RWTH Aachen
Institut für Reine und Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. Enß/Dr. O. Post

Wintersemester 2002/03
2002-10-23
Blatt 1

Übungen zur Vorlesung „Dynamische Systeme“

Aufgabe 1: Sei $a = (a_j)$ eine Folge mit $\sum_j a_j < \infty$ und $a_j > 0$ für alle $j \geq 0$. Weiterhin sei

$$d_a(s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, d_A^1(s_j, t_j)$$

für $s, t \in \Sigma_A$. Zeigen Sie, dass die Metrik d_a zur Metrik d^1 (siehe Präsenzaufgabe A, Gleichung (1)) äquivalent ist, d. h., zeigen Sie, dass die Abbildung $id\colon (\Sigma_A, d_a) \longrightarrow (\Sigma_A, d^1)$, $x \mapsto x$ und ihre Umkehrabbildung *gleichmäßig* stetig sind.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Menge der periodischen Punkte des dynamischen Systems (F, I) dicht in $I = [0,1]$ liegen (vgl. Präsenzaufgabe B). Gilt diese Aussage auch für beliebige stetige Funktionen $G\colon I \longrightarrow I$ mit $G(0) = G(1) = 0$, $G(1/2) = 1$, G monoton wachsend auf $[0, 1/2]$ und monoton fallend auf $[1/2, 1]$?

Aufgabe 3: *Bezeichnungen siehe Präsenzaufgabe C*

a) Zeigen Sie, dass die Menge der periodischen Punkte $\operatorname{Per}(\sigma) = \cup_n \operatorname{Per}_n(\sigma)$ dicht in Σ_A liegt.

b) Zeigen Sie, dass es eine dichte Bahn in Σ_A gibt, d. h., dass es ein Element $s \in \Sigma_A$ gibt, so dass $\mathcal{O}(s) := \{\sigma^k(s) \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in Σ_A liegt. Dynamische Systeme mit dieser Eigenschaft heißen auch *topologisch transitiv.*

c) Zeigen Sie dass das dynamische System (Σ_A, σ) *empfindlich von den Daten abhängt*, d. h., dass es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so dass für alle $t \in \Sigma_A$ und alle $\delta > 0$ ein $s \in B_\delta(t)$ und ein $k = k(s,t) \in \mathbb{N}$ mit $d(\sigma^k(s), \sigma^k(t)) \geq \varepsilon_0$ gibt.

Aufgabe 4: Sei $\Sigma' := \{s \in \Sigma_{\{0,1\}} \mid s_i = 0 \Rightarrow s_{i+1} = 1, i \geq 0\}$ die Menge aller Folgen, in denen auf eine 0 stets eine 1 folgt. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) die Shiftabbildung σ lässt die Menge Σ' invariant, und Σ' ist abgeschlossen in $\Sigma_{\{0,1\}}$.

b) $\operatorname{Per}(\sigma')$ ist dicht in Σ', wobei σ' die Einschränkung von σ auf Σ' ist.

c) Σ' enthält einen dichten Orbit bezüglich σ'.

d) Finden Sie eine Rekursionsformel $p_n := F(p_{n-2}, p_{n-1})$ für $p_n := |\operatorname{Per}_n(\sigma')|$.

(bitte wenden)

Weitere Informationen unter `http://www.iram.rwth-aachen.de/~enss/DynSys02.html` Dort gibt es auch einen Verweis zu den Übungsblättern.

Präsenzaufgabe A: Sei A eine endliche Menge („Alphabet"). Auf A seien die beiden „Abstandsfunktionen"

$$d_A^1(a,b) := \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases} \qquad \text{und} \qquad d_A^2(a,b) := \begin{cases} 0, & a = b \\ > 0 \text{ (sonst bel.)}\,, & a \neq b \end{cases}$$

für $a, b \in A$ definiert. Auf der Menge Σ_A der Folgen in A definieren wir

$$d^\ell(s,t) := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}\, d_A^\ell(s_j, t_j) \tag{1}$$

für $s = (s_j), t = (t_j) \in \Sigma_A$ und $\ell = 1, 2$.

a) Zeigen Sie, dass es Konstanten $0 < m \leq M$ mit
$$m\, d_A^1(a,b) \leq d_A^2(a,b) \leq M\, d_A^1(a,b)$$
für alle $a, b \in A$ gibt.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass es Konstanten $0 < \tilde{m} \leq \tilde{M}$ mit
$$\tilde{m}\, d^1(s,t) \leq d^2(s,t) \leq \tilde{M}\, d^1(s,t)$$
für alle $s, t \in \Sigma_A$ gibt. *Bemerkung:* d^1 ist eine Metrik auf Σ_A; wenn d_A^2 eine Metrik auf A ist, dann ist auch d^2 eine Metrik auf Σ_A.

Präsenzaufgabe B: Die sog. *Zeltabbildung* $F\colon I \longrightarrow I$ auf $I := [0,1]$ ist definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Iterierte $F^2 = F \circ F$. Skizzieren Sie $F, F^2, F^{(n)}$. Berechnen Sie Fixpunkte und 2-periodische Punkte von F. Welche 2-periodischen Punkte sind prim? Wieviele n-periodische Punkte gibt es?

Präsenzaufgabe C: Gegeben sei die Menge Σ_A der Folgen im Alphabet A mit Metrik $d := d^1$ (siehe Präsenzaufgabe A) und Shiftabbildung $\sigma\colon \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_A$, $\sigma(s)_i := s_{i+1}$, $i \geq 0$.

a) Wählen Sie zu $\varepsilon > 0$ und $s \in \Sigma_A$ ein Element $t \in \Sigma_A$ mit $d(s,t) < \varepsilon$ und $s \neq t$. Inwieweit dürfen sich s und t unterscheiden?

b) In welcher Beziehung stehen $d(s,t)$ und $d(\sigma^k(s), \sigma^k(t))$ für $s, t \in \Sigma_A$, $k \in \mathbb{N}$?

c) Was bedeutet es, wenn eine Folge $s^{(n)} = (s_j^{(n)})$ (von Folgen!) gegen $s \in \Sigma_A$ konvergiert? Zeigen Sie, dass eine Folge $s^{(n)}$ in Σ_A genau dann gegen $s \in \Sigma_A$ konvergiert, wenn es zu jedem $j_0 \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $s_j^{(n)} = s_j$ für alle $n \geq n_0$ und alle $0 \leq j \leq j_0$ gibt.

d) Sei $\mathrm{Per}_n(\sigma) := \{s \in \Sigma_A \,|\, \sigma^n(s) = s\}$ die Menge der n-periodischen Punkte bezüglich (Σ_A, σ). Berechnen Sie die Anzahl $p_n := |\,\mathrm{Per}_n(\sigma)|$ der n-periodischen Punkte.

Hinweis: Die Übung findet **montags von 15.45 bis 17.15 Uhr im Raum 224** im Anschluss an die Vorlesung statt. Die Aufgabenblätter werden in der Regel mittwochs in der Vorlesung verteilt. In der folgenden Übung werden die Präsenzaufgaben bearbeitet. Die Aufgaben (mit arabischen Ziffern) sind als Hausaufgaben gedacht und können in der darauffolgenden Übung abgegeben werden. Pro Aufgabe gibt es vier Punkte. Für den Übungsschein ist die Hälfte der Gesamtpunktzahl erforderlich.

Olaf Post ist im Raum 234 (Hauptgebäude) und unter der Telefonnummer 80-9 45 13 sowie per Rechner unter `post@iram.rwth-aachen.de` zu erreichen, insbesondere in der Sprechstunde dienstags von 13 bis 14 Uhr.