Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 1

1. Beweisen Sie:
   (a) Ein Unterraum eines Banachraums bildet genau dann selbst einen Banachraum, wenn er abgeschlossen ist.
   (b) Jeder Unterraum von endlicher Dimension ist abgeschlossen und bildet damit einen Banachraum.

2. Es sei U ein Unterraum des normierten Raums X. Zeigen Sie:
   (a) Der Abschluss $\bar{U}$ von U in X bildet ebenfalls einen Unterraum von X.
   (b) Ist $d = \{a \in \ell^\infty \mid a_n \neq 0$ für nur endlich viele $n\}$ der Raum der abbrechenden Folgen, so gilt $\bar{d} = c_0$ in ℓ^∞ mit $c_0 = \{a \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.
   (c) Die Vervollständigung von $(d, \|\bullet\|_\infty)$ ist $(c_0, \|\bullet\|_\infty)$, bis auf isometrische Isomorphie. Was ist die Vervollständigung von $(d, \|\bullet\|_{\ell^p})$ für $1 \leqslant p < \infty$?

3. Formulieren und beweisen Sie die Hölder- und Minkowski-Gleichungen in $L^p(\mu)$ für allgemeine Maße μ.

4. Lösen Sie Aufgabe I.4.20 zu Orliczräumen in Dirk Werners *Funktionalanalysis* (Seite 39 der online-Version).
   Freiwillig: Beschreiben Sie die Verbindung von subgaußschen Wahrscheinlichkeitsdichten (Recherche!) zu Orliczräumen.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 24.10.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 2

1. Beweisen Sie:

   (a) Für jede Teilmenge M eines Hilbertraums gilt:
   $M^\perp = \operatorname{span}(M)^\perp = \overline{\operatorname{span}(M)}^\perp$.

   (b) Ein Unterraum U eines Hilbertraums liegt genau dann dicht, wenn $U^\perp = \{0\}$ gilt.

2. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für ein Orthonormalsystem S im Hilbertraum H äquivalent sind:

   (a) S bildet eine Orthonormalbasis;

   (b) $x = \sum_{e\in S} \langle x, e\rangle e$ für alle $x \in H$;

   (c) $\|x\|^2 = \sum_{e\in S} |\langle x, e\rangle|^2$ für alle $x \in H$ (Parseval-Identität);

   (d) $S^\perp = \{0\}$.

3. Beweisen Sie: Sei $U \subsetneq X$ ein abgeschlossener echter Unterraum eines normierten Raums X und $\delta \in (0,1)$. Dann existiert $x_\delta \in X$ mit $\|x_\delta\| = 1$ und $\inf_{u\in U} \|x_\delta - u\| \geqslant 1 - \delta$ (Rieszsches Lemma). Anleitung:

   (a) Es gibt $x \in X$ mit $d := \inf_{u\in U} \|x - u\| > 0$.

   (b) Wähle $u_\delta \in U$ mit $\|x - u_\delta\| < d/(1-\delta)$. Dann leistet $x_\delta := \frac{x-u_\delta}{\|x-u_\delta\|}$ das Gewünschte (formaler Beweis und Skizze!).

4. Zeigen Sie folgende wichtige Äquivalenz für einen normierten Raum X und seine Einheitskugel $B_X := \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$:

   $$\dim X < \infty \iff B_X \text{ ist kompakt.}$$

   Anleitung:

   (a) Für '$\Rightarrow$' zeige, dass X isomorph zu einem $\mathbb{K}^n$ ist.

   (b) Für '$\Leftarrow$' betrachte die Kontraposition und konstruiere für $\dim X = \infty$ mit dem Rieszschen Lemma induktiv eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geqslant 1/2$ für alle $m, n \geqslant 1$.

   Geben sie ein konkretes Beispiel einer Funktionenfolge in $B_{C([0,1])}$ an, die keine konvergente Teilfolge (bzgl. $\|\bullet\|_\infty$) besitzt.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 31.10.19.
Korrektor: Anton Tiepner, Email: tiepnera@math.hu-berlin.de
Sprechstunde: Di 15:00-15:30, Raum 1.108, RUD 25

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 3

1. Zeigen Sie für $C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$:
   (a) $(C_0(\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$ ist Banachraum. *Tipp:* $C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_b(\mathbb{R})$.
   (b) Es sei $M \subseteq C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen, beschränkt, $\{f|_{[-R,R]} \,|\, f \in M\}$ sei gleichgradig stetig auf $[-R, R]$ für jedes $R > 0$ und es gelte
   $$\lim_{R\to\infty} \sup_{f\in M} \sup_{|x|>R} |f(x)| = 0.$$
   Dann ist M kompakt in $(C_0(\mathbb{R}), \|\bullet\|_\infty)$.
   Tipp: Verallgemeinere den Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli, z.B. aus dem Buch *Funktionalanalysis* von D. Werner.
   (c) *Frewillig:* Die Bedingungen in (b) sind auch notwendig für die Kompaktheit von M.

2. Zeigen Sie für die Sobolevräume $W^{1,p}([a, b])$, dass die Einheitskugeln $B_{1,p} = \{f \in W^{1,p}([a, b]) \,\|f\|_{1,p} \leqslant 1\}$ relativ kompakt in $L^p([a, b])$ sind für $1 \leqslant p < \infty$.

3. Beweisen Sie: Jedes endliche Maß μ auf der Borel-σ-Algebra $\mathfrak{B}_T$ eines vollständigen und separablen metrischen Raums T ist *regulär* in dem Sinne, dass für alle $B \in \mathfrak{B}_T$
   $$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \text{ kompakt}, K \subseteq B\} = \inf\{\mu(O) \,|\, O \text{ offen}, B \subseteq O\}.$$
   Anleitung: Sei $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}_T$ die Familie aller B, die die beiden Gleichungen erfüllen.
   (a) $T \in \mathfrak{D}$: sei $B_r(x) = \{y \in T \,|\, d(y, x) \leqslant r\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist $K = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_j)$ mit einer in T dichten Folge $(x_j)_{j\geqslant 1}$ und k_n so groß, dass $\mu(T \setminus \bigcup_{j=1}^{k_n} B_{1/n}(x_j)) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$, kompakt mit $\mu(T \setminus K) \leqslant \varepsilon$.
   (b) $F \in \mathfrak{D}$ für alle F abgeschlossen: betrachte einerseits die kompakten Mengen $F \cap K$ mit K aus (a), finde andererseits offene Mengen $O_n \supseteq F$ mit $\bigcap_n O_n = F$ und benutze σ-Stetigkeit von μ.
   (c) $B \in \mathfrak{D} \Rightarrow T \setminus B \in \mathfrak{D}$: argumentiere mittels Komplementen unter Zuhilfenahme der kompakten Mengen K aus (a).
   (d) $B_n \in \mathfrak{D}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathfrak{D}$: benutze $\mu(\bigcup_{n\geqslant 1} B_n) = \lim_{N\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^N B_n)$.
   (e) $\mathfrak{D}$ ist $\cap$-stabil und somit eine σ-Algebra, die die offenen Mengen erhält, so dass $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}_T$.

4. Weisen Sie nach, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ nicht separabel ist, indem Sie die überabzählbare Teilmenge $\{(\mathbf{1}_M(n))_{n\geqslant 1} \mid M \subseteq \mathbb{N}\}$ betrachten mit Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_M$. Beweisen Sie mit einer ähnlichen Idee, dass auch $L^\infty([0,1])$ nicht separabel ist.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 7.11.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 4

1. Es seien $(K_1, d_1), (K_2, d_2)$ kompakte metrische Räume und $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Betrachte den Produktraum $K_1 \times K_2$ mit Metrik $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$, den Produktmaßraum $(X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ und definiere das Tensorprodukt $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) := f_1(x_1) f_2(x_2)$ von Funktionen f_1, f_2. Zeigen Sie:

   (a) Die Menge $\{\sum_{i=1}^n f_{i,1} \otimes f_{i,2} \,|\, n \in \mathbb{N},\, f_{i,1} \in C(K_1), f_{i,2} \in C(K_2)\}$ liegt dicht in $C(K_1 \times K_2)$.
   Tipp: Satz von Stone-Weierstraß.

   (b) Die Menge $\{\sum_{i=1}^n f_{i,1} \otimes f_{i,2} \,|\, n \in \mathbb{N},\, f_{i,1} \in L^2(\mu_1), f_{i,2} \in L^2(\mu_2)\}$ liegt dicht in $L^2(\mu_1 \otimes \mu_2)$.
   Tipp: orthogonales Komplement und Satz von Fubini.

   Hinweis: Man schreibt kurz $C(K_1) \otimes C(K_2) = C(K_1 \times K_2)$, $L^2(\mu_1) \otimes L^2(\mu_2) = L^2(\mu_1 \otimes \mu_2)$ (bis auf Isometrie).

2. Betrachte $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ sowie eine Funktion $K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\int K(x)dx = 1$. Setze $K_h(x) = h^{-d} K(x/h)$ für $h > 0$.

   (a) Beweisen Sie, dass für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ die *Faltung*

   $$f * K_h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

   wohldefiniert ist und $f * K_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt.

   (b) Weisen Sie $\lim_{h \to 0} f * K_h = f$ für $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ nach und zwar sowohl punktweise für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ als auch in $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. Schließen Sie, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ liegt.

   (c) Gilt auch $K_h * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{h \to 0} K_h * f = f$ in L^p-Konvergenz für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$?

3. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definiere die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}f(u) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$, $u \in \mathbb{R}^d$.

   (a) Zeigen sie, dass $\mathcal{F}f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt mit $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leqslant \|f\|_{L^1}$.

   (b) Schließen Sie, dass $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ eine lineare Abbildung ist mit Operatornorm $\|\mathcal{F}\| := \sup_{\|f\|_{L^1}=1}\|\mathcal{F}f\|_\infty = 1$.

   (c) Zeigen Sie für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit partieller Integration, dass $\mathcal{F}(f')(u) = -iu\mathcal{F}f(u)$ gilt. Schließen Sie zunächst für diese f, dass sogar $\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R})$ gilt, und folgern Sie dies dann für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

4. Es seien $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben und für $g \in L^q(\mu)$ setze

$$\ell_g : L^p(\mu) \to \mathbb{K} \text{ mit } \ell_g(f) := \int f(x)g(x)\mu(dx).$$

   Zeigen Sie, dass ℓ_g wohldefiniert und linear ist mit Operatornorm $\|\ell_g\| := \sup_{\|f\|_{L^p}=1}|\ell_g(f)| \leqslant \|g\|_{L^q(\mu)}$ mit Gleichheit für $1 < p, q < \infty$.
   Freiwillig: Zeigen Sie $\|\ell_g\| = \|g\|_{L^q(\mu)}$ auch im Fall $q \in \{1, \infty\}$, ggf. unter zusätzlichen Bedingungen an μ.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 14.11.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 5

1. Beweisen Sie: $C_c(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ liegt dicht in $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, für jedes Borelmaß μ auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^d}$, und $L^p(\mu)$ ist separabel.
   Anleitung:

   (a) Setze $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x\| \leqslant n\}$. Es gibt $\chi_n \in C(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leqslant \chi_n \leqslant 1$, $\chi_n|_{B_n} = 1$ und $\chi_n|_{B_{n+1}^c} = 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} \|f - f\chi_n\|_{L^p} = 0$ für alle $f \in L^p(\mu)$ gilt.

   (b) Es gibt $g_{n,m,f} \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\lim_{m\to\infty} \|g_{n,m,f} - f\chi_n\|_{L^p} = 0$ und $\{g_{n,m,f} \,|\, n, m \geqslant 1,\ f \in L^p(\mu)\} \subseteq C_c(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $L^p(\mu)$.

   (c) Da $(C(B_n), \|\bullet\|_\infty)$ für alle n separabel ist, können die $g_{n,m,f}$ aus einer abzählbaren Teilmenge von $C_c(\mathbb{R}^d)$ gewählt werden.

2. Für ein $k \in L^2([0,1]^2)$ und $f \in L^2([0,1])$ setze $I_k f(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$. Zeigen Sie:

   (a) $I_k \in L(L^2([0,1]), L^2([0,1]))$ mit $\|I_k\| \leqslant \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$.

   (b) Finden sie einen Kern k, wo $\|I_k\| < \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$ gilt.

   (c) I_k ist ein *kompakter Operator* in dem Sinne, dass $I_k(B_1(0))$ relativ kompakt in $L^2([0,1])$ ist mit der Einheitskugel $B_1(0) = \{f \in L^2([0,1]) \,|\, \|f\|_{L^2} \leqslant 1\}$.

3. Gegeben seien eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Räumen X, Y sowie Konstanten $C \geqslant c > 0$ mit $\forall x \in X :\ c\|x\| \leqslant \|Lx\| \leqslant C\|x\|$.

   Beweisen Sie, dass $L : X \to \operatorname{ran}(L)$, $\operatorname{ran}(L) = \{Lx \,|\, x \in X\}$, bijektiv ist mit $L \in L(X, \operatorname{ran}(L))$ und $L^{-1} \in L(\operatorname{ran}(L), X)$. Insbesondere sind dann also X und $\operatorname{ran}(X)$ isomorph.

   Geben Sie ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung $L \in L(X,Y)$ an, wo $L^{-1} \notin L(Y,X)$ gilt.

4. Betrachten Sie für einen Messraum $(X, \mathcal{F})$ die Menge

$$M(\mathcal{F}) := \{\mu_+ - \mu_- \mid \mu_+, \mu_- \text{ endliche Maße auf } \mathcal{F}\}$$

der *endlichen signierten Maße*. Beweisen Sie:

(a) Für $\mu = \mu_+ - \mu_- \in M(\mathcal{F})$ gilt $\mu_+, \mu_- \ll (\mu_+ + \mu_-)$ und es gibt $f \in L^1(\mu_+ + \mu_-)$ mit $\mu(A) = \int_A f d(\mu_+ + \mu_-)$, $A \in \mathcal{F}$.

(b) Setzt man $\bar{\mu}_\pm(A) := \int_A \max(\pm f(x), 0)(\mu_+ + \mu_-)(dx)$ für $A \in \mathcal{F}$ in (i), so gilt $\mu = \bar{\mu}_+ - \bar{\mu}_-$ und $\bar{\mu}_+ \perp \bar{\mu}_-$ (*Hahn-Jordan-Zerlegung*). Die Maße $\bar{\mu}_+, \bar{\mu}_-$ sind dadurch eindeutig festgelegt.

(c) $M(\mathcal{F})$ mit $\|\mu\|_{TV} := \bar{\mu}_+(X) + \bar{\mu}_-(X)$, $\mu \in M(\mathcal{F})$, bildet einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(d) *Freiwillig:* $(M(\mathcal{F}), \|\bullet\|_{TV})$ ist ein Banachraum.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 21.11.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 6

1. Weisen Sie nach, dass $\varphi : \ell^1 \to (c_0)'$ mit $\varphi(a)(b) = \sum_n a_n b_n$, $a \in \ell^1$, $b \in c_0$, ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Schließen Sie aus der Fortsetzungsversion des Satzes von Hahn-Banach, dass für jedes $x \neq 0$ in einem normierten Raum X ein Funktional $\ell \in X'$ existiert mit $\|\ell\| = 1$ und $\ell(x) = \|x\|$. Zeigen Sie damit
$$\forall x \in X: \ \|x\| = \sup_{\ell \in X', \|\ell\|=1} |\ell(x)|.$$

3. Beweisen Sie, dass ein normierter Raum X separabel ist, wenn sein Dualraum separabel ist. Anleitung:
   (a) Wähle eine dichte Folge $(\ell_i)_{i \geqslant 1}$ in $\{\ell \in X' \,|\, \|\ell\| = 1\}$. Dann existieren $x_i \in X$ mit $\|x_i\| = 1$ und $|\ell_i(x_i)| \geqslant 1/2$.
   (b) Setze $U = \operatorname{span}\{x_i \,|\, i \geqslant 1\}$. Aus $\ell|_U = 0$ für ein $\ell \in X'$ folgt bereits $\ell = 0$.
   (c) Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt, dass U dicht in X liegen muss. Damit gibt es auch eine abzählbare dichte Teilmenge von X.

4. Mit $X'' = (X')'$ wird der Bidualraum eines normierten Raums X bezeichnet.
   (a) Zeigen Sie, dass $\iota : X \to X''$ mit $\iota(x)(\ell) := \ell(x)$, $x \in X$, $\ell \in X'$, eine wohldefinierte lineare und stetige Abbildung ist mit $\|\iota(x)\|_{X''} \leqslant \|x\|_X$.
   (b) Schließen Sie mittels Aufgabe 2, dass ι sogar eine Isometrie ist. X'' enthält also eine isometrische Kopie von X und $(\overline{\iota(X)}, \|\bullet\|_{X''})$ ist eine Vervollständigung des normierten Raums X.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 28.11.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 7

1. Arbeiten Sie eine geeignet modifizierte Fassung des Gegenbeispiels im Anschluss an Lemma III.2.3 in Werners *Funktionalanalysis* aus, um zu zeigen, dass es eine konvexe Menge $C \subseteq X$ gibt mit $0 \in C$, $x_0 \notin C$, so dass kein $\ell \in X'$ existiert mit $\ell(x_0) \geqslant 1$, $\ell|_C < 1$ (Skalarenkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

2. Für eine Teilmenge U eines normierten Raums X definiere den *Annihilator* $U^\perp := \{\ell \in X' \mid \ell|_U = 0\} \subseteq X'$.

   (a) Weisen Sie nach, dass $U^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von X' ist.

   (b) Zeigen Sie $U' \cong X'/U^\perp$ (isometrisch isomorph) für einen Unterraum U von X, wobei der Quotientenraum $X'/U^\perp$ mit der Norm $\|\ell + U^\perp\|_{X'/U^\perp} := \inf\{\|\ell + u^\perp\| \mid u^\perp \in U^\perp\}$ versehen sei.

   (c) Geben Sie damit für die Einbettung $\iota(C_0(\mathbb{R})) \subseteq C(\bar{\mathbb{R}})$ ein exaktes Argument dafür, dass $(\iota(C_0(\mathbb{R})))' \cong M(\mathfrak{B}_\mathbb{R})$ gilt.

3. Für $L \in L(X,Y)$ bezeichnet $L' \in L(Y',X')$ mit $(L'y')(x) := y'(Lx)$, $y' \in Y', x \in X$, den *adjungierten Operator*. Setze $\operatorname{ran} L = \{Lx \mid x \in X\}$, $(\ker L')_\perp = \{y \in Y \mid y'(y) = 0 \text{ für alle } y' \in \ker L'\}$.

   (a) Überprüfen Sie, dass in der Tat $L' \in L(Y',X')$ gilt.

   (b) Beweisen Sie $\overline{\operatorname{ran} L} = (\ker L')_\perp$ (Tipp: für $' \supseteq'$ verwende Hahn-Banach).

4. Betrachten Sie den Integraloperator $I_k \in L(C([0,1]))$ mit $I_k f(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$, $f \in C([0,1])$, $t \in [0,1]$, für einen Kern $k \in C([0,1]^2)$.

   (a) Zeigen Sie für die Adjungierte $I_k'(\mu) = \mu_k$, wobei das signierte Maß μ_k die Lebesguedichte $g_{\mu,k}(s) = \int_0^1 k(t,s)\mu(dt)$, $s \in [0,1]$, besitzt und $C([0,1])' = M(\mathfrak{B}_{[0,1]})$ identifiziert wurde.

   (b) Von nun an sei $k(t,s) = t \wedge s$. Weisen Sie nach, dass $g_{\mu,k}$ schwach differenzierbar ist mit $g_{\mu,k}'(s) = \mu((s,1])$ sowie $g_{\mu,k}(0) = 0$. Schließen Sie $I_k'(\mu) = 0$ genau dann, wenn $\mu = \alpha\delta_0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.

   (c) Zeigen Sie mittels Aufgabe 3, dass $\overline{\operatorname{ran} I_k} = \{f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$ gilt. Kann hier auf den Abschluss verzichtet werden?

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 5.12.19.
Ab 5.12.19 findet keine Korrektorensprechstunde mehr statt.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 8

1. Beweisen Sie folgende konstruktive Version des Satzes von Hahn-Banach: Ist U Unterraum eines Hilbertraums H und $\ell \in U'$ ein stetiges lineares Funktional auf U, so kann ℓ stetig zu einem Funktional $\bar{\ell} \in (\bar{U})'$ fortgesetzt werden und $\tilde{\ell} := \bar{\ell} \circ P_{\bar{U}} \in H'$ ist eine normgleiche Fortsetzung von ℓ auf H ($P_{\bar{U}}$ ist Orthogonalprojektion auf $\bar{U}$).
   Ist $\tilde{\ell}$ als normgleiche Fortsetzung von ℓ eindeutig bestimmt?

2. Der Satz von Hahn-Banach erlaubt die Definition verallgemeinerter Grenzwertfunktionale auf ℓ^∞. Lesen Sie dazu Terence Taos Blog `terrytao.wordpress.com/tag/banach-limit`. Formulieren und beweisen Sie formal diejenigen der dort angegebenen Aussagen, die auf dem Satz von Hahn-Banach beruhen. Überlegen Sie, wieso dies insbesondere $(\ell^\infty)' \supsetneqq \ell^1$ impliziert.
   Freiwillig: Formalisieren und beweisen Sie alle bei Tao angegebenen Aussagen (außer den auf Ultrafiltern beruhenden).

3. Beweisen Sie, dass in $C([0,1])$ die stetigen nirgends differenzierbaren Funktionen dicht liegen. Anleitung:
   (a) Die Mengen $O_n := \{f \in C([0,1]) \,|\, \forall\, t \in [0,1] : \sup_{0<|h|\leqslant 1/n} |\frac{f(t+h)-f(t)}{h}| > n\}$ (setze f außerhalb von $[0,1]$ konstant fort) sind offen.
   (b) Jede Menge O_n liegt dicht in $C([0,1])$ (Tipp: betrachte Summen von Polynomen und geeigneten *Sägezahnfunktionen*)
   (c) Nach dem Baireschen Kategoriensatz liegt $D := \bigcap_{n\geqslant 1} O_n$ dicht in $C([0,1])$ und jedes $f \in D$ ist nirgendwo differenzierbar.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 12.12.19.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 9

1. Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Für $L_n \in L(X,Y)$, $n \geqslant 1$, X Banachraum, Y normierter Raum existiere $Lx := \lim_{n\to\infty} L_n x$ für alle $x \in X$. Dann gilt auch $L \in L(X,Y)$.

2. Zeigen Sie für einen Banachraum X, dass genau dann X reflexiv ist, wenn X' reflexiv ist. Folgern Sie, dass keiner der Folgenräume c_0, ℓ^1, ℓ^∞ reflexiv ist.

3. Betrachten Sie die Folgen $e^{(m)} \in \ell^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, mit $e_n^{(m)} = \mathbf{1}(n = m)$. Zeigen Sie:

   (a) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ ist beschränkt, aber nicht norm-konvergent in ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

   (b) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ ist schwach*-konvergent in ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, und schwach-konvergent in ℓ^p, $1 < p \leqslant \infty$.

   (c) $(e^{(m)})_{m\geqslant 1}$ besitzt keine schwach-konvergente Teilfolge in ℓ^1.
   Ausblick (Lemma von Schur): In ℓ^1 sind schwach-konvergente Folgen bereits norm-konvergent.

4. Es sei $(X, \|\bullet\|)$ ein *lokal gleichmäßig konvexer* normierter Raum, das heißt aus $\|x_n\| = 1$, $\|x\| = 1$ und $\|\frac{x_n+x}{2}\| \to 1$ folgt $x_n \to x$.

   (a) Zeigen Sie, dass ein Hilbertraum lokal gleichmäßig konvex ist. Recherchieren Sie die Clarkson-Ungleichung und folgern Sie, dass auch $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, lokal gleichmäßig konvex ist. Geben Sie ein Beispiel eines nicht lokal gleichmäßig konvexen normierten Raums an.

   (b) Schließen Sie aus der schwachen Konvergenz $x_n \xrightarrow{w} x$ für eine Folge (x_n) mit $\|x_n\| = \|x\| = 1$ für alle n, dass Normkonvergenz $x_n \to x$ folgt.
   Anleitung: Sonst gilt $\liminf_{n\to\infty} \|\frac{x_n+x}{2}\| < 1$ und ein geeignetes $\ell \in X'$ mit $\|\ell\| = \ell(x) = 1$ liefert den Widerspruch.

   (c) Beweisen Sie nun für eine beliebige Folge (y_n) in X die Äquivalenz:
   $y_n \xrightarrow{w} y$ und $\|y_n\| \to \|y\| \iff y_n \to y$.
   Tipp: Für $y \neq 0$ betrachte $x_n = y_n/\|y_n\|$, $x = y/\|y\|$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 19.12.19.
Frohe Weihnachten und ein ebenso gesundes wie erfolgreiches neues Jahr 2020!

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Weihnachtsblatt

1. Beweisen Sie elementar, d.h. ohne Rückgriff auf Satz 2.14 aus der Vorlesung, dass $(\ell^p)' \cong \ell^q$ für $1 \leqslant p < \infty$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

2. Seien X, Y normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $A \in L(X, Y)$.

   (a) Zeigen Sie, dass A schwach konvergente Folgen wieder auf schwach konvergente Folgen abbildet.

   (b) A heißt vollstetig, falls A schwach konvergente Folgen auf normkonvergente Folgen abbildet. Beweisen Sie:

      i. Falls A kompakt ist, ist A vollstetig und für $x_n \xrightarrow{w} x$ in X gilt $Ax_n \to Ax$ in Y.

      ii. Falls X reflexiv ist, gilt, dass die Vollstetigkeit von A bereits die Kompaktheit impliziert.

3. Sei X ein reflexiver normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $C \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Beweisen Sie, dass zu jedem $x \in X$ mindestens ein $c_x \in C$ existiert mit $\|x - c_x\| = \inf_{c \in C} \|x - c\|$.

4. Betrachte den Raum $(C([0,1], \|\bullet\|_\infty))$ und $k \in C([0,1]^2)$. Zeigen Sie, dass durch

$$(I_k f)(x) := \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy, \qquad x \in [0,1]$$

   ein stetiger linearer Operator aus $L(C([0,1]))$ definiert wird mit $\|I_k\| = \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |k(x,y)|\, dy$. Zeigen Sie weiter, dass I_k auch kompakt ist.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 09.01.20.
Frohe Weihnachten und ein ebenso gesundes wie erfolgreiches neues Jahr 2020!

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 10

1. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und invertierbares $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

   (a) $\overline{\mathcal{F}f(u)} = \mathcal{F}\bar{f}(-u)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

   (b) $\mathcal{F}(f * g)(u) = \mathcal{F}f(u)\mathcal{F}g(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$;

   (c) $\mathcal{F}(f(x_0 + \bullet))(u) = \mathcal{F}f(u)e^{-i\langle u,x_0\rangle}$, $u \in \mathbb{R}^d$;

   (d) $\mathcal{F}(|\det(A)|f(A\bullet))(u) = \mathcal{F}f((A^{-1})^\top u)$, $u \in \mathbb{R}^d$.

2. Beweisen Sie: Ist $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ sowie $x^\alpha g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leqslant k$, so ist $\mathcal{F}g \in C^k(\mathbb{R}^d)$.

3. Betrachten Sie die Fortsetzung $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Weisen sie mittels Approximation durch Schwartz-Funktionen nach:

   (a) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ und Lebesgue-fast alle $u \in \mathbb{R}^d$ gilt $\mathcal{F}f(u) = \int f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$.

   (b) Für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathcal{F}f(u) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|\leqslant R} f(x)e^{i\langle u,x\rangle}dx$ mit Konvergenz im L^2-Sinn.

4. Für die $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Dichte $f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}(x > 0)$, $x \in \mathbb{R}$, mit Parametern $\alpha, \lambda > 0$ berechnen Sie die Fouriertransformierte:

   $$\mathcal{F}f_{\alpha,\lambda}(u) = \big(1 - i\lambda^{-1}u\big)^{-\alpha}, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

   Tipp: $z \mapsto \int f_{\alpha,\lambda}(x)e^{zx}dx$ ist holomorph um $z = 0$ und gleich $(1 - \lambda^{-1}z)^{-\alpha}$ für reelles $z < \lambda$; Eindeutigkeitssatz.

   Bestimmen Sie, für welche Parameter $\alpha, \lambda > 0$ $f_{\alpha,\lambda}$ in $C^k(\mathbb{R})$ bzw. in $H^m(\mathbb{R})$ liegt ($m, k \in \mathbb{N}_0$ beliebig). Vergleichen Sie mit der Bedingung aus dem Sobolev-einbettungssatz.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 16.1.20.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 11

1. Betrachten Sie für $c > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t f(x,t) = c\Delta f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\, t > 0$$

mit Anfangsbedingung $f(x,0) = f_0(x)$ für vorgegebenes $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(a) Nehmen Sie an, dass eine Lösung f existiert und geben Sie Regularitätsbedingungen an, so dass für die Fouriertransformierte in x gilt

$$\partial_t \mathcal{F} f(u,t) = -c|u|^2 \mathcal{F} f(u,t), \quad u \in \mathbb{R}^d,\, t > 0.$$

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\mathcal{F} f$ in t mit Parameter u aus (a) und schließen Sie, dass

$$f(x,t) = (f_0 * p(\bullet,t))(x) \text{ mit } p(x,t) = (4ct\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/(4ct)}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gilt. p heißt *Fundamentallösung* oder *Greenfunktion* und erfüllt die Wärmeleitungsgleichung formal mit Anfangsbedingung $f(\bullet,0) = \delta_0$.

(c) Zeigen Sie nun im Umkehrschluss, dass f in (b) für jedes $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ in $C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ liegt, für $t > 0$ die Wärmeleitungsgleichung löst sowie die funktionswertige Abbildung $t \mapsto f(\bullet,t)$ in $C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^d))$ liegt, wenn man $f(x,0) = f_0(x)$ setzt.

2. Beweisen Sie: Ist $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, so ist der Faltungsoperator $K : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $Kf(x) = \int f(x-y)k(y)dy$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und Lebesgue-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ wohldefiniert und stetig mit $\|K\| \leqslant \|k\|_{L^1}$.
Anleitung: weise $\int |\int f(y)k(x-y)dy|^2 dx \leqslant \|k\|_{L^1}^2 \|f\|_{L^2}^2$ nach.

3. Zeigen Sie für den Faltungsoperator K aus Aufgabe 2:

(a) Es gilt $K = \mathcal{F}^{-1} M_{\mathcal{F}k} \mathcal{F}$ mit der L^2-Fouriertransformation $\mathcal{F}$ und dem Multiplikationsoperator $M_{\mathcal{F}k}$ auf $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(b) Es gilt $\sigma(K) = \sigma(M_{\mathcal{F}k})$ und $\sigma_p(K) = \sigma_p(M_{\mathcal{F}k})$.

(c) Bestimmen Sie für $d = 1$ und den Faltungskern $k = \mathbf{1}_{[0,1]}$ das Spektrum und das Punktspektrum von K und zeichnen Sie es (Computereinsatz gestattet).

4. Erarbeiten Sie sich die Literatur (z.B. *Werner*) zum Spektralradius $r(L)$ für $L \in L(X)$ und beweisen Sie im Detail:

   (a) $r(L) := \lim_{n\to\infty} \|L^n\|^{1/n}$ ist wohldefiniert;

   (b) $\sigma(L) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| \leqslant r(L)\}$;

   (c) im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert ein $\lambda \in \sigma(L)$ mit $|\lambda| = r(L)$.

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 23.1.20.

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Übungsblatt 12

1. Zeigen Sie für den Hilbertraum-adjungierten Operator L^* von $L \in L(H)$ die Darstellung $L^* = \Phi^{-1} L' \Phi$, wobei $\Phi : H \to H'$ den (konjugiert linearen) Isomorphismus aus dem Rieszschen Darstellungssatz und L' den adjungierten Operator von L beschreibt.

   Bestimmen Sie I^* und I' für den Integraloperator $I : L^2([0,1];\mathbb{C}) \to L^2([0,1];\mathbb{C})$ mit $If(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s) ds$ und $k \in L^2([0,1]^2;\mathbb{C})$.

2. Zeigen Sie für die adjungierten Operatoren:

   (a) $(L_1 L_2)' = L_2' L_1'$ für $L_1 \in L(Y,Z)$, $L_2 \in L(X,Y)$;

   (b) $L'' \circ \iota_X = \iota_Y \circ L$ für $L \in L(X,Y)$, wobei $L'' = (L')'$ und $\iota_X : X \to X''$, $\iota_Y : Y \to Y''$ die kanonischen Einbettungen sind.

   Schließen Sie mittels Aufgabe 7.3(b) die Implikationen L surjektiv $\Rightarrow L'$ injektiv sowie L' surjektiv $\Rightarrow L'', L$ injektiv.
   Zusatzaufgabe: Gilt auch die Implikation L injektiv $\Rightarrow L'$ hat dichtes Bild?

3. Es sei $K(X,Y) = \{K \in L(X,Y) \,|\, K \text{ kompakter Operator}\}$ für Banachräume X, Y. Zeigen Sie, dass $K(X,Y)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L(X,Y)$ und damit selbst wieder ein Banachraum ist (zur Abgeschlossenheit benutze einen Diagonalfolgentrick). Weisen Sie ferner nach, dass $K(X) = K(X,X)$ ein *Ideal* in $L(X)$ in folgendem Sinne ist:

   $$\forall K \in K(X),\ L_1, L_2 \in L(X) :\ L_1 K L_2 \in K(X).$$

4. C^*-Algebren und Funktionalkalkül:
   Finden Sie in der Literatur die Definitionen von C^*-Algebra und $*$-Homomorphismus (zwischen C^*-Algebren). Weisen Sie für selbstadjungiertes $L \in L(H)$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nach, dass $C(\sigma(L))$ und $\{f(L) \,|\, f \in C(\sigma(L))\}$ kommutative C^*-Algebren sind. Ist der stetige Funktionalkalkül Φ ein $*$-Homomorphismus zwischen diesen C^*-Algebren? Gibt es jeweils eine (multiplikative) Einheit in diesen C^*-Algebren?

Abgabe der Lösungen, nach Aufgaben getrennt, **vor** der Vorlesung am 30.1.20.
Eine Vorlesungsausarbeitung von Moritz Gau ist verfügbar unter:
`www.dropbox.com/s/3cx78nlqybr9h8z/funkana_skript.pdf?dl=0`

Vorlesung *Funktionalanalysis*
Wintersemester 2019/20
Humboldt-Universität zu Berlin

Markus Reiß
Bernhard Stankewitz

Probeklausur

1. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Jede richtige Antwort wird mit +0.5 Punkten bewertet, jede falsche mit −0.5. Insgesamt sind für diese Aufgabe nicht mehr als fünf und nicht weniger als null Punkte zu erreichen. (5P)

Frage	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)
wahr												
falsch												
weiß nicht												

(a) Jeder Hilbertraum ist lokal gleichmäßig konvex.

(b) c_0 ist reflexiv.

(c) Eine Funktion $f \in H^1([0,1])$ ist fast überall differenzierbar.

(d) Ein selbstadjungierter kompakter Operator besitzt nur nicht negative Eigenwerte.

(e) Sei U ein abgeschlossener Unterraum eines Banachraums X und $U \neq X$. Dann existiert ein Funktional $\ell \in X'$ mit $\ell|_U = 0$ und $\ell \neq 0$.

(f) In jedem Banachraum X ist $\{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ schwach abgeschlossen.

(g) Eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums ist nicht abgeschlossen.

(h) Für jeden kompakten Operator K auf einem Banachraum gilt $0 \notin \sigma(K)$.

(i) $(\ell^p)'$ ist isometrisch isomorph zu ℓ^q für alle $1 \leqslant p < \infty$, wobei $1/p - 1/q = 1$.

(j) Für ein festes x in einem Hilbertraum H gilt $x = 0 \Leftrightarrow \forall y \in H : \langle x, y \rangle = 0$.

(k) Schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.

(l) Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ k-mal stetig differenzierbar, so gilt für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f \in C^k(\mathbb{R}^d)$.

2. Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $f_n(x) := \sin(nx)$, $x \in [0,1]$.

   (a) Begründen Sie, dass $f_n \not\to 0$ in $L^p([0,1])$ für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$. (1P)

   (b) Zeigen Sie $f_n \xrightarrow{w} 0$ in $L^p([0,1])$ für $1 < p < \infty$ und auch für $p = 1$. (2P)

   (c) Zeigen Sie $f_n \xrightarrow{w*} 0$ in $L^p([0,1])$ für $1 < p \leqslant \infty$. (1P)

   (d) Sei $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ ein Integraloperator mit $Kf(t) := \int k(t,s)f(s)\,ds$ und $k \in L^2([0,1]^2)$. Beweisen Sie, dass $Kf_n \to 0$ in $L^2([0,1])$. (1P)

3. Sei H ein $\mathbb{R}$-Hilbertraum und $\beta : H \times H \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H, wobei $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|x\|^2 \leqslant \beta(x,x) \qquad \text{und} \qquad |\beta(x,y)| \leqslant C\|x\|\|y\|$$

   für alle $x, y \in H$.

   (a) Begründen Sie, dass $x \mapsto \beta(x,y)$ für jedes $y \in H$ ein stetiges lineares Funktional ist. Folgern Sie, dass ein eindeutiger Operator $A \in L(H)$ existiert mit $\beta(x,y) = \langle x, Ay\rangle$, $x, y \in H$. (1P)

   (b) Zeigen Sie, dass A injektiv ist (1P)

   (c) Beweisen Sie, dass $A^{-1} \in L(H)$ existiert.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{ran}(A)$ abgeschlossen ist und folgern Sie dann die Surjektivität, indem Sie die orthogonale Projektion auf $\operatorname{ran}(A)$ betrachten. (2P)

   (d) Folgern Sie, dass zu jedem Funktional $\ell \in H'$ ein eindeutiges $y \in H$ existiert mit $\ell = \beta(\bullet, y)$. (1P)

4. Sei $k \in L^2([0,1];\mathbb{C})$ und 1-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Betrachten Sie den Integraloperator K:

$$(Kf)(t) := \int_0^1 k(t-s)f(s)\,ds, \qquad f \in L^2([0,1];\mathbb{C}).$$

   (a) Zeigen Sie, dass $K \in L(L^2([0,1];\mathbb{C}))$ ein stetiger kompakter Operator ist. (1P)

   (b) Sei $k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{k}(j) e^{2\pi i j \bullet}$ die Darstellung von k als Fourierreihe. Beweisen Sie für die Fourierkoeffizienten von Kf, dass $\widehat{Kf}(j) = \widehat{k}(j)\widehat{f}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. (2P)

   (c) Folgern Sie, dass K normal ist. Unter welcher Bedingung an die $\widehat{k}(j)$, $j \in \mathbb{Z}$, ist K selbstadjungiert? (1P)

   (d) Bestimmen Sie $\sigma_p(K)$ und $\sigma(K)$. (1P)

Abgabe der Lösungen von Aufgabe 2 und 3 **vor** der Vorlesung am 06.02.20.