Funktionalanalysis
Gliederung zur Vorlesung im Wintersemester 2019/20

Markus Reiß
Humboldt-Universität zu Berlin
mreiss@math.hu-berlin.de

VORLÄUFIGE FASSUNG: 10. Februar 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Banach- und Hilberträume **1**
1.1 Definition und Beispiele . . . 1
1.2 Hilberträume . . . 2
1.3 Kompakte und dichte Teilmengen . . . 3

2 Operatoren und Dualräume **5**
2.1 Beschränkte Operatoren . . . 5
2.2 Dualräume . . . 5
2.3 Die Sätze von Hahn-Banach . . . 7
2.4 Grundprinzipien für Operatoren auf Banachräumen . . . 7
2.5 Reflexivität und schwache/schwach*-Konvergenz . . . 9
2.6 Die Fouriertransformation . . . 10

3 Spektraltheorie **11**
3.1 Spektrum und Resolvente . . . 11
3.2 Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren . . . 12
3.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren . . . 14

1 Banach- und Hilberträume

1.1 Definition und Beispiele

1.1 Definition. Ein vollständiger normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum heißt Banachraum. Ein vollständiger $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum. Hier bezeichnet $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ stets die reellen oder komplexen Zahlen.

1.2 Satz. *$\mathbb{K}^n$ mit beliebiger Norm bildet einen Banachraum.*

1.3 Definition. Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definiere die Folgenräume $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\geqslant 1} \,|\, a_n \in \mathbb{K}, \|(a_n)\|_{\ell^p} < \infty\}$ mit $\|a\|_{\ell^p} = (\sum_{n\geqslant 1}|a_n|^p)^{1/p}$ für $1 \leqslant p < \infty$ und $\|a\|_{\ell^\infty} = \|a\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1}|a_n|$, wobei stets $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$.

1.4 Satz. *Es gelten folgende Ungleichungen:*

(a) *Youngsche Ungleichung: $|xy| \leqslant \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$, $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(b) *Hölder-Ungleichung: für $a \in \ell^p$, $b \in \ell^q$ mit $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt $a \cdot b \in \ell^1$ und $\sum_{n\geqslant 1}|a_n b_n| \leqslant \|a\|_{\ell^p}\|b\|_{\ell^q}$*

(c) *Minkowski-Ungleichung: für $a \in \ell^p$, $p \in [1, \infty]$, gilt $\|a + b\|_{\ell^p} \leqslant \|a\|_{\ell^p} + \|b\|_{\ell^p}$.*

1.5 Satz. *$(\ell^p, \|\bullet\|_{\ell^p})$ ist für jedes $p \in [1, \infty]$ ein Banachraum und $(\ell^2, \|\bullet\|_{\ell^2})$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\geqslant 1} a_n \bar{b}_n$.*

1.6 Definition. Für einen metrischen (oder bloß topologischen) Raum T setze $C(T) = \{f : T \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$ sowie $C_b(T) = \{f \in C(T) \mid f \text{ beschränkt}\}$ sowie $\|f\|_\infty := \sup_{t\in T}|f(t)|$, $f \in C(T)$.

1.7 Satz. *$(C_b(T), \|\bullet\|_\infty))$ bildet einen Banachraum. Insbesondere ist $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ ein Banachraum für kompaktes K.*

1.8 Beispiel. $C([0, 1])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\bar{g}(x)dx$ ist nicht vollständig und bildet somit keinen Hilbertraum.

1.9 Definition. Normierte Räume X, Y heißen isomorph, wenn es eine lineare Bijektion $\varphi : X \to Y$ gibt mit $c\|x\|_X \leqslant \|\varphi(x)\|_Y \leqslant C\|x\|_X$ für Konstanten $C > c > 0$ und alle $x \in X$. Eine lineare Abbildung $\varphi : X \to Y$ nennt man Isometrie, falls $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$ gilt. Normierte Räume X, Y heißen isometrisch isomorph, wenn es eine bijektive Isometrie $\varphi : X \to Y$ gibt.

1.10 Definition. Ein Banachraum $\tilde{X}$ heißt Vervollständigung eines normierten Raums X, falls es eine Isometrie $\iota : X \to \tilde{X}$ gibt, deren Bild $\iota(X)$ dicht in $\tilde{X}$ liegt.

1.11 Satz. *Zu jedem normierten Raum gibt es eine Vervollständigung. Diese ist bis auf Isometrie eindeutig (d.h. zwei Vervollständigungen sind stets isometrisch isomorph).*

1.12 Definition. Für einen Maßraum $(X, \mathscr{F}, \mu)$ und $1 \leqslant p \leqslant \infty$ setze $\mathscr{L}^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ messbar} \mid \|f\|_{L^p} < \infty\}$ mit $\|f\|_{L^p} = (\int_X |f(x)|^p \mu(dx))^{1/p}$ für $1 \leqslant p < \infty$ und $\|f\|_{L^\infty} = \inf_{N \in \mathscr{F}, \mu(N)=0} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$ (essentielles Supremum).

Im Fall $X \subseteq \mathbb{R}^d$ Borelmenge mit der σ-Algebra $\mathscr{F} = \mathscr{B}_X$ der Borelmengen in X und dem Lebesguemaß $\mu = \lambda|_X$ auf X schreiben wir einfach $L^p(X)$, z.B. $L^p(\mathbb{R}^d)$ oder $L^p([a, b])$.

1.13 Definition. Betrachte die Äquivalenzklassen $[f] = \{g \in \mathscr{L}^p(\mu) \mid f = g\ \mu\text{-fast überall}\}$ in $\mathscr{L}^p(\mu)$ und setze $L^p(\mu) = \{[f] \mid f \in \mathscr{L}^p(\mu)\}$. Im folgenden bedeutet $f \in L^p(\mu)$, dass wir $[f]$ betrachten, also f nur modulo μ-Nullmengen als wohldefiniert ansehen.

1.14 Lemma. *$[f] \mapsto \|[f]\|_{L^p}$ definiert eine Norm auf dem Vektorraum $L^p(\mu)$ für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

1.15 Satz (Satz von Fischer-Riesz)**.** *Für $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ist $(L^p(\mu), \|\bullet\|_{L^p})$ vollständig, bildet also einen Banachraum. $L^2(\mu)$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_X f(x)\bar{g}(x)\mu(dx)$ bildet einen Hilbertraum.*

1.16 Definition. $f \in C([a, b])$ heißt <u>schwach differenzierbar</u>, falls es ein $g \in L^1([a, b])$ gibt mit $f(x) = f(a) + \int_a^x g(y)dy$ (Integral bzgl. Lebesguemaß). g heißt <u>schwache Ableitung</u> von f, Notation $f' = g$. $f \in C^{m-1}([a, b])$ heißt <u>m-mal schwach differenzierbar</u>, falls $f^{(m-1)} \in C([a, b])$ (stetig fortsetzbar am Rand) und $f^{(m-1)}$ schwach differenzierbar ist. Die schwache Ableitung von $f^{(m-1)}$ bezeichnen wir mit $f^{(m)}$, m-te schwache Ableitung von f.

1.17 Definition. Für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ heißt $W^{m,p}([a, b]) = \{f \in C([a, b]) \mid f\ m\text{-mal schwach differenzierbar und } f^{(m)} \in L^p([a, b])\}$ mit Norm $\|f\|_{m,p} = \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{L^p}$, $f \in W^{m,p}([a, b])$, <u>L^p-Sobolevraum der Ordnung/Regularität m</u>. Für $p = 2$ schreibe $H^m([a, b]) = W^{m,2}([a, b])$.

1.18 Satz. *Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty]$ sind die Sobolevräume $(W^{m,p}([a, b]), \|\bullet\|_{m,p})$ Banachräume. $H^m([a, b])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_m = \sum_{k=0}^m \langle f^{(k)}, g^{(k)}\rangle_{L^2}$ bildet einen Hilbertraum.*

1.2 Hilberträume

Im folgenden bezeichnet H immer einen Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet\rangle$.

1.19 Definition. Für $M \subseteq H$ setze $M^\perp = \{x \in H \mid \langle x, m\rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\}$.

1.20 Lemma. *$M^\perp$ ist stets ein abgeschlossener Unterraum von H.*

1.21 Satz (Approximationssatz, Projektion auf konvexe Mengen)**.** *Ist $M \subseteq H$ abgeschlossen und konvex, so existiert zu jedem $x \in H$ genau ein $u_x \in M$ mit $\|x - u_x\| = \inf_{u \in M} \|x - u\|$.*

1.22 Definition. Für einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq H$ heißt $P_U : H \to U$ mit $P_U(x) = u_x$ für u_x aus vorigem Satz <u>Orthogonalprojektion auf U</u>.

1.23 Satz. *Jede Orthogonalprojektion P_U ist linear mit $P_U P_U = P_U$ und $\ker(P_U) = U^\perp$.*

1.24 Korollar ($H = U \oplus U^\perp$)**.** *Ist $U \subseteq H$ abgeschlossener Unterraum, so gibt es für jedes $x \in H$ genau eine Zerlegung $x = u_x + u_x^\perp$ mit $u_x \in U$, $u_x^\perp \in U^\perp$.*

1.25 Definition. $E \subseteq H$ heißt Orthonormalsystem (ONS) in H, falls $\|e\| = 1$ für alle $e \in E$ und $\langle e, e' \rangle = 0$ für alle $e, e' \in E$ mit $e \neq e'$. Ein Orthonormalsystem E heißt Orthonormalbasis (ONB) von H, falls $\operatorname{span}(E) = \{\sum_{e \in E} \lambda_e e \mid \lambda_e \in \mathbb{K}, \text{ nur endlich viele } \lambda_e \neq 0\}$ dicht in H liegt.

1.26 Satz (Besselsche Ungleichung)**.** *Für ein ONS E und alle $x \in H$ gilt*

$$\sum_{e \in E, \langle x,e \rangle \neq 0} \langle x, e \rangle^2 \leqslant \|x\|^2.$$

1.27 Satz (ONB-Darstellung)**.** *Für eine ONB E und alle $x \in H$ gilt*

$$x = \sum_{e \in E, \langle x,e \rangle \neq 0} \langle x, e \rangle e \text{ (Konvergenz in } H\text{)}.$$

1.28 Korollar. *Ist E ONB von H, so gilt die Parseval-Identität*

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E, \langle x,e \rangle \neq 0} |\langle x, e \rangle|^2 \text{ für alle } x \in H.$$

1.3 Kompakte und dichte Teilmengen

1.29 Satz (Arzelà-Ascoli)**.** *Ist T kompakt metrisch, so ist eine Teilmenge $M \subseteq C(T)$ genau dann kompakt (bzgl. $\|\bullet\|_\infty$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_\infty < \infty$;

(b) M ist abgeschlossen;

(c) M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall f \in M : \; d(s,t) \leqslant \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

1.30 Satz. *Eine Teilmenge $M \subseteq \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$, ist genau dann kompakt (bzgl. $\|\bullet\|_{\ell^p}$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{a \in M} \|a\|_{\ell^p} < \infty$;

(b) M ist abgeschlossen;

(c) $\lim_{N \to \infty} \sup_{a \in M} \sum_{n=N}^\infty |a_n|^p = 0$.

1.31 Satz (Riesz-Kolmogorov)**.** *Eine Teilmenge $M \subseteq L^p([a,b])$, $1 \leqslant p < \infty$, ist kompakt (bzgl. $\|\bullet\|_{L^p}$), wenn:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_{L^p} < \infty$;

(b) *M ist abgeschlossen;*

(c) $\lim_{h\downarrow 0}\sup_{f\in M}\int_a^{b-h}|f(t+h)-f(t)|^p dt = 0.$

1.32 Definition. Ein metrischer Raum heißt separabel, falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt.

1.33 Satz. *$\mathbb{K}^d$ mit beliebiger Norm ist ein separabler Banachraum.*

1.34 Satz. *$\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p < \infty$, sowie $(c_0, \|\bullet\|_{\ell^\infty})$ sind separable Banachräume.*

1.35 Definition. $A \subseteq C(T)$ heißt Algebra, wenn A einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet sowie $f, g \in A \Rightarrow fg \in A$ gilt. Eine Algebra A heißt punktetrennend, falls für alle $s, t \in T$ mit $s \neq t$ eine Funktion $f \in A$ existiert mit $f(s) \neq f(t)$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt A selbstadjungiert, falls $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$ gilt.

1.36 Satz (Stone-Weierstraß)**.** *Ist K kompakter metrischer Raum und $A \subseteq C(K)$ eine Algebra, die Punkte trennt, die konstanten Funktionen enthält sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selbstadjungiert ist, so liegt A dicht in $C(K)$.*

1.37 Korollar. *Ist $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt, so liegen die Polynome $p(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant n}\lambda_\alpha x^\alpha$ mit $n \in \mathbb{N}$, Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $x^\alpha := x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$ und $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ dicht in $C(K;\mathbb{R})$.*

1.38 Korollar. *Die trigonometrischen Polynome $p(x) = \sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{2\pi ikx}$, $x \in [0,1]$, mit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \in \mathbb{C}$ liegen dicht in*

$$C_{per}([0,1];\mathbb{C}) = \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0) = f(1)\}.$$

1.39 Korollar. *$(C(K), \|\bullet\|_\infty)$ ist ein separabler Banachraum für jeden kompakten metrischen Raum K.*

1.40 Definition. Ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ eines metrischen Raums T heißt regulär, falls

$$\forall B \in \mathfrak{B}_T :\ \mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(O) \mid O \supseteq B \text{ offen}\}.$$

1.41 Satz. *Ist μ ein reguläres Maß auf $\mathfrak{B}_T$, so liegt $C_b(T) \cap L^p(T, \mathfrak{B}_T, \mu)$ dicht in $L^p(T, \mathfrak{B}_T, \mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

1.42 Definition. Ein separabler und vollständiger metrischer Raum heißt Polnisch.

1.43 Lemma (Ulam)**.** *Jedes endliche Maß auf der Borel-σ-Algebra eines Polnischen Raums ist regulär.*

1.44 Definition. Ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ heißt Borelmaß, falls es lokal endlich ist, d.h. für jedes $t \in T$ gibt es eine offene Menge O mit $t \in O$ und $\mu(O) < \infty$.

1.45 Satz (Ulam)**.** *Jedes Borelmaß auf der Borel-σ-Algebra eines Polnischen Raums ist regulär.*

1.46 Korollar. *Für jedes endliches Maß μ auf einem kompakten metrischen Raum K ist $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, separabel. Insbesondere liegt $C(K)$ dicht in $L^p(\mu)$.*

1.47 Korollar. *Für jedes Borelmaß μ in $\mathbb{R}^d$ ist $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, separabel. Insbesondere liegt $C_c(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ dicht in $L^p(\mu)$.*

2 Operatoren und Dualräume

2.1 Beschränkte Operatoren

2.1 Definition. Eine stetige lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Räumen X, Y heißt auch stetiger (linearer) Operator oder beschränkter (linearer) Operator. Mit $L(X, Y)$ wird die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $L : X \to Y$ bezeichnet und

$$\|L\| := \|L\|_{X\to Y} = \sup_{x\in X, \|x\|\leqslant 1} \|Lx\|$$

heißt Operatornorm von $L : X \to Y$.

2.2 Lemma. *$(L(X, Y), \|\bullet\|_{X\to Y})$ ist ein normierter Vektorraum.*

2.3 Satz. *Für eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Vektorräumen X, Y sind äquivalent:*

(a) L ist stetig, d.h. $L \in L(X, Y)$;

(b) L ist stetig bei 0;

(c) $\|L\|_{X\to Y} < \infty$ (L ist beschränkt);

(d) L ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\|L\|_{X\to Y} < \infty$.

2.4 Lemma. *Ist Y ein Banachraum, so ist auch $(L(X, Y), \|\bullet\|_{X\to Y})$ ein Banachraum.*

2.5 Satz. *Sind D ein dichter Unterraum des normierten Raums X, Y ein Banachraum und $L \in L(D, Y)$, so existiert genau eine stetige lineare Fortsetzung $\tilde{L}$ von L, d.h. $\tilde{L}|_D = L$ und $\tilde{L} \in L(X, Y)$.*

2.6 Satz. *Betrachte $L(X) := L(X, X)$ für einen normierten Raum X.*

(a) Ist $L \in L(X)$ und konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$ (mit k-facher Komposition $L^k = L \circ \cdots \circ L$, $L^0 = I$ Identität), so ist $I - L$ invertierbar mit

$$(I - L)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \text{ (Neumann-Reihe).}$$

(b) Ist X Banachraum und gilt $\|L\| < 1$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} L^k$, und es gilt $\|(I - L)^{-1}\| \leqslant (1 - \|L\|)^{-1}$. Darüberhinaus bilden die invertierbaren $L \in L(X)$ mit $L^{-1} \in L(X)$ eine offene Menge in $L(X)$.

2.2 Dualräume

2.7 Definition. $X' = L(X, \mathbb{K})$ heißt Dualraum eines normierten Raums X. Jedes $\ell \in X'$ heißt stetiges lineares Funktional auf X.

2.8 Korollar. *Der Dualraum $(X', \|\bullet\|_{X'})$ mit $\|\ell\|_{X'} := \|\ell\|_{X\to\mathbb{K}}$ bildet einen Banachraum.*

2.9 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume)**.** *Ist H ein Hilbertraum, so ist $\varphi : H \to H'$ mit $\varphi(x)y = \langle y, x\rangle$, $x, y \in H$, ein isometrischer Isomorphismus (konjugiert linear im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$); insbesondere ist H' isometrisch isomorph zu H.*

2.10 Satz (von Neumann)**.** *Es seien μ, ν endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$. Dann existieren $f : X \to [0, \infty)$ messbar und $B \in \mathscr{F}$ mit $\mu(B) = 0$, so dass*

$$\forall\, A \in \mathscr{F} :\ \nu(A) = \int_A f d\mu + \nu(A \cap B).$$

2.11 Definition. Sind μ, ν Maße auf $(X, \mathscr{F})$, so heißt

(a) ν absolut stetig bezüglich μ (Notation $\nu \ll \mu$), wenn $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathscr{F}$ gilt;

(b) ν singulär zu μ (Notation $\nu \perp \mu$), wenn es eine Mege $A \in \mathscr{F}$ gibt mit $\nu(A^c) = \mu(A) = 0$.

2.12 Korollar (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Sind μ, ν σ-endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$ mit $\nu \ll \mu$, so existiert $f : X \to [0, \infty)$ messbar mit*

$$\forall\, A \in \mathscr{F} :\ \nu(A) = \int_A f d\mu.$$

2.13 Korollar (Lebesgue-Zerlegung)**.** *Sind μ, ν endliche Maße auf $(X, \mathscr{F})$, so existieren endliche Maße ν_0, ν_1 mit $\nu = \nu_0 + \nu_1$ und $\nu_0 \ll \mu$ sowie $\nu_1 \perp \mu$.*

2.14 Satz. *Für $1 \leqslant p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und ein σ-endliches Maß μ ist $\varphi : L^q(\mu) \to (L^p(\mu))'$ mit $\varphi(g)(f) = \int fg d\mu$, $g \in L^q(\mu)$, $f \in L^p(\mu)$, ein isometrischer Isomorphismus. Insbesondere ist $(L^p(\mu))'$ isometrisch isomorph zu $L^q(\mu)$.*

2.15 Definition. Für einen Messraum $(X, \mathscr{F})$ bezeichnet

$$M(\mathscr{F}) := \{\mu_+ - \mu_- \mid \mu_+, \mu_- \text{ endliche Maße auf } \mathscr{F}\}$$

den $\mathbb{R}$-Vektorraum der endlichen signierten Maße. Durch

$$\|\mu\|_{TV} := \mu_+(X) + \mu_-(X)$$

für $\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(\mathscr{F})$ mit Maßen μ_+, μ_- und $\mu_+ \perp \mu_-$ (*Hahn-Jordan-Zerlegung*) wird die Totalvariationsnorm definiert.

2.16 Satz (Rieszscher Darstellungssatz für $C(K)'$)**.** *Es seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt (oder allgemeiner K kompakt metrisch). Dann definiert $\varphi : M(\mathfrak{B}_K) \to C(K)'$ mit $\varphi(\mu)(f) = \int_K f d\mu$ einen isometrischen Isomorphismus zwischen $(M(\mathfrak{B}_K), \|\bullet\|_{TV})$ und dem Dualraum von $(C(K), \|\bullet\|_\infty)$.*

2.17 Korollar. *$(M(\mathfrak{B}_K), \|\bullet\|_{TV})$ bildet einen Banachraum.*

2.18 Korollar. *Der Dualraum von $(C_0(\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist isometrisch isomorph zu $(M(\mathfrak{B}_\mathbb{R}), \|\bullet\|_{TV})$.*

2.3 Die Sätze von Hahn-Banach

2.19 Definition. Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X heißt sublinear, falls

(a) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \geqslant 0$ (und reell), $x \in X$;

(b) $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in X$.

2.20 Satz (Hahn-Banach, Version der linearen Algebra, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Seien U ein Unterraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums X, $p : X \to \mathbb{R}$ sublinear und $\ell : U \to \mathbb{R}$ linear mit $\ell(u) \leqslant p(u)$, $u \in U$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung $L : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$L|_U = \ell \text{ und } L(x) \leqslant p(x), \qquad x \in X.$$

2.21 Satz (Hahn-Banach, Fortsetzungsversion)**.** *Es sei U ein Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Zu jedem $\ell \in U'$ existiert ein $L \in X'$ mit*

$$L|_U = \ell \text{ und } \|L\|_{X'} = \|\ell\|_{U'}.$$

2.22 Korollar. *Für jedes x in einem normierten Raum X gilt*

$$\|x\| = \max_{\ell \in X', \|\ell\| \leqslant 1} |\ell(x)|.$$

2.23 Satz. *Es sei U ein Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums X. Dann gilt*

$$\operatorname{dist}(x, U) = \sup\{|\ell(x)| : \ell \in X', \|\ell\| \leqslant 1, \ell|_U = 0\}, \quad x \in X.$$

Insbesondere liegt U dicht in X genau dann, wenn für jedes $\ell \in X'$ mit $\ell|_U = 0$ bereits $\ell = 0$ gilt.

2.24 Satz (Hahn-Banach, Trennungsversion)**.** *Es sei X normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

(a) Ist $C \subseteq X$ konvex, offen mit $0 \in C$ und ist $x_0 \notin C$, so existiert $\ell \in X'$ mit

$$\operatorname{Re} \ell(x_0) \geqslant 1, \quad \operatorname{Re} \ell|_C < 1.$$

(b) Sind $C_1, C_2 \subseteq X$ konvex, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$ und C_1 offen, so existiert $\ell \in X'$ mit $\operatorname{Re} \ell(x_1) < \operatorname{Re} \ell(x_2)$ für alle $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$.

2.4 Grundprinzipien für Operatoren auf Banachräumen

2.25 Satz (Baire)**.** *Für eine Folge $(O_n)_{n \geqslant 1}$ offener, dichter Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums T liegt $\bigcap_{n \geqslant 1} O_n$ dicht in T.*

2.26 Definition. Eine Teilmenge M eines metrischen Raums heißt

(a) nirgends dicht, falls das Innere von $\bar{M}$ leer ist;

(b) von 1. Kategorie, falls M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist;

(c) von 2. Kategorie, falls M nicht von 1. Kategorie ist.

2.27 Korollar (Bairescher Kategoriensatz)**.** *In einem vollständigen metrischen Raum liegt das Komplement einer Menge erster Kategorie stets dicht.*

2.28 Korollar. *Ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum ist von 2. Kategorie (in sich).*

2.29 Korollar. *In einem Banachraum besitzt jede Basis im Sinn der linearen ALgebra entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente.*

2.30 Korollar. *Der Vektorraum der Polynome mit beliebiger Norm ist nie ein Banachraum.*

2.31 Satz (Satz von Banach-Steinhaus, von der gleichmäßigen Beschränktheit; uniform boundedness principle)**.** *Ist $\mathscr{T} \subseteq L(X,Y)$ eine Familie beschränkter Operatoren von einem Banachraum X in einen normierten Raum Y mit*

$$\forall\, x \in X : \sup_{T \in \mathscr{T}} \|Tx\| < \infty,$$

so gilt sogar $\sup_{T \in \mathscr{T}} \|T\| < \infty$.

2.32 Korollar. *Ist X ein Banachraum und $M' \subseteq X'$, so sind äquivalent:*

(a) M' ist beschränkt, d.h. $\sup_{\ell \in M'} \|\ell\| < \infty$;

(b) M' ist schwach-beschränkt, d.h. $\forall x \in X : \sup_{\ell \in M'} |\ell(x)| < \infty$.*

2.33 Korollar. *Ist X ein normierter Raum und $M \subseteq X$, so sind äquivalent:*

(a) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{x \in M} \|x\| < \infty$;

(b) M ist schwach-beschränkt, d.h. $\forall \ell \in X' : \sup_{x \in M} |\ell(x)| < \infty$.

2.34 Korollar. *Für $L_n \in L(X,Y)$, $n \geqslant 1$, X Banachraum, Y normierter Raum existiere $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ für alle $x \in X$. Dann gilt auch $L \in L(X,Y)$.*

2.35 Satz. *Es sei $s_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e^{2\pi i k \bullet}\rangle e^{2\pi i k x}$, $x \in [0,1]$, die n-te Fourierapproximation an eine Funktion $f \in L^2([0,1];\mathbb{C})$. Dann existiert zu jedem $x \in [0,1]$ eine Funktion $f \in C_{per}([0,1];\mathbb{C})$, so dass $(s_n(f)(x))_{n \geqslant 1}$ unbeschränkt ist. Insbesondere konvergiert die Fourierreihe einer stetigen, periodischen Funktion f nicht immer punktweise.*

2.36 Definition. Eine Abbildung zwischen metrischen Räumen heißt offen, wenn sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet.

2.37 Lemma. *Ist $f : S \to T$ offen und injektiv, so ist die Inverse $f^{-1} : f(S) \to S$ stetig.*

2.38 Lemma. *Für eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Räumen X, Y sind äquivalent:*

(a) L ist offen;

(b) $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^Y \subseteq L(U_1^X)$ *mit den offenen Kugeln* $U_\varepsilon^Y := \{y \in Y \mid \|y\| < \varepsilon\}$, $U_1^X := \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$.

2.39 Satz (von der offenen Abbildung)**.** *Sind X, Y Banachräume und ist $L \in L(X, Y)$ surjektiv, so ist L offen.*

2.40 Korollar. *Ist $L \in L(X, Y)$ eine Bijektion zwischen Banachräumen X und Y, so gilt $L^{-1} \in L(Y, X)$.*

2.41 Korollar. *Sind $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$ zwei Normen auf X, die beide X zum Banachraum machen, und gilt*

$$\exists C > 0\, \forall x \in X :\ \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1,$$

so sind beide Normen bereits äquivalent, d.h.

$$\exists C \geqslant c > 0\, \forall x \in X :\ c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

2.42 Korollar. *Es sei $L \in L(X, Y)$ ein injektiver Operator zwischen Banachräumen X, Y. Dann ist $L^{-1} \in L(\operatorname{ran} L, X)$ äquivalent zu $\operatorname{ran} L \subseteq Y$ abgeschlossen, wobei $\operatorname{ran} L = \{Lx \mid x \in X\}$.*

2.5 Reflexivität und schwache/schwach*-Konvergenz

2.43 Definition. Ein normierter Raum X heißt reflexiv, falls $\iota : X \to X''$, $\iota(x)(\ell) := \ell(x)$, surjektiv ist.

2.44 Lemma. *Ein reflexiver Raum X ist genau dann separabel, wenn X' separabel ist.*

2.45 Satz. *Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines reflexiven Raums $(X, \|\bullet\|)$, so ist auch $(U, \|\bullet\|)$ reflexiv.*

2.46 Definition. Es sei X ein normierter Raum.

(a) Eine Folge (x_n) in X konvergiert schwach gegen $x \in X$, falls $\forall \ell \in X' :$ $\ell(x_n) \to \ell(x)$ gilt. Notation: $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Eine Folge (ℓ_n) in X' konvergiert schwach* gegen $\ell \in X'$, falls $\forall x \in X :$ $\ell_n(x) \to \ell(x)$ gilt. Notation: $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$.

2.47 Lemma. *In jedem normierten Raum X gilt:*

(a) Aus $x_n \xrightarrow{w} x$ in X folgt, dass die Folge (x_n) beschränkt ist, und $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

(b) Aus $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$ in X' folgt, dass die Folge (ℓ_n) beschränkt ist und $\|\ell\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|\ell_n\|$, sofern X vollständig ist.

2.48 Satz. *Sei X ein normierter Raum sowie $D \subseteq X$, $D' \subseteq X'$ mit $\overline{\operatorname{span}(D)} = X$ und $\overline{\operatorname{span}(D')} = X'$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

(a) *Es gilt* $x_n \xrightarrow{w} x$ *in* X *genau dann, wenn* $\sup_n \|x_n\| < \infty$ *und* $\ell(x_n) \to \ell(x)$ *für alle* $\ell \in D'$ *gilt.*

(b) X *sei ein Banachraum. Dann gilt* $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$ *in* X' *genau dann, wenn* $\sup_n \|\ell_n\| < \infty$ *und* $\ell_n(x) \to \ell(x)$ *für alle* $x \in D$ *gilt.*

2.49 Satz (Satz von Helly)**.** *Für einen separablen normierten Raum* X *besitzt jede beschränkte Folge* (ℓ_n) *in* X' *eine schwach*-konvergente Teilfolge.*

2.50 Satz. *In einem reflexiven Raum besitzt jede beschränkte Folge eine schwach-konvergente Teilfolge.*

2.51 Satz. *Ist* $U \subseteq X$ *ein abgeschlossener Unterraum in einem reflexiven Banachraum* X*, so existiert zu jedem* $x \in X$ *ein* $u_x \in U$ *mit* $\|x - u_x\| = \inf_{u \in U} \|x - u\|$*.*

2.52 Definition. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt schwach-folgenabgeschlossen, falls für alle Folgen (x_n) in A mit $x_n \xrightarrow{w} x$ auch $x \in A$ gilt. Eine Menge $A' \subseteq X'$ heißt schwach*-folgenabgeschlossen, falls für alle Folgen (ℓ_n) in A' mit $\ell_n \xrightarrow{w*} \ell$ auch $\ell \in A'$ gilt.

2.53 Satz. *Jede abgeschlossene konvexe Menge* C *in einem normierten Raum ist schwach-folgenabgeschlossen.*

2.6 Die Fouriertransformation

In diesem Abschnitt sind alle Funktionen komplexwertig.

2.54 Definition. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ist die Fouriertransformierte gegeben durch

$$\mathscr{F} f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle u,x\rangle} dx, \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

2.55 Satz. *Die Fouriertransformation* $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ *ist ein stetiger linearer Operator mit* $\|\mathscr{F}\| = 1$*.*

2.56 Definition. Der Schwartzraum auf $\mathbb{R}^d$ ist gegeben durch

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\Big|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : \lim_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta f(x) = 0 \Big\}.$$

2.57 Satz. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *und* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ *gilt:*

(a) $\mathscr{F} f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $D^\alpha(\mathscr{F} f)(u) = i^{|\alpha|} \mathscr{F}(x^\alpha f)(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$.

(b) $\mathscr{F}(D^\alpha f)(u) = (-i)^{|\alpha|} u^\alpha \mathscr{F} f(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$.

(c) $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

2.58 Lemma. *Für* $\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, *gilt* $\mathscr{F}\varphi(u) = e^{-|u|^2/2}$, $u \in \mathbb{R}^d$.

2.59 Satz. *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ *gilt* $\mathscr{F}(\mathscr{F} f)(x) = (2\pi)^d f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

2.60 Korollar. *$\mathscr{F}$ ist eine Bijektion von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ mit Inverser*

$$\mathscr{F}^{-1}f(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle u,x\rangle}du, \quad x \in \mathbb{R}^d,\ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d).$$

Ferner gilt $\langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle = (2\pi)^d\langle f,g\rangle$ für alle $f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

2.61 Korollar. *$\mathscr{F}$ lässt sich eindeutig von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ zu einem stetigen Operator $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen, und es gilt die Plancherelgleichung*

$$\forall f,g \in L^2(\mathbb{R}^d) :\ \langle \mathscr{F}f, \mathscr{F}g\rangle = (2\pi)^d\langle f,g\rangle.$$

Insbesondere ist $(2\pi)^{-d/2}\mathscr{F}$ ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R}^d)$ in sich.

2.62 Lemma. *Die Fortsetzung $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ erfüllt:*

(a) Für $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathscr{F}f(u) = \int f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$ für Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$.

(b) Für allgemeine $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathscr{F}f(u) = \lim_{R\to\infty}\int_{|x|\leqslant R} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$ mit Konvergenz im L^2-Sinn.

2.63 Definition. Für $m \geqslant 1$ ist der Sobolevraum der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$H^m(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,\Big|\, \forall|\alpha| \leqslant m :\ D^{(\alpha)}f \in L^2(\mathbb{R}^d) \Big\}.$$

Dabei existieren für Multiindizes α die schwachen Ableitungen $D^{(\alpha)}f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, falls

$$\forall g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) :\ \langle f, D^\alpha g\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle D^{(\alpha)}f, g\rangle.$$

2.64 Lemma. *Für $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ und $|\alpha| \leqslant m$ gilt $\mathscr{F}(D^\alpha f)(u) = (-i)^{|\alpha|}u^\alpha\mathscr{F}f(u)$ für Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$.*

2.65 Satz. *Es gilt $H^m(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,|\, (1+|u|^2)^{m/2}\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$.*

2.66 Satz (Soboleveinbettungssatz)**.** *Zu $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ und $m,k \in \mathbb{N}_0$ mit $m > k+d/2$ existiert $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d)$ mit $\tilde{f} = f$ fast überall. Nach Auswahl eines stetigen Repräsentanten gilt also die Einbettung $H^m(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^d)$ für $m - k > d/2$.*

3 Spektraltheorie

3.1 Spektrum und Resolvente

3.1 Definition. Sei $L \in L(X)$ ein beschränkter Operator.

(a) Die Resolventenmenge von L ist

$$\rho(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda - L)^{-1} \in L(X) \text{ existiert}\}.$$

(b) Die Resolventenabbildung ist

$$R : \rho(L) \to L(X), \quad R_\lambda := R_\lambda(L) := (\lambda - L)^{-1}.$$

(c) Das Spektrum von L ist

$$\sigma(L) = \mathbb{K} \setminus \rho(L).$$

(d) Das Punktspektrum von L ist

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \sigma(L) \mid \lambda - L \text{ ist nicht injektiv}\}.$$

$\lambda \in \sigma_p(L)$ heißt Eigenwert von L und jedes $x \in \ker(\lambda - L) \setminus \{0\}$ Eigenvektor oder Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ.

3.2 Satz. *Für $L \in L(X)$ gilt:*

(a) $\rho(L)$ ist offen. Für $\lambda_0 \in \rho(L)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$ gilt $\lambda \in \rho(L)$ und

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R_{\lambda_0}^{k+1}.$$

(b) Das Spektrum $\sigma(L)$ ist kompakt mit $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant \|L\|\}$.

(c) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $\sigma(L) \neq \varnothing$.

3.3 Definition. $r(L) := \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$ heißt Spektralradius von L.

3.4 Satz. *Es gilt $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant r(L)\}$. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = r(L)$.*

3.2 Spektralkalkül für selbstadjungierte Operatoren

3.5 Definition. Es sei H ein Hilbertraum.

(a) $L^* \in L(H)$ heißt (Hilbertraum-)Adjungierte von $L \in L(H)$, falls gilt

$$\forall x, y \in H : \langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle.$$

(b) $L \in L(H)$ heißt normaler Operator, falls $LL^* = L^*L$ gilt.

(c) $L \in L(H)$ heißt selbstadjungierter Operator, falls $L^* = L$ gilt.

(d) $U \in L(H)$ heißt unitärer Operator, falls $U^*U = UU^* = I$ gilt.

3.6 Lemma.

(a) Für $L \in L(H)$ gilt $\|LL^*\| = \|L^*L\| = \|L\| = \|L^*\|$.

(b) Für normale Operatoren $L \in L(H)$ gilt $r(L) = \|L\|$.

3.7 Satz. *Für $L \in L(H)$ auf einem Hilbertraum H gilt $\sigma(L) \subseteq \{\langle Lx, x \rangle \mid \|x\| = 1\}$. Insbesondere ist $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$ für selbstadjungierte L.*

3.8 Satz. *Ist $U \in L(H)$ unitär, so gilt $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \|\lambda\| = 1\}$.*

3.9 Satz (Stetiger Funktionalkalkül)**.** *Ist $L \in L(H)$ selbstadjungiert und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so existiert genau eine Abbildung $\Phi : C(\sigma(L)) \to L(H)$ mit*

(a) $\Phi(1) = I$, $\Phi(x) = L$;

(b) Φ *ist linear,* $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$ *(multiplikativ) und* $\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$ *(involutiv) für alle* $f, g \in C(\sigma(L))$;

(c) Φ *ist stetig.*

3.10 Definition. Wir schreiben $f(L) := \Phi(f)$ für Φ aus dem Satz.

3.11 Definition. Ein Banachraum A heißt Banachalgebra, falls es eine bilineare, assoziative Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ auf A gibt. A ist eine kommutative Banachalgebra, falls die Multiplikation kommutativ ist. Ein Element $e \in A$ mit $ex = xe = x$ für alle $x \in A$ heißt Einheit.

3.12 Korollar (Eigenschaften des Funktionalkalküls)**.** *Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selbstadjungiertes $L \in L(H)$ und $f \in C(\sigma(L))$ gilt:*

(a) $\|f(L)\| = \sup_{x\in\sigma(L)}|f(x)|$;

(b) $f \geqslant 0 \Rightarrow f(L) \geqslant 0$, *das heißt* $\forall x \in H : \langle f(L)x, x\rangle \geqslant 0$;

(c) $Lx = \lambda x \Rightarrow f(L)x = f(\lambda)x$;

(d) $\sigma(f(L)) = f(\sigma(L))$;

(e) *Kommutiert $A \in L(H)$ mit L ($AL = LA$), so auch mit $f(L)$ ($Af(L) = f(L)A$);*

(f) *$\{f(L) \,|\, f \in C(\sigma(L))\}$ ist eine kommutative Banachalgebra von normalen Operatoren in $L(H)$ mit Einheit $I = 1(L)$. $f(L)$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn f reellwertig ist.*

3.13 Korollar. *Ist $L \in L(H)$ ein selbstadjungierter positiver Operator und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so existiert genau ein selbstadjungierter positiver Operator $L^{1/2} \in L(H)$ mit $L^{1/2}L^{1/2} = L$.*

3.14 Satz. *Es sei $L \in L(H)$ ein selbstadjungierter Operator und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zerfällt $\sigma(L) = A \cup A^C$ in zwei topologisch getrennte Mengen (d.h. $\inf_{\lambda\in A,\mu\in A^C}|\lambda - \mu| > 0$), so sind $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A^C} \in C(\sigma(L))$ und $\mathbf{1}_A(L)$, $\mathbf{1}_{A^C}(L)$ Orthogonalprojektionen auf Unterräume $U, U^C \subseteq H$ mit $H = U \oplus U^C$, $U^C = U^\perp$ und $L(U) \subseteq U$, $L(U^C) \subseteq U^C$.*

3.15 Korollar. *Ist λ isolierter Punkt in $\sigma(L)$, $L \in L(H)$ selbstadjungiert, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $\lambda \in \sigma_p(L)$ und $\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(L)$ ist die Orthogonaprojektion auf den Eigenraum von L zu λ.*

3.3 Spektraltheorie kompakter Operatoren

3.16 Definition. $K \in L(X,Y)$ heißt kompakter Operator, falls $\overline{K(B_X)} \subseteq Y$ kompakt ist mit der Einheitskugel B_X in X. Äquivalent ist K kompakt, falls für jede beschränkte Folge $(x_n) \subseteq X$ eine Teilfolge (n_k) existiert, so dass (Kx_{n_k}) in Y konvergiert.

3.17 Definition. Zu $L \in L(X,Y)$ ist der adjungierte Operator $L' \in L(Y', X')$ definiert als $L'(\ell_Y)(x) := \ell_Y(Lx)$ für $\ell_Y \in Y'$, $x \in X$.

3.18 Satz (Schauder). *Seien $L \in L(X,Y)$ und X normierter, Y Banachraum. Dann ist L genau dann kompakt, wenn L' kompakt ist.*

3.19 Satz (Riesz-Schauder). *Es sei $K \in L(X)$ ein kompakter Operator auf einem Banachraum X sowie $S = I - K$ eine kompakte Störung der Identität. Dann gilt:*

(a) $\dim(\ker S) < \infty$*;*

(b) $\operatorname{ran}(S)$ *ist abgeschlossen und* $\dim(X/\operatorname{ran} S) < \infty$*;*

(c) S ist genau dann injektiv, wenn S surjektiv ist.

3.20 Korollar (Fredholmsche Alternative). *Sei $K \in L(X)$ ein kompakter Operator auf einem Banachraum X sowie $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dann hat entweder die homogene Gleichung $\lambda x - Kx = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ und in diesem Fall ist die inhomogene Gleichung $\lambda x - Kx = y$ für alle $y \in X$ eindeutig lösbar, oder aber es existieren endlich viele linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung und die inhomogene Gleichung besitzt nur für y in einem echten Unterraum $U \subsetneq X$ mit* $\dim(X/U) < \infty$ *eine Lösung.*

3.21 Satz (Spektrum kompakter Operatoren). *Für einen kompakten Operator $K \in L(X)$ auf einem Banachraum X gilt:*

(a) Im Fall $\dim(X) = \infty$ *gilt* $0 \in \sigma(K)$.

(b) Jedes $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert von K und der Eigenraum $\ker(\lambda - K)$ *ist endlich-diemnsional.*

(c) $\sigma(K) \setminus \{0\}$ ist höchstens abzählbar und besitzt keinen von Null verschiedenen Häufungspunkt.

3.22 Lemma. *Für einen normalen Operator $L \in L(H)$ auf einem Hilbertraum H gilt:*

(a) $Lx = \lambda x \Rightarrow L^* x = \bar{\lambda} x$*;*

(b) $Lx = \lambda x$, $Ly = \mu y$ *und* $\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$*;*

(c) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = \|L\|$;

(d) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt (c), falls L selbstadjungiert und kompakt ist.

3.23 Satz (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren)**.** *Sei $K \in L(H)$ kompakt sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ normal bzw. im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ selbstadjungiert. Dann existiert ein (eventuell endliches) Orthonormalsystem $(e_k)_{k \geqslant 1}$ in H sowie eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\mu_k)_{k \geqslant 1} \subseteq \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit*

$$H = \ker(K) \oplus \overline{\operatorname{span}\{e_k \,|\, k \geqslant 1\}}, \quad \ker(K) \perp \overline{\operatorname{span}\{e_k \,|\, k \geqslant 1\}}$$

sowie

$$\forall x \in H: \; Kx = \sum_{k \geqslant 1} \mu_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Die μ_k sind die gemäß Vielfachheit gezählten Eigenwerte ungleich Null von K und e_k die zugehörigen Eigenvektoren. Es gilt $\|K\| = \max_k |\mu_k|$.

3.24 Korollar. *Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt*

$$K = \sum_{\lambda_k \in \sigma(K) \setminus \{0\}} \lambda_k P_k$$

mit Konvergenz in Operatornorm, wobei $P_k : H \to \ker(\lambda_k - K)$ die Orthogonalprojektionen auf die Eigenräume bezeichnet.

3.25 Satz (Singulärwertzerlegung)**.** *Zu einem kompakten Operator $K \in L(H_1, H_2)$ zwischen Hilberträumen H_1, H_2 existieren Orthonormalsysteme (e_k) in H_1 und (f_k) in H_2 sowie eine (eventuell abbrechende) Folge $s_k \downarrow 0$ mit*

$$Kx = \sum_{k \geqslant 1} s_k \langle x, e_k \rangle f_k, \quad x \in H_1.$$

Die <u>Singulärwerte</u> s_k haben die Eigenschaft, dass s_k^2 die gemäß Vielfachheit gezählten Eigenwerte von K^*K sind, und die (e_k) sind die zugehörigen Eigenvektoren von K^*K.

3.26 Definition. Es sei $K \in L(H)$ ein kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H mit Singulärwertzerlegung $K = \sum_{k \geqslant 1} s_k \langle \bullet, e_k \rangle f_k$.

(a) K heißt <u>nuklearer</u> oder <u>Spurklassen-Operator</u>, falls $(s_k) \in \ell^1$. Man setzt $\|K\|_{nuk} := \|(s_k)\|_{\ell^1}$.

(b) K heißt <u>Hilbert-Schmidt-Operator</u>, falls $(s_k) \in \ell^2$. Man setzt $\|K\|_{HS} := \|(s_k)\|_{\ell^2}$.

3.27 Satz. *$K \in L(H)$ sei kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum H.*

(a) Es gilt $\|K\| \leqslant \|K\|_{nuk}$ und für jede Darstellung $K = \sum_{k \geqslant 1} a_k \langle \bullet, v_k \rangle w_k$ mit $a_k \geqslant 0$, $\|v_k\| = \|w_k\| = 1$ gilt $\|K\|_{nuk} \leqslant \sum_{k \geqslant 1} a_k$.

(b) Die nuklearen Operatoren in $L(H)$ bilden einen Unterraum $N(H)$ und $\|\bullet\|_{nuk}$ ist eine Norm auf $N(H)$.

3.28 Satz. *Der nukleare Operator $K \in N(H)$ besitze die Darstellung $K = \sum_{k\geqslant 1} a_k\langle \bullet, v_k\rangle w_k$ mit $\|v_k\| = \|w_k\| = 1$ und $(a_k) \in \ell^1$. Dann gilt für jede Orthonormalbasis (b_m) von H*

$$\sum_{k\geqslant 1} a_k\langle w_k, v_k\rangle = \sum_{m\geqslant 1}\langle Kb_m, b_m\rangle.$$

3.29 Definition. Die <u>Spur</u> von $K \in N(H)$ ist gegeben durch

$$\operatorname{tr}(K) := \sum_{m\geqslant 1}\langle Kb_m, b_m\rangle$$

für eine beliebige Orthonormalbasis (b_m) von H.

3.30 Lemma. *Für $K \in N(H)$ gilt:*

(a) $K^* \in N(H)$ und $\operatorname{tr}(K^*) = \overline{\operatorname{tr}(K)}$;

(b) für jedes $L \in L(H)$ sind $KL, LK \in N(H)$ mit $\|KL\|_{nuk} \leqslant \|K\|_{nuk}\|L\|$, $\|LK\|_{nuk} \leqslant \|L\|\|K\|_{nuk}$ und $\operatorname{tr}(KL) = \operatorname{tr}(LK)$.

3.31 Satz. *$K \in L(H)$ sei kompakter Operator auf einem seprablen Hilbertraum H.*

(a) Es gilt $\|K\| \leqslant \|K\|_{HS} \leqslant \|K\|_{nuk}$ und für jede Orthonormalbasis (b_m) von H gilt $\|K\|_{HS}^2 = \sum_{m\geqslant 1}\|Kb_m\|^2$.

(b) Die Hilbert-Schmidt-Operatoren in $L(H)$ bilden einen Unterraum $HS(H)$ und $\|\bullet\|_{HS}$ ist eine Norm auf $HS(H)$.

(c) Für $K_1, K_2 \in HS(H)$ ist $K_2^*K_1 \in N(H)$, und $\langle K_1, K_2\rangle_{HS} := \operatorname{tr}(K_2^*K_1)$ ist ein Skalarprodukt mit $\|K\|_{HS}^2 = \langle K, K\rangle_{HS}$. Für jede Orthonormalbasis (b_m) von H gilt $\langle K_1, K_2\rangle_{HS} = \sum_{m\geqslant 1}\langle K_1b_m, K_2b_m\rangle$.

3.32 Satz. *Sei $L^2(\mu) = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ separabel und μ σ-endlich. Dann ist $L \in L(L^2(\mu))$ genau dann Hilbert-Schmidt-Operator, wenn ein $k \in L^2(X \times X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \mu)$ existiert mit*

$$Lf(t) = \int_X k(t,s)f(s)\mu(ds) \text{ für } \mu\text{-fast alle } t \in X.$$

Dann gilt $\|L\|_{HS} = \|k\|_{L^2(\mu\otimes\mu)}$.