Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

1. Übungsblatt

1. Beim TÜV werden n Fahrzeuge überprüft. Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne A_i das Ereignis "das i-te Fahrzeug erhält die Prüfplakette". Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch mengentheoretische Verknüpfungen der Ereignisse A_i:

   (a) mindestens eines der n Fahrzeuge erhält keine Plakette;

   (b) kein Fahrzeug erhält eine Plakette;

   (c) genau ein Fahrzeug erhält keine Plakette;

   (d) höchstens ein Fahrzeug erhält eine Plakette.

2. Es seien $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra über Ω und $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ eine normierte, additive Mengenfunktion (d.h. $Q(\Omega) = 1$, $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathscr{F}$). Beweisen Sie, dass Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. σ-additiv) ist genau dann, wenn Q σ-stetig ist.
   Zusatzaufgabe: Finden Sie ein Beispiel einer normierten, additiven Mengenfunktion auf einer σ-Algebra, die kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
   Tipp: Recherchieren Sie das Konzept des Banach-Limes und betrachten Sie für $A \subseteq \mathbb{N}$ einen Banach-Limes $\ell((x_n(A))_{n\geqslant 1})$ der Folge $x_n(A) := \frac{|A \cap \{1,\ldots,n\}|}{n}$.

3. Lösen Sie die folgenden Textaufgaben jeweils mit vollständiger Angabe und Begründung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung:

   (a) Wie viele Rosinen müssen in 500g Teig vorhanden sein, damit ein 50g-Brötchen mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit eine Rosine enthält?

   (b) Ein gewisser Chevalier de Méré wunderte sich, dass er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen $6-4-1$, $6-3-2$, $5-5-1$, $5-4-2$, $5-3-3$, $4-4-3$ und die Augensumme 12 durch ebensoviele (welche?) Kombinationen erzeugt würde. Kann diese Beobachtung als „vom Zufall bedingt“ angesehen werden oder ist die Argumentation falsch?

4. Für ganze Zahlen $N \geqslant 1$, $0 \leqslant W \leqslant N$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant w \leqslant W$ gebe $p_{N,W,n}(w)$ die Wahrscheinlichkeit an, dass bei n-fachem Ziehen (ohne Zurücklegen) aus einer Urne mit W weißen und $N-W$ schwarzen Kugeln genau w weiße Kugeln gezogen werden.

   (a) Begründen Sie mit kombinatorischen Argumenten die Formel

   $$p_{N,W,n}(w) = \frac{\binom{N-W}{n-w}\binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}.$$

   (b) Weisen Sie anhand der Formel nach, dass $p_{N,W,n}$ eine Zähldichte auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, W\}$ ist (diese definiert die *hypergeometrische Verteilung*).

   (c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel die Wahrscheinlichkeit für k Richtige im Lotto 6 aus 49 ($0 \leqslant k \leqslant 6$).

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 2.5.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

2. Übungsblatt

1. Zu einer Tanzstunde kommen n Paare. Um für Abwechslung zu sorgen, wird jeder Dame rein zufällig einer der Herren zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird? Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.
   Anleitung: Sei A_k das Ereignis „Dame k wird ursprünglicher Partner zugelost“. Beweisen Sie die *Einschluss-Ausschluss-Formel*:
   $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{l=1}^{n} \Big((-1)^{l-1} \sum_{\{k_1,\dots,k_l\}\subseteq\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}\big(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_l}\big)\Big).$$
   Bestimmen Sie die rechte Seite mittels der Ergebnisse für Urnenmodelle.

2. Bei einer Stichwahl zwischen Kandidaten A und B werden die Stimmen nacheinander ausgezählt. Am Ende hat Kandidat A mit a Stimmen gegen Kandidat B mit b Stimmen gewonnen ($a > b$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A während der gesamten Auszählung vorne lag?
   Anleitung:
   (a) Begründen Sie die zwei Modellierungen mit der Grundmenge $\Omega_1 = \{M \subseteq \{1, \dots, a+b\} \,|\, |M| = a\}$ bzw. $\Omega_2 = \{g : \{0, \dots, a+b\} \to \mathbb{N}_0^2 \,|\, g(0) = (0,0),\ g(a+b) = (b,a),\ g(i)-g(i-1) \in \{(0,1),(1,0)\}, i = 1, \dots, a+b\}$ und der jeweiligen Gleichverteilung. Interpretieren Sie Ω_2 als Pfade auf dem Gitter $\mathbb{N}_0^2$ und stellen Sie eine Realisierung gemeinsam mit der Diagonalen in dem Gitter dar.
   (b) Formalisieren Sie die Ereignisse A_1 =„Pfad geht durch den Punkt $(1,0)$“ und A_2 =„Pfad geht durch den Punkt $(0,1)$, liegt aber nicht oberhalb der Diagonalen“ in Ω_2. Weisen Sie $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ und mit geeignetem Spiegelungsargument $|A_1| = |A_2|$ nach.
   (c) Schließen Sie darauf, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $(a-b)/(a+b)$ beträgt, indem Sie das entsprechende Ereignis durch A_1 und A_2 ausdrücken.

3. Es sei $\mathcal{Z} = \{Z_i \,|\, i \in I\}$ mit einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ eine abzählbare Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen.

   (a) Geben Sie die kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ über Ω an, die das Mengensystem $\mathcal{Z}$ umfasst, und beschreiben Sie alle $(\sigma(\mathcal{Z}), \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-messbaren Funktionen $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

   (b) Bestimmen Sie mittels (a) für $\Omega = [0, 1)$

   $$\mathcal{F}_n := \sigma\Big(\Big\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \,\Big|\, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}\Big\}\Big).$$

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} := \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n$ eine Algebra über $[0, 1)$ bildet. Ist $\mathcal{F}$ auch eine σ-Algebra?

   (c) Bestimmen Sie zu $f(x) = x$ und $n \in \mathbb{N}$ die $(\mathcal{F}_n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-messbare Funktion $f_n : [0, 1) \to \mathbb{R}$, die $\|f - f_n\|_{L^2}^2 = \int_{[0,1)} (f(x) - f_n(x))^2 dx$ unter allen $(\mathcal{F}_n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$-messbaren Funktionen minimiert. Untersuchen Sie $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

4. Es sei $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

   $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[1/n, \infty)}(x).$$

   Zeigen Sie, dass es sich um die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ handelt, und berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten

   $$P([1, \infty)),\ P([1/10, 1)),\ P(\{0\}),\ P((-5, 1/2)),\ P(\mathbb{Q}).$$

   Bestimmen Sie den *Träger* von P:

   $$\operatorname{supp}(P) = \bigcap \Big\{A \subseteq \mathbb{R} \,\Big|\, A \text{ ist abgeschlossen und } P(A) = 1\Big\}.$$

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 9.5.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

3. Übungsblatt

1. In einem Kreis vom Radius r werde „rein zufällig" eine Sehne ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Länge dieser Sehne größer als r?
Verwenden Sie folgende Zufallsbeschreibungen:

   (a) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt. Die Lage des Mittelpunkts ist gleichmäßig in der Kreisscheibe verteilt.

   (b) Die Sehne ist durch ihre Endpunkte eindeutig bestimmt und aus Symmetriegründen wählen wir den einen Endpunkt fest. Der andere möge gleichmäßig auf dem Kreisrand verteilt sein.

   (c) Die Sehne ist durch ihren Abstand vom Kreismittelpunkt und die entsprechende Richtung eindeutig festgelegt. Aus Symmetriegründen kann die Richtung fest gewählt werden, der Abstand sei gleichmäßig auf $[0, r]$ verteilt.

2. Es sei X eine exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass X in folgendem Sinne *gedächtnislos* ist:
$$\forall t, x > 0 : \; P(X > x + t \,|\, X > t) = P(X > x).$$
Erklären Sie diese Eigenschaft am Beispiel einer zufälligen Wartezeit.

   (b) Beweisen Sie umgekehrt, dass jede solche gedächtnislose Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}^+, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^+})$ exponential-verteilt ist.

   (c) Bestimmen Sie die Verteilung einer Zufallsvariable Y auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0))$, die im folgenden diskreten Sinne gedächtnislos ist:
$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \; P(Y \geqslant m + n \,|\, Y \geqslant m) = P(Y \geqslant n).$$

3. Betrachten Sie eine Lichtquelle im Abstand $r > 0$ einer (unendlich langen) Projektionsfläche, die im Winkel $\Phi \in (-\pi/2, \pi/2)$ strahlt. Wie ist der projizierte Lichtpunkt $X \in \mathbb{R}$ verteilt, wenn Φ gleichmäßig verteilt ist?

4. Simulation von Normalverteilungen:
Es seien U, V unabhängige $U((0,1))$-verteilte Zufallsvariablen. Setze $R = \sqrt{-2\log(U)}$, $X = R\cos(2\pi V)$ und $Y = R\sin(2\pi V)$. Beweisen Sie, dass X und Y unabhängige standard-normalverteilte Zufallsvariablen sind.
Tipp: Berechnen Sie die Dichte von R und betrachten Sie dann die Polarkoordinatentransformation $(R, V) \mapsto (X, Y)$ unter Verwendung des Dichtetransformationssatzes.

5. Betrachten Sie den Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des unendlich oft wiederholten Münzwurfs. Es sei $\Pi_n : \Omega \to \{0,1\}^n$ die durch $\Pi_n(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ gegebene Kooordinatenprojektion. Zeigen Sie, dass das System der *Zylindermengen*

$$\mathfrak{A} := \{\Pi_n^{-1}(A_n) \,|\, n \in \mathbb{N},\, A_n \subseteq \{0,1\}^n\}$$

eine Algebra über Ω bildet. Setzen Sie $P(\Pi_n^{-1}(A_n)) := |A_n|/2^n$ und weisen Sie nach, dass P ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$ definiert. Konstruieren Sie damit einen Wahrscheinlichkeitsraum und unabhängige Zufallsvariablen $(X_k)_{k \geqslant 1}$ mit $P(X_k = 1) = P(X_k = 0) = 1/2$, $k \in \mathbb{N}$ (unendliches Bernoulli-Schema).

6. Es seien $(X_k)_{k \geq 1}$ wie in Aufgabe 5 sowie

$$Y := \sum_{k=1}^{\infty} X_k 2^{-k}.$$

(a) Begründen Sie, weshalb Y eine Zufallsvariable ist, und bestimmen Sie $P(Y \in ((m-1)2^{-n}, m2^{-n}])$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0, 1, \dots, 2^n$.

(b) Schließen Sie, dass die Verteilungsfunktion von Y mit der Verteilungsfunktion der gleichmäßigen Verteilung auf $[0,1]$ übereinstimmt (d.h. Y ist $U[0,1]$-verteilt).

(c) Betrachten Sie nun die Zufallsvariablen

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} 2X_k 3^{-k}, \quad Z_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} 2X_k 3^{-k}.$$

Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von Z_n für $n = 1, 2, 5$ exakt und skizzieren Sie die von Z_∞ (Computereinsatz gestattet).

(d) Ist die Verteilungsfunktion von Z_∞ stetig? Besitzt Z_∞ eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

7. *[Zusatzsatzaufgabe]*
Ein Schatzsucher vermutet einen Schatz auf der Verbindungslinie zweier Pyramiden. Er überlegt sich folgende Strategie, um den Schatz zu finden: er gräbt zunächst rein zufällig an einem Punkt auf der Linie. Dann verfährt er iterativ: er wählt eine der beiden Pyramiden rein zufällig aus, geht die halbe Strecke (zwei Drittel der Strecke) in Richtung dieser Pyramide und gräbt; dies iteriert er bis zum Finden des Schatzes. Wird er bei beliebig langer Suche so den Schatz letztlich finden? Simulieren Sie beide Varianten für 10 000 Iterationen auf dem Intervall $[0,1]$ und zeichnen Sie jeweils einen Punkt für jeden Grabungsort. Erklären Sie das Ergebnis mittels Aufgabe 6. Was ergibt sich im Fall, dass der Schatz im von drei Pyramiden aufgespannten Dreieck liegt und der Schatzsucher jeweils eine der drei Pyramiden zufällig wählt?

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 23.5.16.
Die Aufgaben sind mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.
Korrektorensprechstunde: Freitags, 12:45 bis 13:30 Uhr, Raum 1.104, RUD 25.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

4. Übungsblatt

1. Über einen verrauschten Kanal werden binäre Ziffern versendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine '0' oder '1' übertragen werden soll, ist jeweils $0,5$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die empfangene Ziffer der versendeten entspricht, ist $0,9$.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 versendet wurde, wenn eine 1 empfangen wurde?

   (b) Es wird nun zur Sicherheit die zu übertragende Ziffer jeweils dreimal verschickt (d.h. 111 oder 000). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn 111 empfangen wurde?
   Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn bekannt ist, dass die Summe der drei empfangenen Ziffern gleich 2 ist?

2. Es seien $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie unabhängiger $(S_i, \mathscr{S}_i)$-wertiger Zufallsvariablen und $g_i : S_i \to T_i$ $(\mathscr{S}_i, \mathscr{T}_i)$-messbare Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(g_i(X_i))_{i\in I}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $(T_i, \mathscr{T}_i)$ bildet.

3. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben sind durch $F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x)$ bzw. $F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$.

   (b) Bestimmen Sie für den Fall, dass jedes X_i gleichmäßig auf $[0, 1]$ verteilt ist, die Dichte von M und m. Sind M und m unabhängig?

   (c) Die Zeit bis zum Zerfall eines radioaktiven Atoms wird durch die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ beschrieben. Wie ist die Zeit bis zum ersten Atomzerfall in einer Probe aus N solchen Atomen verteilt?

4. Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, auf $\{-1,1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen und

$$S_0 := 0; \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die sogenannte *symmetrische Irrfahrt*.

(a) Zeigen Sie für alle festen $k \in \mathbb{N}$:

$$P(|S_{n+k} - S_n| = k \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) = 1.$$

(b) Schließen Sie aus (a) auf $P(|S_n| \leq m \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) = 0$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und folgern Sie

$$P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| = \infty\Big) = 1.$$

(c) Zeigen Sie $P(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty) = P(\inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty) \geqslant 1/2$ und verwenden Sie das 0-1-Gesetz von Kolmogorov, um die Wahrscheinlichkeit exakt zu bestimmen.

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 30.5.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

5. Übungsblatt

1. Beweisen Sie: Besitzen P und Q Zähldichten p bzw. q auf $\mathbb{Z}$ (auf $\mathbb{N}_0$), so besitzt $P * Q$ die Zähldichte $(p * q)(k) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} p(k-m)q(m)$ (auf $\mathbb{N}_0$: $(p * q)(k) := \sum_{m=0}^{k} p(k-m)q(m)$).
   Bestimmen Sie $\mathrm{Bin}(n_1, p) * \mathrm{Bin}(n_2, p)$ für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$.

2. Es seien U_1, U_2, U_3, U_4 unabhängige gleichmäßig auf $[-1, 1]$ verteilte Zufallsvariablen.

   (a) Bestimmen Sie die Dichten von $U_1 + U_2$ und $U_1 + U_2 + U_3$.

   (b) Zeichnen Sie die Dichte von $S_n^* := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}(U_1 + \cdots + U_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ sowie die Dichte der Standardnormalverteilung in ein Koordinatensystem (Computereinsatz gestattet).

3. Die Anzahl der Eier, die ein Insekt legt, sei Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$. Aus jedem der sich unabhängig voneinander entwickelnden Eier schlüpfe mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ eine Larve. Berechnen Sie die Verteilung der Anzahl der Larven.
   Hinweis: Bedingen Sie auf die Anzahl der gelegten Eier unter Verwendung der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit.

4. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable X den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ (sofern er existiert) im Fall folgender Verteilungen:

   (a) $N(\mu, \sigma^2)$;

   (b) $\mathrm{Exp}(\lambda)$;

   (c) Cauchyverteilung (d.h. $f^X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$) und

   (d) $\chi^2(1)$-Verteilung.

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 6.6.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

6. Übungsblatt

1. Zeigen Sie $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty P(X \geqslant x)\,dx$ für beliebige nichtnegative Zufallsvariablen X, indem Sie $P(X \geqslant x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(y \geqslant x) P^X(dy)$ und anschließend die Integralvertauschung begründen.
   Darf man auch $P(X > x)$ statt $P(X \geqslant x)$ einsetzen?

2. Es sei μ ein beliebiges Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ sowie X eine reellwertige Zufallsvariable mit μ-Dichte $f^X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, das heißt f^X ist Borel-messbar mit $P(X \in B) = \int_B f^X \, d\mu$, $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

   (a) Beweisen Sie: Für eine Borel-messbare Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $h(X) \in \mathscr{L}^1 \iff \int_{\mathbb{R}} |h(x)| f^X(x)\, \mu(dx) < \infty$. In dem Fall gilt die Formel

   $$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f^X(x)\, \mu(dx).$$

   (b) Was ergibt sich in (a) mit dem Zählmaß μ auf $\mathbb{Z}$ für eine diskrete Zufallsvariable X mit Zähldichte p^X?

   (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert einer *zensierten* Exponentialverteilung mit Parametern $\lambda, z > 0$, das heißt einer Zufallsvariablen X mit

   $$P(X \in B) = \int_{[0,z] \cap B} \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda z} \mathbf{1}(z \in B), \quad B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}},$$

   indem Sie ein geeignetes Maß μ definieren, so dass X eine μ-Dichte f^X besitzt.
   Hinweis: Es gilt $\int f \, d(\mu_1 + \mu_2) = \int f \, d\mu_1 + \int f \, d\mu_2$ für $f \in \mathscr{L}^1(\mu_1 + \mu_2)$.

3. Charakterisieren Sie die Minimalstellen $m \in \mathbb{R}$ der Funktion $d : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $d(x) := \mathbb{E}[|X - x|]$ für eine beliebige Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^1$.
   Anleitung: Zeigen Sie für beliebige $x < m$

   $$\mathbb{E}[|X - x|] - \mathbb{E}[|X - m|] \geqslant (x - m) P(X < m) + (m - x) P(X \geqslant m),$$

   indem Sie $1 = \mathbf{1}(X \leqslant x) + \mathbf{1}(X \in (x, m)) + \mathbf{1}(X \geqslant m)$ schreiben, und betrachten Sie analog den Fall $x > m$.

4. Bei der Fußballeuropameisterschaft treten 24 Mannschaften mit einem Kader von jeweils 23 Spielern gegeneinander an. Es gibt von jedem Spieler ein Sammelbildchen. Am Kiosk wird ein sichtgeschützt verpacktes Bildchen für fünf Cent verkauft. Wieviel wird ein Sammler im Mittel am Kiosk ausgeben, bis er von jedem Spieler (mindestens) ein Bildchen besitzt?
   Tipp: Sei N_i die Anzahl der erworbenen Bildchen, bis man von i Spielern ein Bildchen besitzt. Bestimmen Sie die Verteilung von $D_i = N_i - N_{i-1}$.
   Zusatzaufgabe: Was ergibt sich, falls sich zwei Sammler zusammentun und Bildchen tauschen?

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 13.6.16.
Korrektorensprechstunde: Freitags, **12:30** bis 13:30 Uhr, Raum 1.104, RUD 25.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

7. Übungsblatt

1. Zu Daten $(x_i, y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ in $\mathbb{R}^2$ wird die *Regressionsgerade* $y = \hat{a}x + \hat{b}$ definiert mittels der *Methode der kleinsten Quadrate*:

$$(\hat{a}, \hat{b}) := \operatorname{argmin}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (ax_i + b) \Big)^2 \Big\}.$$

   (a) Bestimmen Sie $\hat{a}$ und $\hat{b}$ als Funktion der empirischen Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, der empirischen Varianzen $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, $\bar{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ und der empirischen Korrelation $\bar{\rho}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/(\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y)$ (falls $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y > 0$).

   (b) Um die Abhängigkeit der durch Melanome (Hautkrebs) verursachten Todesfälle von der Sonneneinstrahlung zu bestimmen, wurde in den Bundesstaaten der USA die Mortalität (Todesfälle pro 10^7 Einwohner) und der Breitengrad erfasst. Bestimmen Sie aus den Daten

Staat	Delaware	Iowa	Michigan	New Hampshire	Oklahoma	Texas	Wyoming
Mort.	200	128	117	129	182	229	134
Breite	39	42	44	44	35	31	43

   die zugehörige Regressionsgerade und zeichnen Sie diese zusammen mit den Daten in ein Koordinatensystem (Computereinsatz gestattet). Welche Mortalität ist in Ohio (Breitengrad 40) in etwa zu erwarten?

2. Es sei $X \in \mathscr{L}^4$ eine Zufallsvariable mit symmetrischer Verteilung (d.h. $P(X \geqslant x) = P(X \leqslant -x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Setze $Y = X^2$. Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert, aber im Allgemeinen nicht unabhängig sind. Bestimmen Sie die beste lineare Vorhersage von Y durch X (bzgl. mittlerem quadratischen Fehler). Welche ist die beste nichtlineare Vorhersage?

3. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Zeigen Sie für $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$:

   (a) Die Zufallsvariablen $\bar{X}$ und $\bar{\sigma}^2$ sind unabhängig.
   Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\bar{X}$ und $(X_k - \bar{X})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ gemeinsam normalverteilt und unabhängig sind.

   (b) $\bar{X}$ ist $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilt und $\frac{n}{\sigma^2}\bar{\sigma}^2$ ist $\chi^2(n-1)$-verteilt (zur Erinnerung $\chi^2(p) = \chi^2(1)^{*p}$). Was ist der Erwartungswert von $\bar{\sigma}^2$?

4. Es sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit Dichte $f^{(X,Y)}$ gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant x \,|\, Y \in [y-h, y+h])$ für $x, y \in \mathbb{R}, h > 0$ mit $f^Y(y) > 0$ und f^Y stetig bei y. Zeigen Sie, dass der Grenzwert der bedingten Wahrscheinlichkeit für $h \to 0$ existiert und gleich
   $$\frac{\int_{-\infty}^x f^{(X,Y)}(\xi, y)\, d\xi}{f^Y(y)} =: F^{X|Y=y}(x)$$
   ist.

   (b) Man definiert daher die *bedingte Dichte* von X gegeben $Y = y$ als
   $$f^{X|Y=y}(x) := \frac{\partial}{\partial x} F^{X|Y=y}(x) = \frac{f^{(X,Y)}(x, y)}{f^Y(y)}, \text{ sofern } f^Y(y) > 0.$$
   Zeigen Sie, dass $f^{X|Y=y}$ in der Tat eine Dichtefunktion ist für alle y mit $f^Y(y) > 0$.

   (c) Ein Stock der Länge 1 wird an einer zufälligen Stelle gebrochen (gleichverteilt). Das längere Stück wird wiederum an einer zufälligen Stelle (gleichverteilt) gebrochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die drei Teile zu einem Dreieck legen lassen? Begründen Sie Ihre Modellierung mittels bedingter Dichte.

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 20.6.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

8. Übungsblatt

1. Es seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ Zufallsvariablen, die P-fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergieren. Folgern Sie schrittweise:

   (a) $P(\exists \varepsilon > 0\ \forall n \geqslant 1 : \sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon) = 0$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0 :\ P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon\}) = 0$.

   (c) $\forall \varepsilon > 0 :\ \lim_{n\to\infty} P(\sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon) = 0$.

   (d) X_n konvergiert gegen X P-stochastisch.

2. Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{L}^2$-Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

   (a) Es gelte $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mu \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0$.
   Zeigen Sie, dass Y_n für $n \to \infty$ in $\mathcal{L}^2$ sowie stochastisch gegen μ konvergiert.

   (b) Folgern Sie aus Teil (a) eine Verallgemeinerung (bezüglich Annahmen an Erwartungswert und Varianz) des schwachen Gesetzes der großen Zahlen.

3. Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. Bei jeder Runde $i = 1, \ldots, n$ setzt er sein gesamtes Kapital ein, es wird eine faire Münze geworfen, und bei 'Kopf' erhält er den anderthalbfachen Einsatz zurück, bei 'Zahl' nur den halben.

   (a) Stellen Sie das Kapital nach der n-ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$ mit geeigneten unabhängigen Zufallsvariablen R_i dar.

   (b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}[K_n] = 1$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass trotzdem $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ (fast sicher) gilt.
   Tipp: Betrachten Sie $\log(K_n)$.

   (d) Wogegen konvergiert der Median von K_n? Erklären Sie anschaulich die Gründe für das Grenzwertverhalten von K_n, $\mathbb{E}[K_n]$ und dem Median von K_n.

4. Es seien $(X_n)_{n \geqslant 1}$ und X reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

   (a) Beweisen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{P} X$ die Existenz einer Teilfolge $(X_{n(k)})_{k \geqslant 1}$ folgt mit $X_{n(k)} \to X$ P-fast sicher für $k \to \infty$.
   Hinweis: Benutzen Sie ein Borel-Cantelli-Argument.

   (b) Für den Fall, dass X_n nicht P-stochastisch gegen X konvergiert, zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(X_{n(k)})_{k \geqslant 1}$ gibt mit

   $$\forall k \geqslant 1 : P(|X_{n(k)} - X| > \varepsilon) \geqslant \varepsilon.$$

   Schließen Sie weiter, dass diese Teilfolge keine Teilteilfolge $(X_{n(k(l))})_{l \geqslant 1}$ besitzt, die P-f.s. gegen X konvergiert.

   (c) Folgern Sie aus (a) und (b) die Äquivalenz: Die Folge (X_n) konvergiert P-stochastisch gegen X genau dann, wenn jede Teilfolge $(X_{n(k)})$ eine Teilteilfolge $(X_{n(k(l))})$ besitzt mit $X_{n(k(l))} \to X$ P-f.s. für $l \to \infty$.

   Freiwillig: Folgern Sie, dass fast sichere Konvergenz nicht metrisierbar ist auf Wahrscheinlichkeitsräumen, wo stochastische und fast sichere Konvergenz nicht identisch sind. Geben Sie Wahrscheinlichkeitsräume an, wo fast sichere und stochastische Konvergenz identisch sind.

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 27.6.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

9. Übungsblatt

1. Es seien $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}), X = (X_1, X_2)$ zweidimensionale Zufallsvektoren mit $X_n \xrightarrow{d} X$. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt $X_{n,i} \xrightarrow{d} X_i$ für $i \in \{1, 2\}$.

   (b) Es gilt $aX_{n,1} + bX_{n,2} \xrightarrow{d} aX_1 + bX_2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $X_{n,1}X_{n,2} \xrightarrow{d} X_1X_2$.

   (c) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass $X_{n,i} \xrightarrow{d} X_i$ für $i \in \{1, 2\}$ im Allgemeinen nicht ausreicht, um auf (b) zu schließen.

2. Es sei $\|P-Q\|_{TV} = \sup_{A\in\mathscr{F}}|P(A)-Q(A)|$ der *Totalvariationsabstand* zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen P und Q auf $(\Omega, \mathscr{F})$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\sup_{\|f\|_\infty\leqslant 1}|\int f dP - \int f dQ| = 2\|P - Q\|_{TV}$ gilt, wobei sich das Supremum über alle messbaren $f : \Omega \to \mathbb{R}$ erstreckt mit $\|f\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)| \leqslant 1$.
   Tipp: Betrachte die Mengen $\{f > 0\}$ und $\{f < 0\}$.

   (b) Schließen Sie für $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathscr{F} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^d}$, dass $P_n \to P$ in Totalvariationsabstand die schwache Konvergenz $P_n \xrightarrow{w} P$ impliziert.

   (c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Umkehrung von (b) nicht gilt.

3. Es seien X_1, X_2 zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungen P_1 und P_2 auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Funktionen gilt

   $$\begin{aligned} \varphi^{P_1 * P_2}(u) &= \varphi^{P_1}(u)\varphi^{P_2}(u), \quad \text{d.h.} \\ \varphi^{X_1+X_2}(u) &= \varphi^{X_1}(u)\varphi^{X_2}(u), \quad u \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   (b) Betrachten Sie nun $X_i \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i > 0$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion, dass $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt ist zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ und daher $(\mathrm{Poiss}(\lambda))_{\lambda>0}$ eine Faltungshalbgruppe bildet.

4. Sei φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^m(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie $\varphi \in C^m(\mathbb{R})$ mit $\varphi^{(k)}(0) = i^k\, \mathbb{E}[X^k], k = 0, \ldots, m$.

   (b) Bestimmen Sie mit (a) die Momente $\mathbb{E}[X^k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ im Fall $X \sim N(0,1)$.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $r_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert mit $\sup_{u\in\mathbb{R}} |r_m(u)| \leqslant 3\, \mathbb{E}[|X|^m]$ und $r_m(u) \to 0$ für $u \to 0$, so dass gilt

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(iu)^k}{k!}\, \mathbb{E}[X^k] + \frac{(iu)^m}{m!} r_m(u).$$

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 4.7.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

10. Übungsblatt

1. Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann bezeichnet $m^X(s) = \mathbb{E}[s^X]$ für $s \in (-1, 1)$ (mit $0^0 := 1$) die *erzeugende Funktion* der Verteilung von X. Zeigen Sie:

   (a) m^X ist bei $s = 0$ beliebig oft differenzierbar mit $m^X(0) = p^X(0)$ und Ableitungen $(m^X)^{(k)}(0) = k! p^X(k)$, $k \in \mathbb{N}$. Schließen Sie, dass m^X die Verteilung von X eindeutig bestimmt.

   (b) Es gilt stets $\lim_{s\uparrow 1}(m^X)'(s) = \mathbb{E}[X]$, selbst im Fall $\mathbb{E}[X] = +\infty$. Wie kann man $\mathbb{E}[X^2]$ berechnen?

   (c) Bestimmen Sie m^X für $\mathrm{Bin}(n,p)$- und $\mathrm{Poiss}(\lambda)$-verteilte X und gemäß (b) jeweils Erwartungswert und Varianz.

2. Es sei $(X_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter (i.i.d.) reeller Zufallsvariablen. Dann bezeichnet $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, die *empirische Verteilungsfunktion*. Weisen Sie nach:

   (a) F_n ist die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes μ_n, des sogenannten *empirischen Maßes* von $X_1, \ldots, X_n$.

   (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_n(x) \to F(x) := P(X_1 \leqslant x)$ P-fast sicher.

   (c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} N(0, F(x)(1 - F(x)))$.
   Hinweis: Betrachte die Fälle $F(x) = 0$ und $F(x) = 1$ separat.

3. Ziel ist der Beweis des *Satzes von Glivenko-Cantelli*: Für die empirischen Verteilungsfunktionen gilt sogar fast sicher gleichmäßige Konvergenz, d.h. $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)| \to 0$ P-f.s.

   (a) Betrachten Sie $U_i \sim U([0,1])$ i.i.d. mit empirischer Verteilungsfunktion G_n und Verteilungsfunktion G. Wählen Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 2/\varepsilon$ sowie $E_m := \{k/m \,|\, k = 0, 1, \ldots, m\}$. Schließen Sie aus $G_n(x) \to G(x)$ P-f.s. für $x \in E_m$, dass $\max_{x\in E_m}|G_n(x,\omega) - G(x)| \leqslant \varepsilon/2$ und somit $\sup_{x\in[0,1]}|G_n(x,\omega) - G(x)| \leqslant \varepsilon$ gilt für alle $n \geqslant N$ mit $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ geeignet und P-fast alle $\omega \in \Omega$. Der Satz von Glivenko-Cantelli gilt also für $X_i \sim U([0,1])$.

   (b) Für beliebige Verteilungsfunktionen F konstruiere X_i mit Verteilungsfunktion F gemäß Quantilstransformation $X_i = F^{-1}(U_i)$ mit (U_i) aus (a) und Rechtsinverser F^{-1}. Weisen Sie nach, dass für die empirischen Verteilungsfunktionen $F_n(x) = G_n(F(x))$, $x \in \mathbb{R}$, gilt. Schließen Sie den Beweis mittels (a) ab.

4. Finden Sie eine alternative Beweisführung für den zentralen Grenzwertsatz. Erklären Sie die Hauptargumente und geben Sie Ihre Quelle an. Welche Eigenschaft der Normalverteilung wird benutzt?

Abgabe *vor* der Vorlesung, nach Aufgaben getrennt, am Montag, dem 11.7.16.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

Probeklausur

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. (5P)

   (a) Ist X exponentialverteilt, dann gilt:
   $$\forall t, x > 0: \; P(X > x + t \,|\, X > t) = P(X > x).$$

   (b) Aus $X_n \stackrel{d}{\to} X$ folgt $E[|X_n|^p] \to E[|X|^p]$ für alle $p \geq 1$.

   (c) Die charakteristische Funktion bestimmt die Verteilung einer Zufallsvariablen eindeutig.

   (d) Die Normalverteilung $(N(\mu, 1))_{\mu \geq 0}$ bildet eine Faltungshalbgruppe.

   (e) Wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen aus L^2 sind, dann sind $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ unabhängig.

   (f) Zwei Zufallsvariablen X, Y aus L^2 sind genau dann unabhängig, wenn $E[XY] = E[X]E[Y]$ gilt.

   (g) Sind P_n Wahrscheinlichkeitsmaße mit charakteristischen Funktionen (φ_n) und gilt $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \psi(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und eine Funktion ψ, so ist ψ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ und es gilt $P_n \stackrel{w}{\to} P$.

   (h) Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto „6 aus 49“ ist $\binom{49}{6}^{-1}$.

   (i) Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Dann ist die zugehörige Verteilungsfunktion überall differenzierbar.

   (j) Aus $X_n \stackrel{d}{\to} X$ und $Y_n \stackrel{d}{\to} Y$ folgt $X_n + Y_n \stackrel{d}{\to} X + Y$.

   (k) Zwei Ereignisse A, B mit $P(B) > 0$ sind genau dann unabhängig, wenn $P(A|B) = P(A)$ gilt.

   (l) Für $p_n \in [0, 1]$ mit $np_n \to \lambda$ gilt $Bin(n, p_n) \stackrel{w}{\to} Poiss(\lambda)$.

2. Stochastische Konvergenz und Borel-Cantelli.

   (a) Formulieren Sie die Tschebyschew-Ungleichung und folgern Sie, dass $X_n \stackrel{L^2}{\to} X$ auch $X_n \stackrel{P}{\to} X$ impliziert. (2P)

   (b) Formulieren Sie beide Teile des Lemmas von Borel-Cantelli und beweisen Sie einen davon. (2P)

(c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass stochastische Konvergenz im Allgemeinen nicht L^2-Konvergenz impliziert. (1P)

3. Der Zufallsvektor $X = (X_1, X_2)$ sei gleichmäßig auf der Ellipse $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 \leqslant 1\}$ mit Flächeninhalt 2π verteilt.

   (a) Geben Sie die zweidimensionale Dichte von X an. Zeigen Sie, dass X_1 und X_2 folgende Dichten für $z \in \mathbb{R}$ besitzen: (2P)

$$f_1(z) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - z^2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(z),$$
$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - z^2}\mathbb{1}_{[-2,2]}(z).$$

   (b) Sind X_1 und X_2 unkorreliert? Sind X_1 und X_2 unabhängig? (3P)

4. Ein Wettbüro hat n gleichartige Wetten abgeschlossen, wobei jede Wette eine zufällige Auszahlung X_i ergibt. Es wird angenommen, dass die X_i unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert m und Varianz $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Jede Wette kostet jeweils $a = m + \lambda\sigma^2$ für ein $\lambda > 0$.

   (a) Es bezeichne R die Kapitalreserve des Wettbüros und S_n die Summe der Auszahlungen X_i. Bestimmen Sie näherungsweise die Ruinwahrscheinlichkeit $P(S_n > R + na)$ des Wettbüros. (2P)

   (b) Wie groß ist nach (a) die Ruinwahrscheinlichkeit für $R = 950$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0,001$ und $n = 2500$? Vergleichen Sie die ermittelte Wahrscheinlichkeit mit der Schranke aus der Tschebyschev-Ungleichung. (2P)

   (c) Wie groß muss nach (a) die Anzahl der Wetten mindestens sein, damit für $R = 0$, $\sigma = 20$ und $\lambda = 0,001$ die näherungsweise Ruinwahrscheinlichkeit kleiner als $0,025$ ausfällt? (1P)

   Hinweis: Nutzen Sie die Tabelle unten, um Funktionswerte der Verteilungs- und Quantilfunktion der Standardnormalverteilung zu bestimmen.

Tabelle der Standardnormalverteilung $N(0,1)$: (Lesebeispiel: $\Phi(1,18) \approx 0,88100$)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670

Abgabe am **Freitag, dem 15.07.16**, vor der Vorlesung, die Aufgaben brauchen nicht getrennt werden. Abgeben darf nur, wer weniger als 50% der Punkte hat. Die erste Aufgabe wird nur korrigiert, wenn auch jeweils eine kurze Begründung angegeben wird.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2016
Humboldt-Universität zu Berlin

Fragenkatalog zur Prüfung

1. Formuliere und beweise: Poissonscher Grenzwertsatz, Eigenschaften von Verteilungsfunktionen, Dichtetransformationssatz (einfache Version), Bayesformel, Lemma von Borel-Cantelli, Jensensche Ungleichung, Rechenregeln von Erwartungswert, Varianz und Kovarianz, (einfache) Eigenschaften der mehrdimensionalen Normalverteilung, Markovungleichung, Tschebyschevungleichung, schwaches Gesetz der großen Zahlen, zentraler Grenzwertsatz, continuous mapping theorem.

2. Formuliere und gebe die Hauptargumente im Beweis an: Satz von Vitali, 0-1-Gesetz von Kolmogorov, starkes Gesetz der großen Zahlen, Auswahlsatz von Helly, Lévy-Stetigkeitssatz, Grenzwertsatz nach Lindeberg, Satz von Glivenko-Cantelli.

3. Was ist die Verteilung P^X einer Zufallsvariablen X? Wie ist der Erwartungswert von einer reellwertigen Zufallsvariablen X allgemein definiert? Für welche Funktionen h gilt $\mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)P^X(dx)$ und wie beweist man dies? Wie kann man den Erwartungswert bei Existenz von Dichten bzw. Zähldichten berechnen? Welches Fehlerkriterium minimiert der Erwartungswert, welches ein Median?

4. Welche Konvergenzarten von Zufallsvariablen gibt es? Welche Implikationen gelten und welche nicht (Gegenbeispiele!)?

5. Welche Kriterien für Unabhängigkeit von Zufallsvariablen gibt es? Was ist der Zusammenhang zum Produktmaß/Produktraum? Was gilt unter Unabhängigkeit und was bereits für unkorrelierte Zufallsvariablen?

6. Gib Dichte bzw. Zähldichte an von Gleichverteilung, Binomialverteilung, hypergeometrischer Verteilung, geometrischer Verteilung, Poissonverteilung, Normalverteilung, Exponentialverteilung, χ^2-Verteilung, Γ-Verteilung. Welche Phänomene kann man damit modellieren? Berechne Erwartungswert, Varianz und charakteristische Funktion von Binomialverteilung, Poissonverteilung, Normalverteilung. Welche Verteilungen bilden Faltungshalbgruppen?

7. Löse die Übungsaufgaben erneut. Gib insbesondere bei den Textaufgaben jeweils eine exakte Definition des Wahrscheinlichkeitsraums und der Zufallsvariablen und begründe gut die Modellierung.

8. Überlege zu jedem Resultat in 1. und 2. Beispiele sowie Gegenbeispiele, wo Voraussetzungen verletzt sind und die Aussage nicht gilt.