.

(c) Für X abzählbar und $p(x) \geqslant 0$ mit $\sum_{x\in X} p(x) = 1$ ist $P(A) = \sum_{x\in A} p(x)$ (d.h. $P = \sum_{x\in X} p(x)\delta_x$) ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(X)$. Im Fall X endlich und $p(x) = 1/|X|$ heißt P gleichmäßige Verteilung auf X. Im Fall $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ heißt P Binomialverteilung mit Versuchsanzahl $n \in \mathbb{N}$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$.

(d) Für $X = \mathbb{R}^d$ betrachte auf $\mathscr{A}_{Fig}$ das geometrische Volumen λ, definiert durch $\lambda([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)) := \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$ sowie $\lambda(\dot\bigcup_{i=1}^m Q_i) = \sum_{i=1}^m \lambda(Q_i)$ für paarweise disjunkte verallgemeinerte Quader Q_i. Dann ist λ wohldefiniert und ein Inhalt auf $\mathscr{A}_{Fig}$.

(e) Auf $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (Menge der 0-1-Folgen) heißen Teilmengen der Form $A = A_n \times X$ mit $A_n \subseteq \{0, 1\}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (alternativ: $A = \pi_n^{-1}(A_n)$ für Projektion π_n auf die ersten n Koordinaten) Zylindermengen. Die Zylindermengen bilden eine Algebra $\mathscr{A}_{Zyl} \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $P(A_n \times X) = |A_n|/2^n$ ist ein Inhalt auf $\mathscr{A}_{Zyl}$ mit $P(X) = 1$.

1.12 Satz. *Das geometrische Volumen bildet ein Prämaß auf* $\mathscr{A}_{Fig}$.

1.3 Der Maßfortsetzungssatz

1.13 Definition. $\alpha : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt äußeres Maß, falls

(a) $\alpha(\varnothing) = 0$;

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \leqslant \alpha(B)$ (monoton);

(c) $A_n \subseteq X, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \alpha(A_n)$ (σ-subadditiv).

1.14 Satz. *Das von einem Inhalt μ auf einer Algebra $\mathscr{A}$ erzeugte äußere Maß*

$$\mu^*(A) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \,\Big|\, A_n \in \mathscr{A},\, A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n \Big\}, \quad A \subseteq X,$$

ist in der Tat ein äußeres Maß.

1.15 Beispiel. Was ist $\lambda^*(\mathbb{Q})$ für das eindimensionale Lebesguemaß λ? Ist $(q_n)_{n\geqslant 1}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$, so gilt $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty [q_n, q_n + \varepsilon 2^{-n})$ und somit $\lambda^*(\mathbb{Q}) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$. Mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\lambda^*(\mathbb{Q}) = 0$.

1.16 Definition. Für ein äußeres Maß α heißt eine Menge $A \subseteq X$ α-messbar, falls gilt

$$\forall S \subseteq X : \alpha(S) = \alpha(S \cap A) + \alpha(S \cap A^{\complement}).$$

Die Familie der α-messbaren Mengen wird mit $\mathscr{F}_\alpha$ bezeichnet.

1.17 Satz. *$\mathscr{F}_\alpha$ ist eine σ-Algebra auf X und die Einschränkung $\alpha|_{\mathscr{F}_\alpha}$ ein Maß auf $\mathscr{F}_\alpha$.*

1.18 Satz (Fortsetzungssatz von Caratheodory, 1914)**.** *Ist μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathscr{A}$, so ist jedes $A \in \mathscr{A}$ μ^*-messbar, und es gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$. μ^* setzt also μ zu einem Maß auf $\mathscr{F}_{\mu^*}$ oder auch auf $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{F}_{\mu^*}$ fort.*

1.19 Satz (Eindeutigkeitssatz). *Ist $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger der σ-Algebra $\mathscr{F}$ (d.h. $\sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{F}$ und $A, B \in \mathscr{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{E}$) und sind μ, ν endliche Maße, die auf $\mathscr{E} \cup \{X\}$ übereinstimmen, so gilt $\mu = \nu$ auf ganz $\mathscr{F}$.*

1.20 Korollar. *Sind μ, ν σ-endliche Maße, die auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathscr{E}$ der σ-Algebra $\mathscr{F}$ übereinstimmen, und gibt es $E_n \in \mathscr{E}$ mit $E_n \uparrow X$ und $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$, $n \geqslant 1$, so gilt $\mu = \nu$ auf ganz $\mathscr{F}$.*

1.21 Korollar. *Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathscr{A}$, so ist $\mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})}$ die eindeutige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathscr{A})$.*

1.22 Lemma. *In einem Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ sei $\bar{\mathscr{F}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\}$ mit $\mathscr{N} := \{N \subseteq X \mid \exists A \in \mathscr{F} : N \subseteq A,\ \mu(A) = 0\}$ und $\bar{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$, $A \in \mathscr{F}$. Dann ist $(X, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ ebenfalls Maßraum.*

1.23 Definition. Man nennt $(X, \bar{\mathscr{F}}, \bar{\mu})$ die Vervollständigung von $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und im Fall $\bar{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ heißt $(X, \mathscr{F}, \mu)$ vollständig.

1.24 Satz. *Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathscr{A}$ über X, so ist $(X, \mathscr{F}_{\mu^*}, \mu^*)$ Vervollständigung von $(X, \sigma(\mathscr{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathscr{A})})$. [zum Teil in der Übung bewiesen]*

1.4 Das Lebesgue- und Lebesgue-Stieltjes-Maß

1.25 Definition. Das Lebesguemaß λ im $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch die Fortsetzung des geometrischen Volumens von Figuren $A \in \mathscr{A}_{Fig}$ auf die Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d} = \sigma(\mathscr{A}_{Fig})$ oder auf die σ-Algebra $\mathscr{F}_{\lambda^*}$ der Lebesguemengen.

1.26 Satz. *Das Lebesguemaß ist translationsinvariant:*

$$\forall A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d},\ x \in \mathbb{R}^d :\ \lambda(A + x) = \lambda(A).$$

Jedes translationsinvariante Maß μ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ mit $c := \mu([0,1)^d) < \infty$ erfüllt $\mu(A) = c\lambda(A)$, $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$.

1.27 Korollar. *Ist $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear und bijektiv, so gilt $\lambda(T(A)) = |\det(T)|\lambda(A)$ für alle Borelmengen A.*

1.28 Beispiel. Eine Ellipse $E_{a,b}$ mit Hauptachsen $a, b > 0$ ergibt sich als Bild des Einheitskreises K unter der Abbildung $T(x, y) = (ax, by)$. Es folgt für den Flächeninhalt $\lambda(E_{a,b}) = |\det(T)|\lambda(K) = ab\pi$.

1.29 Definition. Ein Maß μ auf einer Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}_X$ heißt regulär, falls für alle $A \in \mathscr{B}_X$ gilt

(a) $\mu(A) = \inf\{\mu(\mathscr{O}) \mid \mathscr{O} \supseteq A \text{ offen}\}$;

(b) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt}\}$.

1.30 Satz. *Das Lebesguemaß ist regulär.*

1.31 Definition. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ definiert $F(x) := P((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, seine Verteilungsfunktion.

1.32 Lemma. *(Eigenschaften der Verteilungsfunktion F)*

(a) *F ist monoton wachsend;*

(b) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$*;*

(c) *F ist rechtsstetig (d.h., $x_n \downarrow x \Rightarrow F(x_n) \to F(x)$);*

(d) *P ist durch F eindeutig bestimmt.*

1.33 Satz. *Zu jeder Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit Eigenschaften (a)-(c) einer Verteilungsfunktion gibt es genau ein Maß P_F auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ mit der Eigenschaft, dass F Verteilungsfunktion von P_F ist.*

1.34 Definition. P_F heißt von F induziertes Lebesgue-Stieltjes-Maß.

1.35 Korollar. *Ist $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ (uneigentlich) Riemann-integrierbar mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (ist f also Wahrscheinlichkeitsdichte), so gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_f auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ mit $P_f([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es gilt $P_f(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

1.36 Beispiele.

(a) Das Diracmaß δ_{x_0} besitzt die Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbf{1}_{[x_0,\infty)}(x)$.

(b) Die Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(x) = 0$ für $x \leqslant 0$, $F(x) = x$ für $x \in [0,1]$ und $F(x) = 1$ für $x \geqslant 1$ ist die Verteilungsfunktion des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_F mit $P_F(A) = \lambda(A \cap [0,1])$, $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. P_F heißt gleichmäßige Verteilung auf $[0,1]$.

(c) Die Funktion $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte und erzeugt P_f mit $P_f([a,b]) = e^{-a} - e^{-b}$ für $b \geqslant a \geqslant 0$ und $P_f((-\infty,0)) = 0$. P_f heißt Exponentialverteilung.

1.5 Messbare und einfache Funktionen

1.37 Definition. Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen Messräumen $(X, \mathscr{F})$ und $(Y, \mathscr{G})$ heißt messbar, falls $\forall B \in \mathscr{G} :\ f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ gilt.

1.38 Lemma. *(Eigenschaften messbarer Funktionen)*

(a) *f ist bereits messbar, falls $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$ für alle B aus einem Erzeuger $\mathscr{E}$ von $\mathscr{G}$ gilt.*

(b) *Sind $(X_i, \mathscr{F}_i)$, $i = 1, 2, 3$, Messräume und $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_3$ messbar, so ist auch $g \circ f : X_1 \to X_3$ messbar.*

(c) *$f : X \to \mathbb{R}^d$ ist Borel-messbar genau dann, wenn die Koordinatenabbildungen $f_1, \ldots, f_d : X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar sind.*

(d) *Stetige Abbildungen sind stets Borel-Borel-messbar.*

(e) *Sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ Borel-messbar, so auch $f+g$, $f-g$, $f \bullet g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = \max(-f,0)$, $|f|$, αf für $\alpha \in \mathbb{R}$, f/g (sofern $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$).*

1.39 Definition. Setze $a + \infty := \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a - \infty := -\infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a \bullet \infty := \infty$ für $a \in (0, \infty]$ etc. (wie erwartet). Zusätzlich setze $0 \bullet \infty := 0$, $\infty - \infty$ bleibt aber undefiniert.

Betrachte die erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit σ-Algebra $\mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \{A \cup B \,|\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},\, B \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$ (das ist die Borel-σ-Algebra der Zweipunktkompaktifizierung $\bar{\mathbb{R}}$ von $\mathbb{R}$).

1.40 Lemma. *Sind $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $n \geqslant 1$, messbar, so auch $\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n$. Existiert $\lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise, so ist auch $\lim_n f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar.*

1.41 Definition. Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, falls f nur endlich viele Werte annimmt, d.h. $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathscr{F}$ geeignet.

1.42 Satz. *Es sei $(X, \mathscr{F})$ ein messbarer Raum. Dann gilt:*

(a) *Zu jeder messbaren nicht-negativen Funktion $f : X \to [0, \infty]$ existiert eine Folge einfacher Funktionen $\varphi_n : X \to [0, \infty)$ mit $\varphi_n \uparrow f$ (d.h. $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$ für $n \to \infty$ und alle $x \in X$).*

(b) *Jede messbare Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist punktweiser Grenzwert einfacher Funktionen.*

1.6 Das Lebesgue-Integral

1.43 Definition. Für eine einfache Funktion $f : X \to [0, \infty)$, d.h. f der Form $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{f^{-1}(\{\alpha_i\})}$ mit $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 > \cdots \alpha_m > 0$, setze

$$\int f d\mu := \int f(x)\, \mu(dx) := \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(f^{-1}(\{\alpha_i\})).$$

1.44 Lemma. *Für einfache Funktionen $f, g : X \to [0, \infty)$ und $a, b \geqslant 0$ gilt:*

(a) *$af + bg$ ist einfach mit $\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu$;*

(b) *für $f \leqslant g$ ist $\int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$.*

1.45 Definition. Für eine nicht-negative, messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ setze

$$\int f\, d\mu := \sup\Big\{ \int \varphi\, d\mu \,\Big|\, \varphi : X \to [0, \infty) \text{ einfach}, \varphi \leqslant f \Big\} \in [0, +\infty].$$

$\int f\, d\mu$ heißt das Lebesgue-Integral von f bezüglich μ, äquivalente Bezeichnungen sind $\int_X f\, d\mu$, $\int f(x)\, \mu(dx)$, $\int f(x)\, d\mu(x)$, etc. Für $A \in \mathscr{F}$ setze ferner

$$\int_A f\, d\mu := \int (f \mathbf{1}_A)\, d\mu.$$

1.46 Lemma. *Für $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar gilt:*

(a) $f \leqslant g \Rightarrow \int f\,d\mu \leqslant \int g\,d\mu$*;*

(b) $\int f\,d\mu = 0 \iff \mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = 0$*, d.h.* $f = 0$ *μ-fast überall (μ-f.ü.) bzw.* $f(x) = 0$ *für μ-fast alle (μ-f.a.)* $x \in X$*.*

1.47 Satz (Satz von Beppo Levi, Satz von der monotonen Konvergenz, 1906)**.** *Es seien (f_n) eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to [0, \infty]$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0, \infty]$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu.$$

1.48 Korollar. *Zu jeder nicht-negativen messbaren Funktion $f : X \to [0, \infty]$ existiert eine Folge einfacher Funktionen φ_n mit $\varphi_n \uparrow f$, und für jede solche Folge gilt $\int \varphi_n\,d\mu \uparrow \int f\,d\mu$.*

1.49 Beispiele.

(a) Für das Diracmaß δ_{x_0}, $x_0 \in X$, und $f : X \to [0, \infty]$ messbar gilt $\int f\,d\delta_{x_0} = f(x_0)$.

(b) Für $X = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$, das Zählmaß μ und jede Funktion $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ (jede Funktion ist $\mathscr{F}$-messbar!) gilt $\int f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. Damit umfasst die allgemeine Integrationstheorie auch die Theorie der Reihen und liefert dort nicht-triviale Resultate (betrachte z.B. den Satz von Beppo Levi).

1.50 Korollar. *Ist $f : X \to [0, \infty]$ messbar, so definiert $\nu(A) := \int_A f\,d\mu$, $A \in \mathscr{F}$, ein Maß auf $\mathscr{F}$, das absolut-stetig bezüglich μ ist, d.h. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ erfüllt. Es gilt $\int g\,d\nu = \int gf\,d\mu$ für jede messbare Funktion $g : X \to [0, \infty]$.*

1.51 Definition. Ist ν absolut-stetig bezüglich μ, so schreiben wir $\nu \ll \mu$. Die Funktion f im Korollar heißt Dichte von ν bezüglich μ. Gilt sowohl $\nu \ll \mu$ als auch $\mu \ll \nu$, so heißen die Maße μ und ν äquivalent, Notation $\mu \sim \nu$.

1.52 Satz (Satz von Radon-Nikodym, 1930)**.** *Sind μ, ν Maße auf $(X, \mathscr{F})$, so dass $\nu \ll \mu$ gilt und μ σ-endlich ist, so existiert eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ mit $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$, $A \in \mathscr{F}$. f ist μ-f.ü. eindeutig bestimmt, und man schreibt auch $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. [vgl. Satz VII.2.3 in Elstrodt oder Stochastik II]*

1.53 Satz (Lemma von Fatou)**.** *Für $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar, $n \geqslant 1$, gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

1.54 Beispiel. Für $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ mit $f_n = n\mathbf{1}_{(0,1/n]}$ gilt $\liminf_{n\to\infty} f_n = 0$, aber $\int f_n\,d\mu = 1$ für alle $n \geqslant 1$. Im Grenzwert kann also Masse für das Integral verloren gehen. Beachte, dass f_n keine monoton wachsende Funktionenfolge ist.

1.55 Definition. Eine messbare Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-integrierbar, falls $\int f^+ d\mu < \infty$ und $\int f^- d\mu < \infty$. In diesem Fall setze

$$\int f\, d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \in \mathbb{R}\,.$$

Die Menge der μ-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathscr{L}^1(\mu) = \mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ bezeichnet. Wiederum wird $\int_A f\, d\mu := \int f \mathbf{1}_A\, d\mu$ für $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $A \in \mathscr{F}$ definiert.

1.56 Beispiel. Es sei $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung zwischen dem Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und dem Messraum $(Y, \mathscr{G})$ sowie $\mu^T(A) := \mu(T^{-1}(A))$ das Bildmaß von μ unter T. Dann gilt $\int_Y f(y)\mu^T(dy) = \int_X f(T(x))\, \mu(dx)$ für alle $f : Y \to [0, \infty]$ messbar und alle $f : Y \to \mathbb{R}$ messbar mit $f \circ T \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

1.57 Lemma. *Für $f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) $af + bg \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *und* $\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu$ *(linear);*

(b) $f \leqslant g \Rightarrow \int f\, d\mu \leqslant \int g\, d\mu$ *(monoton);*

(c) $|\int f\, d\mu| \leqslant \int |f|\, d\mu$ *(verallgemeinerte Dreiecksungleichung);*

(d) $A \in \mathscr{F}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f\, d\mu = 0$.

1.58 Satz (Satz von Lebesgue, Satz von der majorisierten/dominierten Konvergenz, 1910). *Es seien $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und es gelte $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für μ-fast alle $x \in X$. Existiert $F \in \mathscr{L}^1(\mu)$ mit $|f_n| \leqslant F$ für alle $n \geqslant 1$, so gilt:*

(a) $f_n, f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $n \geqslant 1$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f\, d\mu$.

1.59 Beispiel. Die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \lambda(dx)$ besitzt an jeder Stelle $z_0 > 0$ eine im Intervall $(0, 2z_0)$ gültige Potenzreihenentwicklung $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ mit $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^{z_0 - 1} e^{-x} (\log x)^n dx$. Insbesondere ist $\Gamma \in C^\infty((0, \infty))$ reell-analytisch.

1.60 Korollar. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, $(X, \mathscr{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : U \times X \to \mathbb{R}$ besitze folgende Eigenschaften:*

(a) $\forall u \in U : \; f(u, \bullet) \in \mathscr{L}^1(\mu)$;

(b) $\forall x \in X : \; f(\bullet, x) \in C^1(U)$;

(c) Es gibt $F \in \mathscr{L}^1(\mu)$, so dass $|\frac{\partial}{\partial u} f(u, x)| \leqslant F(x)$ für alle $u \in U, x \in X$ gilt.

Dann ist $u \mapsto \int f(u, x)\, \mu(dx)$ stetig differenzierbar auf U mit

$$\frac{\partial}{\partial u} \int f(u, x)\, \mu(dx) = \int \frac{\partial}{\partial u} f(u, x)\, \mu(dx), \quad u \in U.$$

1.7 Produktmaße und der Satz von Fubini

1.61 Definition. Für Messräume $(X_1, \mathscr{F}_1)$ und $(X_2, \mathscr{F}_2)$ definiert

$$\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2 = \sigma(\{A \times B \,|\, A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2\})$$

die Produkt-σ-Algebra auf $X_1 \times X_2$.

1.62 Lemma. *Für Messräume $(X_i, \mathscr{F}_i)$, $i = 0, 1, 2$, gilt:*

(a) $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ *ist die kleinste σ-Algebra, so dass die Koordinatenprojektionen $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$, messbar sind.*

(b) $f : X_0 \to X_1 \times X_2$ *ist genau dann $(\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$-messbar, wenn $\pi_i \circ f$, $i = 1, 2$, messbar sind.*

1.63 Beispiele.

(a) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^k} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^l} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{k+l}}$.

(b) Für Lebesguemengen ist die analoge Aussage zu (a) falsch.

(c) $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

1.64 Definition. Für $A \subseteq X_1 \times X_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ definiere die Schnitte

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 \,|\, (x_1, x_2) \in A\}, \quad A^{x_2} = \{x_1 \in X_1 \,|\, (x_1, x_2) \in A\}.$$

1.65 Lemma. *Für Messräume $(X_1, \mathscr{F}_1)$ und $(X_2, \mathscr{F}_2)$ gilt:*

(a) $\forall A \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2 :$ $A_{x_1} \in \mathscr{F}_2$, $A^{x_2} \in \mathscr{F}_1$;

(b) Ist $f : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ $(\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mathscr{B}_{\bar{\mathbb{R}}})$-messbar, so ist $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ für alle $x_2 \in X_2$ messbar und $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ für alle $x_1 \in X_1$.

1.66 Lemma. *Sind $(X_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $A \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, so sind $x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1})$ und $x_2 \mapsto \mu_1(A^{x_2})$ messbar.*

1.67 Satz. *Sind $(X_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, so gibt es genau ein Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ mit*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \text{ für } A \in \mathscr{F}_1,\ B \in \mathscr{F}_2.$$

Es gilt für alle $A \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, \mu_1(dx_1) = \int_{X_2} \mu_1(A^{x_2})\, \mu_2(dx_2).$$

1.68 Definition. Das Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ heißt Produktmaß von μ_1 und μ_2.

1.69 Beispiele.

(a) Für das Lebesguemaß λ_d auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ gilt $\lambda_k \otimes \lambda_l = \lambda_{k+l}$.

(b) Ist $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar (X_1, X_2 heißen dann *Zufallsvariablen*), so heißen X_1, X_2 unabhängig, falls

$$\begin{aligned} &P(\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) \in A, X_2(\omega) \in B\}) \\ &\quad = P(\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) \in A\})P(\{\omega \in \Omega \,|\, X_2(\omega) \in B\}), \quad A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

gilt. Mit $(X_1, X_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ heißt das für die entsprechenden Bildmaße gerade $P^{(X_1,X_2)} = P^{X_1} \otimes P^{X_2}$ auf $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$.

1.70 Satz (Tonelli)**.** *für σ-endliche Maßräume $(X_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ und messbare Funktionen $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ gilt:*

(a) $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)$, $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$ *sind messbar.*

(b) (Formel der iterierten Integrale)

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \, \mu_2(dx_2) \Big) \, \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \, \mu_1(dx_1) \Big) \, \mu_2(dx_2). \end{aligned}$$

1.71 Satz (Fubini, 1907)**.** *für σ-endliche Maßräume $(X_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ und $f \in \mathscr{L}^1(X_1 \times X_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ gilt:*

(a) $x_1 \mapsto f(x_1, x_2) \in \mathscr{L}^1(\mu_1)$ *für μ_2-fast alle x_2,* $x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \in \mathscr{L}^1(\mu_2)$ *für μ_1-fast alle x_1.*

(b) $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \in \mathscr{L}^1(\mu_1)$, $x_2 \mapsto \int_{X_1} f(x_1, x_2)\mu_1(dx_1) \in \mathscr{L}^1(\mu_2)$ *und*

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \, \mu_2(dx_2) \Big) \, \mu_1(dx_1) \\ &= \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f(x_1, x_2) \, \mu_1(dx_1) \Big) \, \mu_2(dx_2). \end{aligned}$$

1.72 Korollar. *Ist $f : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und ist das iterierte Integral $\int_{X_1} (\int_{X_2} |f(x_1, x_2)| \, \mu_2(dx_2)) \, \mu_1(dx_1)$ endlich, so gilt $f \in \mathscr{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ und*

$$\int_{X_1 \times X_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x_1, x_2) \, \mu_2(dx_2) \Big) \, \mu_1(dx_1).$$

1.73 Beispiele.

(a) Es gilt $\lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R \int_0^\infty \sin x e^{-ux} du \, dx = \frac{\pi}{2}$.

(b) Für unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 mit $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^1(P)$ gilt $\mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1] \, \mathbb{E}[X_2]$.

(c) Es gilt $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = \frac{\pi}{4}$, aber $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = -\frac{\pi}{4}$.

(d) Für $X_1 = X_2 = [0, 1]$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{B}_{[0,1]}$, $\mu_1 = \mu$ das Zählmaß und $\mu_2 = \lambda$ das Lebesguemaß sowie die Diagonale $\Delta = \{(x, x) \,|\, x \in [0, 1]\}$ gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_\Delta(x, y) \lambda(dy) \mu(dx) = 0, \text{ aber } \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_\Delta(x, y) \mu(dx) \lambda(dy) = 1.$$

1.8 Die Transformationsformel

1.74 Definition. Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und eine C^1-Funktion $g : X \to Y$ definiere die Ableitungs- oder Jacobimatrix

$$Dg(x) = (\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\ldots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

g heißt C^1-Diffeomorphismus, falls g bijektiv und $Dg(x)$ invertierbar (d.h. $\det(Dg(x)) \neq 0$) für alle $x \in X$ ist.

1.75 Satz (Transformationsformel, Jacobi 1841). *Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $g : X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt:*

(a) $\forall A \in \mathscr{B}_X : \ \lambda(g(A)) = \int_A |\det(Dg(x))| \, \lambda(dx)$.

(b) Für alle messbaren Funktionen $f : Y \to [0, \infty]$

$$\int_Y f(y)\lambda(dy) = \int_X f(g(x))|\det(Dg(x))| \, \lambda(dx).$$

(c) Für alle $f \in \mathscr{L}^1(Y) := \mathscr{L}^1(Y, \mathscr{B}_Y, \lambda|_Y)$ ist $(f \circ g)|\det Dg| \in \mathscr{L}^1(X)$ und

$$\int_Y f(y)\lambda(dy) = \int_X f(g(x))|\det(Dg(x))| \, \lambda(dx).$$

1.76 Beispiele.

(a) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: $g(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^\top$ definiert einen C^1-Diffeomorphismus $g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)^\top \mid x \geqslant 0\}$ mit Jacobi-Determinante $|\det Dg(r, \varphi)| = r$. Es folgt für $f \geqslant 0$ messbar

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \, rdr \, d\varphi.$$

Damit zeigt man $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1$.

(b) Polarkoordinaten und Kugelvolumen in $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$: Setze rekursiv $g_2 = g$ und $g_d(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}) = (g_{d-1}(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-2}) \cos\varphi_{d-1}, r\sin\varphi_{d-1})^\top$ für $r > 0$, $\varphi_1 \in (-\pi, \pi)$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{d-1} \in (-\pi/2, \pi/2)$, so dass die Jacobi-Determinante

$$|\det(Dg_d(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}))| = r^{d-1} \cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \cdots \cos^{d-2}\varphi_{d-1}$$

ist. Damit berechnet man das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel als $\pi^{d/2}/(d/2)!$ für d gerade und $2^{d+1}\pi^{(d-1)/2}/(1 \bullet 3 \cdots d)$ für d ungerade.

1.77 Definition. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $g : X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, so bezeichnet $C = \{x \in X \mid \det(Dg(x)) = 0\}$ die Menge der kritischen Punkte sowie $g(C)$ die Menge der kritischen Werte von g.

1.78 Satz (Sard, 1942)**.** *Die Menge der kritischen Werte $g(C)$ einer Funktion $g \in C^1(X)$ ist eine Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^d$.*

1.79 Korollar. *Für jede stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ mit $k < \ell$ ist $g(\mathbb{R}^k)$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^\ell$. Insbesondere sind $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^\ell$ nicht diffeomorph.*

1.80 Satz (Allgemeine Transformationsformel)**.** *Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $g : X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar und $Y = g(X)$. Ist C die Menge der kritischen Punkte von g und $N(y)$ die Anzahl der $x \in X \backslash C$ mit $g(x) = y$, so ist $N : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und für alle messbaren $f : Y \to [0, \infty]$ gilt*

$$\int_Y N(y) f(y)\, dy = \int_X f(g(x)) |\det(Dg(x))|\, dx.$$

1.9 $\mathscr{L}^p$- und L^p-Räume

1.81 Definition. Für einen Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ bezeichnet

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \Big\{ f : X \to \bar{\mathbb{R}} \,\Big|\, f \text{ messbar}, \int |f|^p d\mu < \infty \Big\}$$

den Vektorraum(!) der p-fach integrierbaren Funktionen sowie

$$\|f\|_{L^p} := \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

Für $X \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ und das Lebesguemaß $\lambda|_X$ auf X schreibe $\mathscr{L}^p(X)$ statt $\mathscr{L}^p(\lambda|_X)$. Für das Zählmaß μ für eine beliebige Grundmenge X setze $\ell^p(X) := L^p(\mu)$, insbesondere $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$.

1.82 Satz (Hölder-Ungleichung, 1889)**.** *Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ sowie $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$ gilt $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$ und $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.*

1.83 Satz. *$\|\bullet\|_{L^p}$ definiert eine Semi-Norm auf $\mathscr{L}^p(\mu)$ [alle Axiome außer Positivdefinitheit einer Norm sind erfüllt].*

1.84 Definition. Mit $L^p(\mu)$ bezeichnet man den Quotientenraum $\mathscr{L}^p(\mu)/\{f \in \mathscr{L}^p(\mu) \,|\, f = 0 \; \mu\text{-f.ü.}\}$.

1.85 Satz (Riesz-Fischer, 1907)**.** *$L^p(\mu)$ ist ein vollständiger normierter Raum, d.h. ein Banachraum.*

1.86 Satz. *Ist (f_n) eine konvergente Folge in $L^p(\mu)$, so existiert eine Teilfolge (f_{n_k}), die μ-f.ü. konvergiert.*

1.87 Beispiel. Betrachte $f_{k,l} = \mathbf{1}_{[l2^{-k},(l+1)2^{-k}]}$ und für $n = 2^k + l$ mit $l = 0, \cdots, 2^k - 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, setze $g_n = f_{k,l}$. Dann gilt $g_n \to 0$ in $L^p([0,1])$, aber $(g_n(x))_{n \geqslant 1}$ konvergiert für kein $x \in [0,1]$.

1.88 Definition. Für $f, g \in L^2(\mu)$ setze $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int fg \, d\mu$.

1.89 Satz. *$\langle \bullet, \bullet \rangle_{L^2}$ ist Skalarprodukt für den $L^2(\mu)$ und folglich $L^2(\mu)$ ein Hilbertraum.*

1.90 Beispiel. Die Funktionen $\{\cos(kx) \,|\, k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(kx) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ sind paarweise orthogonal in $L^2([-\pi, \pi])$.

1.10 Orthonormalbasen und Fourierreihen

1.91 Definition. Vektoren (e_n) in einem Hilbertraum H bilden ein Orthonormalsystem (ONS), falls $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{m,n}$ für alle m, n gilt. Ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Orthonormalbasis (ONB), falls die lineare Hülle $\operatorname{span}\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in H liegt.

1.92 Beispiel. In ℓ^2 bildet $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ ('1' an n-ter Stelle), $n \in \mathbb{N}$, eine ONB.

1.93 Satz.

(a) *Für jedes ONS (e_n) gilt die Besselsche Ungleichung:*

$$\forall v \in H : \sum_n \langle v, e_n\rangle^2 \leqslant \|v\|^2.$$

(b) *Für jede ONB $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt*

$$\forall v \in H : P_N v := \sum_{n=1}^{N} \langle v, e_n\rangle e_n \to v \text{ für } N \to \infty$$

und die Parsevalsche Gleichung $\sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n\rangle^2 = \|v\|^2$.

1.94 Lemma. *Das trigonometrische System*

$$\mathscr{T} := \Big\{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}}\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx) \,\Big|\, k \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx) \,\Big|\, k \in \mathbb{N}\Big\}$$

bildet ein ONS in $L^2([-\pi, \pi])$.

1.95 Definition. Zu $f \in L^2([-\pi, \pi])$ betrachte die Partialsummen

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

der *abstrakten* Fourierreihe s_∞.

1.96 Lemma. *Für den Dirichletkern $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$, $x \in \mathbb{R}$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch mit $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^2([-\pi, \pi])$ gilt*

(a) $D_n(-x) = D_n(x)$, $D_n(x + 2\pi) = D_n(x)$, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \pi$.

(b) $D_n(x) = \frac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}$ *für* $x \neq 2k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} D_n(t)\,dt$.

1.97 Definition. Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stückweise differenzierbar, wenn es $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = \pi$ und differenzierbare Funktionen $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ gibt mit $f|_{(x_{k-1},x_k)} = f_k|_{(x_{k-1},x_k)}$ für $k = 1, \ldots, m$. Wir schreiben $f(x+) = \lim_{y\downarrow x} f(y)$, $f(x-) = \lim_{y\uparrow x} f(y)$.

1.98 Satz. *Ist f 2π-periodisch und stückweise differenzierbar, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

1.99 Definition. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ heißt <u>Césaro-konvergent</u> gegen $a \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)/(n+1) = a$ gilt.

1.100 Lemma. *Es gilt für den <u>Féjerkern</u>*

$$F_n(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_n(x)}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}:$$

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = \pi$;

(b) $F_n(x) = \frac{\sin^2((n+1)x/2)}{2(n+1)\sin^2(x/2)}$ *für* $x \neq 2k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$;

(c) $F_n(x) \leqslant \frac{1}{2(n+1)\sin^2(\delta/2)}$ *für* $0 < \delta \leqslant |x| \leqslant \pi$.

1.101 Satz. *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig, so konvergiert $\sigma_n(x) = \frac{s_0(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig in $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$. $(s_n(x))$ ist also Césaro-konvergent gegen $f(x)$ (sogar bezüglich $\|\bullet\|_\infty$).*

1.102 Korollar. *Bezeichnet $(C_{per}([-\pi,\pi]), \|\bullet\|_\infty)$ den Raum der stetigen Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$ und der Maximumsnorm $\|\bullet\|_\infty$, so liegen die trigonometrischen Polynome $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, $n \geqslant 0$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, dicht in $(C_{per}([-\pi,\pi]), \|\bullet\|_\infty)$.*

1.103 Satz. *Das trigonometrische System $\mathscr{T}$ bildet eine ONB in $L^2([-\pi,\pi])$.*

2 Integration auf Mannigfaltigkeiten

2.1 Untermannigfaltigkeiten

2.1 Definition. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>k-dimensionale Untermannigfaltigkeit</u> des $\mathbb{R}^n$, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ gibt mit

(a) $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$;

(b) $\mathrm{Rang}(Df(p)) = n - k$, wobei

$$Df = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-k})}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ist $k = n - 1$, so nennt man M auch <u>Hyperfläche</u>.

2.2 Beispiel. Die Einheitssphäre $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ ist $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ vermöge $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 - 1$.

2.3 Satz (lokale Darstellung als Graph)**.** *Es sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $p = (p_1, \dots, p_n) \in M$. Dann gibt es nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^k$ von $p' = (p_1, \dots, p_k)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ von $p'' = (p_{k+1}, \dots, p_n)$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to U''$, so dass $M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' \mid x'' = g(x')\}$ gilt.*

2.4 Beispiel. Für $M = S_{n-1}$, $p = (0, \dots, 0, 1)$ (*Nordpol*) liefert $U' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \|x'\| < 1\}$, $U'' = (0, \infty)$, $g(x') = \sqrt{1 - \|x'\|^2}$ eine solche Darstellung.

2.5 Satz (lokale Darstellung als Unterraum)**.** *Es sei $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ die k-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann k-dimensionale Unermannigfaltigkeit, falls es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie einen C^1-Diffeomorphismus $F : U \to F(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $F(M \cap U) = E_k \cap F(U)$.*

2.6 Definition. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ mit $k \leqslant n$ stetig differenzierbar. Dann heißt φ <u>Immersion</u>, falls $\mathrm{Rang}(D\varphi(t)) = k$ gilt für alle $t \in T$.

2.7 Beispiel. Mit $T = (0, \pi) \times \mathbb{R}$, $\varphi(t_1, t_2) = (\cos t_2 \sin t_1, \sin t_2 \sin t_1, \cos t_1)^\top$ ist φ eine Immersion und $\varphi(T) = S_2 \setminus \{(0,0,1)^\top, (0,0,-1)^\top\}$, aber φ ist nicht injektiv.

Auch injektive Immersionen φ brauchen als Bild $\varphi(T)$ keine Untermannigfaltigkeit zu haben.

2.8 Satz (lokale Paramaterdarstellung, Karte)**.** *$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem $p \in M$ eine bezüglich M offene Umgebung $V \subseteq M$, eine offene Menge $T \subseteq \mathbb{R}^k$ sowie eine Immersion $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ gibt, die T homöomorph auf V abbildet.*

2.9 Definition. Die Abbildung $\varphi : T \to V$ im Satz heißt <u>Karte</u> oder <u>lokale Parameterdarstellung</u> von M. Eine Familie von Karten $\varphi_j : T_j \to V_j \subseteq M$, $j \in J$, heißt <u>Atlas</u> von M, falls $\bigcup_{j \in J} V_j = M$ gilt.

2.10 Beispiel. Jede kompakte Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt einen endlichen Atlas, das heißt einen Atlas mit $|J| < \infty$.

2.11 Satz (Kartenwechsel)**.** *Es seien $\varphi_1 : T_1 \to V_1 \subseteq M$, $\varphi_2 : T_2 \to V_2 \subseteq M$ zwei Karten einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Dann sind $\varphi_1^{-1}(V) \subseteq T_1$, $\varphi_2^{-1}(V) \subseteq T_2$ jeweils offen und der Kartenwechsel $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V) \to \varphi_2^{-1}(V)$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.*

2.2 Tangential- und Normalenraum

2.12 Definition. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so heißt $v \in \mathbb{R}^n$ Tangentialvektor an M im Punkt p, falls es $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$.

Die Menge der Tangentialvektoren an M in p wird Tangentialraum T_pM genannt.

2.13 Satz. *Für eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M und $p \in M$ gilt:*

(a) *T_pM ist k-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.*

(b) *Ist $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^k \to U \subseteq M$ Karte von M mit $p \in U$, so gilt*

$$T_pM = \operatorname{span}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(p)), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(\varphi^{-1}(p))\Big).$$

(c) *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von p und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit Rang$(Df(p)) = n-k$, $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$, so gilt $T_pM = \ker(Df(p))$.*

2.14 Beispiele.

(a) Ist $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$ sowie $\gamma : [0,1] \to M := \gamma([0,1])$ ein Homöomorphismus, so ist M eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für $p = \gamma(t)$, $t \in [0,1]$, gilt $T_pM = \{\alpha\dot{\gamma}(t) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ nach (b).

(b) Identifiziert man die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{n^2}$, so bildet die Menge $\mathscr{O}(n)$ der orthogonalen $n\times n$-Matrizen eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit; denn es gilt $\mathscr{O}(n) = f^{-1}(\{0\})$ mit $f(A) = A^\top A - E_n$. Für $A \in \mathscr{O}(n)$ gilt $T_A\mathscr{O}(n) = \{H \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid H^\top A + A^\top H = 0\}$. Im Fall $A = E_n$ ergeben sich gerade die anti-symmetrischen Matrizen als Tangentialraum.

2.15 Definition. Der Normalenraum an M in $p \in M$ ist gegeben durch

$$N_pM = T_pM^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in T_pM : \langle v, w\rangle = 0\}.$$

$w \in N_pM$ heißt Normalenvektor an M in p.

2.16 Korollar. *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ sowie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von p und $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ stetig differenzierbar mit Rang$(Df(p)) = n-k$, $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$. Dann bilden die Gradienten $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)$ eine Basis von N_pM.*

2.17 Beispiel. Es sei $\gamma : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^\top$ und $M = \gamma((0,2\pi)) = S_2 \setminus \{(1,0)^\top\}$. Für $p = \gamma(t)$, $t \in (0, 2\pi)$, gilt dann $T_pM = \{\alpha(-\sin t, \cos t)^\top \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, $N_pM = \{\alpha(\cos t, \sin t)^\top \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}(p)$.

2.3 Oberflächenintegrale

2.18 Definition. Es sei $\varphi : T \to V \subseteq M$ eine Karte für eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ihr Maßtensor (oder metrischer Tensor, lokale Gram-Matrix) ist die Abbildung

$$G : T \to \mathbb{R}^{k\times k}, \quad G(t) = (D\varphi(t))^\top D\varphi(t).$$

$g(t) := \det(G(t))$ heißt Gramsche Determinante.

2.19 Definition. Es sei $\varphi : T \to V \subseteq M$ eine Karte für eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ derart, dass $f|_{M\setminus V} = 0$, so heißt f (bzgl. φ) integrierbar, wenn die Funktion $t \mapsto f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}$ in $L^1(T)$ liegt. Wir setzen

$$\int_M f(x)\, dS(x) := \int_M f(x)\, S(dx) := \int_T f(\varphi(t))\sqrt{g(t)}\, dt.$$

Man nennt $dS(x)$ bzw. $S(dx)$ infinitesimales Oberflächenelement (S kann als Maß auf den Borelmengen von V aufgefasst werden).

2.20 Lemma. *Für die Gramsche Determinante gilt:*

(a) $\forall x \in V : \; g(x) > 0$*;*

(b) Sind $\varphi_1 : T_1 \to V_1 \subseteq M$*,* $\varphi_2 : T_2 \to V_2 \subseteq M$ *zwei Karten mit* $V := V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$*, so gilt für die Gramschen Determinanten* g_1, g_2 *und den Kartenwechsel* $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V) \to \varphi_2^{-1}(V)$*:*

$$g_1(t) = \det(D\tau(t))^2 g_2(\tau(t)), \quad t \in \varphi_1^{-1}(V).$$

Damit ist obige Definition von $\int_M f dS$ *unabhängig von der gewählten Karte.*

2.21 Definition. Es sei $\varphi_j : T_j \to V_j \subseteq M$, $j = 1, \ldots, J$, ein endlicher Atlas der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar, sofern $f\mathbf{1}_{T_j}$ jeweils bezüglich φ_j integrierbar ist für $j = 1, \ldots, J$. Wir setzen

$$\begin{aligned}\int_M f\, dS &:= \sum_{j=1}^J \int_M f\mathbf{1}_{V_j\setminus\bigcup_{i<j} V_i}\, dS \\ &= \sum_{j=1}^J \int_{T_j} f(\varphi_j(t))\mathbf{1}_{V_j\setminus\bigcup_{i<j} V_i}(\varphi_j(t))\sqrt{g_j(t)}\, dt,\end{aligned}$$

wobei g_j die Gramsche Determinante für φ_j bezeichnet. (Dann ist $\int_M f dS$ wohldefiniert und unabhängig von der Kartenwahl). Ferner definieren wir

$$\mathrm{Vol}_k(M) = \int_M 1\, dS \text{ und } \mathrm{Vol}_k(A) = \int_M \mathbf{1}_A\, dS \text{ (sofern } \mathbf{1}_A \text{ integrierbar).}$$

2.22 Beispiele.

(a) Kurvenintegrale: $\gamma : (0,1) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Homöomorphismus mit $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (0,1)$. Dann gilt $g(t) = \|\dot g(t)\|^2$ und $\int_M f\,dS = \int_{(0,1)} f(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\|\,dt$, falls f integrierbar ist. Insbesondere gilt für die Kurvenlänge $\mathrm{Vol}_1(M) = \int_{(0,1)}\|\dot\gamma(t)\|\,dt$, sofern das Integral endlich ist.

(b) Funktionsgraphen: für $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $h : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $M = \{(x', h(x')) \in \mathbb{R}^n \mid x' \in U\}$ gilt

$$\int_M f\,dS = \int_U f(x', h(x'))\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}\,dx',$$

sofern f integrierbar ist.

(c) Kugeloberfläche: die $(n-1)$-Sphäre rS_{n-1} vom Radius $r > 0$ besitzt das $(n-1)$-dimensionale Volumen

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(rS_{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1}.$$

2.4 Orientierung und Teilmengen mit Rand

2.23 Definition. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(a) Karten $\varphi_1 : T_1 \to V_1$, $\varphi_2 : T_2 \to V_2$ von M mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$ heißen gleich orientiert, falls der Kartenwechsel $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(V) \to \varphi_2^{-1}(V)$ die Bedingung $\det(D\tau) > 0$ auf $\varphi_1^{-1}(V)$ erfüllt.

(b) M wird orientierbar genannt, falls M einen Atlas gleichorientierter Karten besitzt. Ein solcher Atlas heißt orientiert.

2.24 Beispiel. Jede nur durch eine Karte parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist orientierbar. Insbesondere ist jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ orientierbar.

2.25 Beispiel. Ein orientierter Atlas induziert auch eine Orientierung auf den Tangentialräumen T_pM über die Basis $(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(t))$ mit $t = \varphi^{-1}(p)$ und einer Karte φ. Ist $\gamma : (0,1) \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Homömorphismus mit $\dot\gamma \neq 0$ auf $(0,1)$, so induziert die Karte γ eine Orientierung von T_pM mittels des Basisvektors $\dot\gamma(t)$, $t = \gamma^{-1}(p)$, bzw. des Tangenteneinheitsvektors $\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}$.

2.26 Satz. *Eine Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn es ein stetiges Einheitsnormalenfeld ν auf M gibt, d.h. $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\nu(p) \in N_pM$ und $\|\nu(p)\| = 1$.*

2.27 Definition. Ein Atlas $\mathscr{A}$ einer Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt die von einem stetigen Einheitsnormalenfeld ν induzierte Orientierung, falls gilt

$$\forall \varphi : T \to \mathrm{V} \in \mathscr{A},\ t \in T : \det(\nu(\varphi(t)), D\varphi(t)) > 0.$$

2.28 Beispiele.

(a) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U)$ und $M = f^{-1}(\{0\})$. Dann ist die Mannigfaltigkeit M durch das stetige Einheitsnormalenfeld $\nu(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ orientierbar. Insbesondere ist $S_{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ orientierbar.

(b) Das Bild M von $\psi : \mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\cos(s/2) \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(s/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

beschreibt das Möbiusband, das nicht orientierbar ist.

2.29 Definition. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\Omega \subseteq M$. Dann besitzt Ω glatten Rand, wenn für alle $p \in \partial\Omega \subseteq M$ eine Karte $\varphi : T \to V$ mit $p \in V$, $\varphi(T \cap \{x_1 \leqslant 0\}) = \Omega \cap V$ und $\varphi(T \cap \{x_1 = 0\}) = \partial\Omega \cap V$ existiert. Ein solche Karte heißt rand-adaptiert.

2.30 Lemma. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, $k \geqslant 2$, und $\Omega \subseteq M$ besitze glatten Rand. Dann existiert ein orientierter Atlas rand-adaptierter Karten.*

2.31 Satz. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, $k \geqslant 1$, und $\Omega \subseteq M$ besitze glatten Rand. Dann ist $\partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Ist M orientierbar, so auch $\partial\Omega$.*

2.32 Beispiel. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit und $\Omega \subseteq M$ besitze glatten Rand. Ist $\varphi : T \to V$ randadaptierte Karte, so parametrisiert die Kurve $s \mapsto \varphi(0,s)$ den Rand $\partial\Omega \cap V$. In $p \in \partial\Omega$ mit $t = \varphi^{-1}(p)$ geben die Basen $(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t))$ von T_pM und $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)$ von $T_p(\partial\Omega)$ die Orientierungen von M und $\partial\Omega$ an: die Kurve $\partial\Omega$ wird so durchlaufen, dass Ω zur Linken liegt.

2.33 Satz. *Für Mengen $\Omega \subseteq M = \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand existiert genau ein Einheitsnormalenfeld ν auf $\partial\Omega$ mit*

$$\forall p \in \partial\Omega\, \exists \varepsilon > 0\, \forall s \in (0,\varepsilon) : \, p + s\nu(p) \notin \Omega.$$

ν ist stetig und heißt äußeres Einheitsnormalenfeld.

2.5 Vektorfelder

2.34 Definition. Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $f : U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld. Gilt $f_i \in C^m(U)$, $i = 1, \ldots, n$, so schreiben wir $f \in C^m(U; \mathbb{R}^n)$.

2.35 Definition. Es seien $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve und $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(I) \subseteq U$ ein Vektorfeld. Dann gibt

$$\int_\gamma \langle f(x), dx \rangle := \int_I \langle f(\gamma(s)), \dot\gamma(s) \rangle \, ds,$$

sofern die rechte Seite wohldefiniert ist, das orientierte Kurvenintegral von f längs γ an.

2.36 Beispiel. Bewegt sich ein Teilchen auf der Kurve γ in einem Kraftfeld f, so folgt aus der Formel Arbeit=Kraft×Weg, dass die verrichtete Arbeit gerade $\int_\gamma \langle f(x), dx \rangle$ ist.

2.37 Definition. Für eine durch ein Einheitsnormalenfeld ν orientierte Hyperfläche $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das orientierte Oberflächenintegral eines Vektorfelds $f : U \to \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq U$ gegeben durch

$$\int_M \langle f(x), dS(x)\rangle = \int_M \langle f, dS\rangle := \int_M \langle f(x), \nu(x)\rangle\, S(dx),$$

sofern die rechte Seite wohldefiniert ist.

2.38 Definition. Ein stetiges Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ, falls für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = 0$.

2.39 Beispiele.

(a) Wenn ein Teilchen in einem stationären Kraftfeld zum Ausgangspunkt zurückkehrt, so ist die geleistete Arbeit Null.

(b) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)^\top$ und $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)^\top$ führen auf $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = 2\pi$, f ist also nicht konservativ auf $\mathbb{R}^2$.

2.40 Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt zusammenhängend, falls X und $\varnothing$ die einzigen Teilmengen von X sind, die offen und abgeschlossen zugleich sind. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt dann zusammenhängend, falls $(A, d|_A)$ zusammenhängend ist.

Ist x ein Punkt in einem metrischen Raum (X, d), so ist seine Zusammenhangskomponente definiert als

$$C(x) := \bigcup \left\{ A \subseteq X \,\middle|\, x \in A,\ A \text{ ist zusammenhängend} \right\}$$

2.41 Lemma. *$C(x)$ ist zusammenhängend und $x \in C(x)$.*

2.42 Lemma. *$x \sim y :\iff y \in C(x)$ ist eine Äquivalenzrelation auf $X \times X$ und X zerfällt in Zusammenhangskomponenten: $X = \dot{\bigcup}_{j\in J} C(x_j)$ mit $J \neq \varnothing$ und $x_j \in X$ geeignet.*

2.43 Definition. Ein metrischer Raum (X, d) heißt wegzusammenhängend, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg von x nach y gibt, d.h. $\gamma : [0,1] \to X$ stetig mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

2.44 Satz. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, so ist U auch wegzusammenhängend. Jeder Weg γ kann stückweise stetig differenzierbar gewählt werden.*

2.45 Korollar. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so zerfällt U in offene Wegzusammenhangskomponenten: $U = \dot{\bigcup}_{j\in J} V_j$ mit V_j offen und wegzusammenhängend.*

2.46 Satz. *Für ein stetiges Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:*

(a) f ist konservativ.

(b) Für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : [a, b] \to U$ hängt $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle$ nur von den Endpunkten $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ ab.

(c) Es gibt ein <u>*Potential*</u> $F \in C^1(U)$ *mit* $f = \nabla F$ *auf* U*.*

2.47 Definition. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>sternförmig</u>, falls $x_0 \in U$ existiert, so dass gilt

$$\forall x \in U : [x_0, x] := \{x_0 + t(x - x_0) \,|\, t \in [0,1]\} \subseteq U.$$

2.48 Satz (Lemma von Poincaré, 1895)**.** *Es seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und sternförmig sowie* $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$*. Dann sind äquivalent:*

(a) $\forall i, j = 1, \ldots, n : \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),\ x \in U$.

(b) $\exists F \in C^2(U) : \nabla F(x) = f(x),\ x \in U$.

2.49 Beispiel. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)^\top / (x_1^2 + x_2^2)$ erfüllt $\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, ist aber nicht konservativ.

2.6 Der Gaußsche Integralsatz

2.50 Satz (Lagrange 1762, Gauß 1813, Green 1825, Ostrogradski 1831)**.** *Es seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen sowie* $\Omega \subseteq U$ *kompakt mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld* ν*. Dann gilt für alle* $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f(x), \nu(x) \rangle \, S(dx).$$

2.51 Lemma. *Für* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $g \in C^1(U)$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{supp}(g) = \bigcap\{A \subseteq U \,|\, A \text{ abgeschlossen}, f|_{U \setminus A} = 0\}$ *in* U *und* $j = 1, \ldots, n$ *gilt* $\int_U \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx = 0$*.*

2.52 Lemma. *Es sei* $U = U' \times (a,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $h \in C^1(U'; (a,b))$ *sowie*

$$\begin{aligned} M &:= \{(x', h(x')) \,|\, x' \in U'\}, \\ \Omega_- &:= \{(x', x_n) \,|\, x' \in U', x_n \leqslant h(x')\}, \\ \Omega_+ &:= \{(x', x_n) \,|\, x' \in U', x_n \geqslant h(x')\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $g \in C^1(U)$ *mit kompaktem Träger in* U *und* $j = 1, \ldots, n$

$$\int_{\Omega_\pm} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx = \mp \int_M g(x) \nu_j(x)\, S(dx)$$

mit Normalenvektor $\nu(x', x_n) := (-\nabla h(x'), 1)^\top / \sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}$ *an* M *in Richtung* Ω_+*.*

2.53 Lemma. *Es seien* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und* $\Omega \subseteq U$ *kompakt mit glattem Rand. Zu jedem* $p \in \partial\Omega$ *gibt es – ggf. nach Umnummerieren der Koordinaten – eine offene Menge* $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$*, ein offenes Intervall* I *und* $\psi \in C^1(U'; I)$*, so dass gilt* $p \in U' \times I$, $\partial\Omega \cap (U' \times I) = \{(x', \psi(x')) \,|\, x' \in U'\}$ *und* $\Omega \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I \,|\, x_n \leqslant \psi(x)\}$ *oder* $\Omega \cap (U' \times I) = \{(x', x_n) \in U' \times I \,|\, x_n \geqslant \psi(x)\}$*.*

2.54 Lemma. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j=1,\dots,J}$ eine offene Überdeckung von K, so gibt es eine (U_j) untergeordnete glatte Zerlegung der Eins (α_j) auf einer Umgebung U von K, d.h $\alpha_j \in C^\infty(\mathbb{R};[0,1])$, $j = 1,\dots,J$, mit kompaktem Träger in U_j sowie $\sum_{j=1}^J \alpha_j(x) = 1$ für $x \in U$.*

2.55 Beispiele.

(a) Volumenberechnung: Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand gilt die Leibnizsche Flächenformel

$$\mathrm{Vol}_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \langle x, \nu(x)\rangle\, S(dx) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\,dy - y\,dx).$$

Für die Volumina der n-dimensionalen Sphären und Bälle gilt $\mathrm{Vol}_{n-1}(rS_{n-1}) = \frac{n}{r}\,\mathrm{Vol}_n(rB_n)$.

(b) Archimedisches Prinzip.

(c) Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen führt auf die Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung $\frac{d}{dt}u(x,t) = a\Delta_x u(x,t)$ bzw. bei Quellen und Senken auf ihre inhomogene Version $\frac{d}{dt}u(x,t) = a\Delta_x u(x,t) + g(x)$. Im stationären Fall ergeben sich die Laplacegleichung $\Delta u(x) = 0$ und die Poissongleichung $a\Delta u(x) = -g(x)$. Eine Lösung u der Laplacegleichung heißt harmonische Funktion.

2.7 Der Stokessche Integralsatz

2.56 Satz (Kelvin 1850, Stokes 1854, Hankel 1861)**.** *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine durch das Einheitsnormalenfeld ν orientierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, deren Karten zweimal stetig differenzierbar sind. Ferner sei $\Omega \subseteq M$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand $\partial\Omega$, der die von ν induzierte Orientierung trage und auf $T_p(\partial\Omega)$, $p \in \partial\Omega$, zur Orientierung durch den Tangenteneinheitsvektor $t(p)$ führt. Dann gilt für Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von Ω und $f \in C^1(U;\mathbb{R}^3)$*

$$\int_\Omega \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle\, S(dx) = \int_{\partial\Omega} \langle f(x), t(x)\rangle\, S(dx).$$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

3.1 Beispiele

(a) Radioaktiver Zerfall $\dot u(t) = -\alpha u(t)$

(b) Verhulst-Modell $\dot x(t) = (b-d)(L-x(t))x(t)$ mit $b,d,L > 0$ und $x_0 \in [0,L]$

(c) Mathematisches Pendel $\ddot\varphi(t) = -\frac{g}{l}\sin(\varphi(t))$ mit $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot\varphi(0) = v_0$ oder äquivalent für $x(t) = (\varphi(t), v(t))^\top$: $\dot x(t) = (x_2(t), -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)))^\top$. Die Energie $E(t) = \frac{1}{2}Ml^2v^2(t) + Mgl(1-\cos(\varphi(t))$ ist entlang der Lösungen konstant, d.h. ein erstes Integral.

3.2 Dynamische Systeme

3.1 Definition. Es sei $T \in \{\mathbb{R}^+, \mathbb{N}_0, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ eine Zeitmenge und (X, d) metrischer Raum. Dann heißt eine stetige Abbildung $\varphi : T \times X \to X$ Fluss, falls für alle $x \in X$ gilt

(a) $\varphi(0, x) = x$;

(b) $\forall s, t \in T: \; \varphi(s + t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$.

Das Quadrupel (X, d, T, φ) heißt dann dynamisches System.

3.2 Beispiel. $\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert einen Fluss im $\mathbb{R}^n$ für $T = \mathbb{R}^+$ oder $T = \mathbb{R}$, Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit $x(0) = x_0$.

3.3 Definition. Für ein dynamisches System (X, d, T, φ) und $x_0 \in X$ heißt $O(x_0) = \{\varphi(t, x_0) \,|\, t \in T\}$ Orbit von x_0 sowie $O^+(x_0) = \{\varphi(t, x_0) \,|\, t \in T,\, t \geqslant 0\}$ positiver Orbit von x_0. Gilt $O(x_0) = \{x_0\}$, so heißt x_0 Gleichgewichtspunkt oder Ruhelage. Existiert $t \neq 0$ mit $\varphi(t, x_0) = x_0$, so heißt x_0 periodischer Punkt.

3.4 Definition. In einem dynamischen System (X, d, T, φ) heißt eine Menge $A \subseteq X$ invariant, falls für alle $x_0 \in A$ gilt $O(x_0) \subseteq A$, sowie positiv invariant, falls für alle $x_0 \in A$ gilt $O^+(x_0) \subseteq A$. Die ω-Limesmenge von x_0 ist gegeben durch

$$\omega(x_o) = \bigcap_{t\in T, t\geqslant 0} \overline{O^+(\varphi(t, x_0))}.$$

3.5 Lemma. *Für alle $x_0 \in X$ gilt:*

(a) Ist $\overline{O^+(\varphi(t_0, x_0))}$ kompakt für ein $t_0 \geqslant 0$, so gilt $\omega(x_0) \neq \varnothing$.

(b) Es gilt $\omega(x_0) = \{x \in X \,|\, \exists (t_n) \subseteq T, t_n \to \infty : \; x = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0)\}$.

(c) $\omega(x_0)$ ist positiv invariant.

(d) Im Fall $T \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$ ist $\omega(x_0)$ auch invariant.

3.6 Beispiele.

(a) Im diskreten dynamischen System $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \beta \pmod{2\pi}$ ist jeder Punkt periodisch für $\beta = 2\pi q$ mit $q \in \mathbb{Q}$. Im Fall $\beta = 2\pi r$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt $\omega(\varphi_0) = [0, 2\pi)$ (oder S^1).

(b) Für den Fluss $\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0$ im $\mathbb{R}^2$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich eine reiche Dynamik. Der Ursprung 0 ist stets Ruhelage. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von A, so gilt: (i) $\omega(x_0) = \{0\}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ im Fall $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$; (ii) $\omega(x_0) = \varnothing$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Fall $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$; (iii) $\omega(x_0) = \{0\}$ für alle $x_0 \in \mathrm{span}(v_1)$, falls v_1 Eigenvektor zu $\lambda_1 < 0$ ist, und sonst $\omega(x_0) = \varnothing$ im Fall $\lambda_2 > 0$; (iv) im Fall $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ sind alle Orbits periodisch (Drehungen um β).

3.7 Definition. Eine kompakte invariante Menge $K \subseteq X$ heißt stabil, falls zu jeder Umgebung U von K eine Umgebung $V \subseteq U$ von K existiert mit $O^+(x) \subseteq U$ für alle $x \in V$. Eine stabile Menge K heißt Attraktor, falls es eine Umgebung U von K gibt mit $\omega(x) \subseteq K$ für alle $x \in U$. Kann man $U = X$ wählen, so heißt K globaler Attraktor.

3.8 Beispiele.

(a) Für den Fluss $\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0$ im $\mathbb{R}^2$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ von oben ist jeder Ball $B_r(0)$ mit $r \geqslant 0$ globaler Attraktor im Fall $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$. Im Fall $\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ ist jede rotationsinvariante kompakte Menge stabil, aber kein Attraktor.

(b) Lorenzattraktor.

3.3 Stabilität von Ruhelagen

3.9 Definition. Eine Ruhelage $\bar{x}$ heißt asymptotisch stabil, falls $\{\bar{x}\}$ ein Attraktor ist.

3.10 Satz (Lyapunov 1892)**.** *Es sei $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|, \mathbb{R}^+, \varphi)$ ein dynamisches System mit $\frac{d}{dt}\varphi(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0))$, $t \geqslant 0$, für eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$. Haben alle Eigenwerte von $Df(\bar{x})$ (strikt) negativen Realteil, so ist die Ruhelage $\bar{x}$ asymptotisch stabil.*

3.11 Lemma (Gronwall)**.** *Ist $v : [0, T] \to \mathbb{R}$ stetig mit $v(t) \leqslant \alpha + \beta \int_0^t v(s)\,ds$ für $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ und alle $t \in [0, T]$, so gilt $v(t) \leqslant \alpha e^{\beta t}$, $t \in [0, T]$.*

3.12 Definition. Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ mit $f(\bar{x}) = 0$. Eine in einer Umgebung U von x_0 definierte Funktion $E : U \to \mathbb{R}$ heißt Lyapunovfunktion für f, falls

(a) E bei $\bar{x}$ ein striktes Minimum besitzt ($E(x) > E(\bar{x})$ für $x \neq \bar{x}$);

(b) $\forall x \in U : \langle \nabla E(x), f(x) \rangle \leqslant 0$.

Gilt sogar (b') $\forall x \in U \setminus \{\bar{x}\} : \langle \nabla E(x), f(x) \rangle < 0$, so heißt E strikte Lyapunovfunktion.

3.13 Satz. *Es sei $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|, \mathbb{R}^+, \varphi)$ ein dynamisches System mit $\frac{d}{dt}\varphi(t, x_0) = f(\varphi(t, x_0))$, $t \geqslant 0$, für eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $f(\bar{x}) = 0$. Fall es eine (strikte) Lyapunovfunktion für f gibt, so ist die Ruhelage $\bar{x}$ (asymptotisch) stabil.*

3.14 Beispiel. Beim mathematischen Pendel ist die Energie ein erstes Integral und damit insbesondere eine Lyapunovfunktion. Die Ruhelage $\varphi = 0$, $v = 0$ ist stabil.

3.4 Lösungstheorie

3.15 Satz (Picard-Lindelöf, globale Version)**.** *Es sei* $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *(global) Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, d.h.*

$$\exists L > 0 \, \forall t \in [0,T],\ x, y \in \mathbb{R}^n :\ \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

Dann hat die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ *für* $t \in [0,T]$ *mit Anfangswert* $x(0) = x_0$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *eine eindeutige Lösung* $x \in C^1([0,T]; \mathbb{R}^n)$*. Wird diese mit* $\varphi(\bullet, x_0)$ *bezeichnet, so hängt sie stetig von der Anfangsbedingung ab:*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n :\ \lim_{x \to x_0} \sup_{t \in [0,T]} \|\varphi(t,x) - \varphi(t,x_0)\| = 0.$$

Ist $f \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *(global) Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente, so definiert die Lösung einen Fluss* $\varphi(t, x_0)$ *auf dem* $\mathbb{R}^n$ *mit* $T = \mathbb{R}^+$*.*