Eine Anwendung des Fortsetzungssatzes von WHITNEY bei magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren

Diplomarbeit von
Olaf Post

Braunschweig, Dezember 1996

Institut für Analysis
Prof. Dr. R. Hempel
Technische Universität Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren

$$H_a := (-i\,\nabla - a)^2$$

im HILBERT-Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$, wobei a ein magnetisches Vektorpotential und $B = da$ das entsprechende magnetische Feld beschreibt. Wächst das Magnetfeld bzw. das Vektorpotential beliebig stark an, so konvergiert unter gewissen Voraussetzungen der magnetische SCHRÖDINGER-Operator im Grenzfall gegen den DIRICHLET-LAPLACE-Operator $-\Delta_M$ auf der Menge M, auf der das Feld verschwindet; genauer gilt

$$H_{\lambda\alpha} \stackrel{\text{s.r.s.}}{\longrightarrow} -\Delta_M \quad \text{für } \lambda \longrightarrow \infty \tag{1.1}$$

im starken Resolventensinn. In manchen Fällen — einschließlich dem Fall eines beschränkten Magnetfeldträgers — kann sogar die Normresolventenkonvergenz gezeigt werden.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, geeignete Voraussetzungen für das zuvor beschriebene Konvergenzverhalten zu geben. Dabei wurde die Konvergenz bereits in dem Artikel „Strong Magnetic Fields, Dirichlet Boundaries, and Spectral Gaps“ von R. HEMPEL und I. HERBST bewiesen (vgl. [HEMHER]), allerdings unter der Voraussetzung, daß das Vektorpotential a in Bereichen (fast überall) verschwindet, in denen das Magnetfeld B den Wert 0 hat (vgl. Theorem 3.6.1). Diese Bedingung an die Träger von B und a hat jedoch den Nachteil, daß sie von einem speziell gewählten Vektorpotential abhängt und somit nicht invariant gegenüber Eichtransformationen ist.

Einer Idee aus dem Artikel von R. HEMPEL und I. HERBST folgend wird in dieser Arbeit versucht, eine Bedingung für die Konvergenz (1.1) nur an das Feld B zu stellen, die in gewisser Weise äquivalent zur oben geschilderten Trägerbedingung ist. Dabei fordert man, daß der magnetische Fluß durch eine beliebige Fläche D mit Randkurve ∂D im Innern des feldfreien Raumes M den Wert 0 hat. Im Zweidimensionalen bedeutet diese Flußbedingung nichts anderes, als daß der Gesamtfluß durch jede beschränkte Zusammenhangskomponente[1] des Feldes verschwindet.

Die wesentliche Idee beim Beweis der Äquivalenz von Flußbedingung und Trägerbedingung besteht darin, differenzierbare Funktionen auf der offenen Menge $U = \mathring{M}$ zu differenzierbaren Funktionen auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ fortzusetzen. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von WHITNEY, in dem eine solche Fortsetzung für differenzierbare „Funktionen“ auf beliebigen abgeschlossenen Mengen konstruiert wird, kann in dieser Arbeit bewiesen werden, daß eine differenzierbare Fortsetzung für offene Mengen U gefunden werden kann, die in einem gewissen Sinn (lokal) quantitativ wegzusammenhängend sind (vgl. Definition 4.5.5 und Theorem 4.6.9). Diese Eigenschaft ist beispielsweise erfüllt, falls der feldfreie Raum M einen LIPSCHITZ-stetigen Rand hat; insbesondere kann in diesem Fall die Konvergenz (1.1) des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators bewiesen werden (vgl. Theorem 5.1.1).

Da in manchen Fällen — z. B. falls der feldfreie Raum M ein Doppelkegel ist — die Konvergenz nicht mit Hilfe des Fortsetzungssatzes gezeigt werden kann, wird abschließend durch eine Approximation des Magnetfeldträgers von außen ein allgemeineres Konvergenzkriterium angegeben (vgl. Theorem 5.2.3). In dieser Situation genügt eine lokale Kegelbedingung im Magnetfeldträger (vgl. Definition 5.2.8 und Satz 5.2.9) im Gegensatz zur ersten Methode, die eine Bedingung an den feldfreien Raum M stellt.

Aus physikalischer Sicht kann die Konvergenzaussage (1.1) in folgender Weise interpretiert werden: Der magnetische SCHRÖDINGER-Operator beschreibt in der Quantenmechanik die Energie eines geladenen Teilchens, das sich in einem Magnetfeld aufhält; entsprechend beschreibt der DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf einer Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ die Energie eines Teilchens, das sich nur in dem Bereich M aufhalten kann. Die Konvergenz kann physikalisch als ein Anwachsen des Magnetfeldes zu einem unendlich großen „Hindernis“ interpretiert werden, das ein Teilchen nicht mehr überwinden kann und sich folglich nur noch im feldfreien Bereich M aufhalten kann. Dieses Phänomen steht in Analogie zu einem beliebig anwachsenden elektrischen Feld (bzw. elektrischen Potential), das in ähnlicher Weise Potentialbarrieren erzeugt (vgl. Lemma 5.2.5).

In Kapitel 2 wird auf die in dieser Arbeit benötigten Begriffe aus der Differentialgeometie eingegangen. Kapitel 3 befaßt sich mit den spektraltheoretischen Grundlagen dieser Arbeit; insbesondere werden dort die oben zitierten Operatoren definiert. Kapitel 4 widmet sich den Fragen der Fortsetzbarkeit von differenzierbaren Funktionen. Im letzten Kapitel erfolgt die Anwendung des Fortsetzungssatzes auf das Problem der Konvergenz der magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren. Abschließend wird die zweite Methode — die Approximation des Feldes von außen — skizziert. Beispiele im letzten Kapitel illustrieren mögliche Fälle, in denen die Konvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators gezeigt werden kann (vgl. Beispiel 5.1.2 und Beispiel 5.2.10).

[1]Komponenten, die keinen echt positiven Abstand zueinander haben, seien dabei zu einer einzigen Komponente zusammengefaßt.

Kapitel 2

Differentialgeometrische Grundlagen

Magnetfelder und magnetische Vektorpotentiale können mathematisch als Differentialformen interpretiert werden. Da hier jedoch nur Felder im „flachen" Raum $\mathbb{R}^d$ betrachtet werden, könnte man die Differentialformen auch durch ihre Komponentenfunktionen ausdrücken, indem man Koordinaten einführt und dann ihre Beziehung untereinander direkt formuliert (vgl. Abschnitt 2.7). Spätestens bei dem Satz von STOKES, der eine Beziehung zwischen Magnetfeld und Vektorpotential herstellt, wird man aber den Begriff einer „gekrümmten" Fläche benötigen, um den magnetischen Fluß durch diese Fläche betrachten zu können. Außerdem hat die allgemeinere Formulierung mittels Mannigfaltigkeiten und Differentialformen den Vorteil, magnetische SCHRÖDINGER-Operatoren auch auf „gekrümmten" Räumen definieren zu können, worauf in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen wird.

Dieses Kapitel beginnt mit einem Abschnitt über multilineare Abbildungen, dessen Aussagen auch in Kapitel 4 benutzt werden. In den folgenden Abschnitten wird kurz das Konzept von Mannigfaltigkeiten, Differentialformen und äußerer Ableitung dargestellt. Das Lemma von POINCARÉ sichert die Existenz eines magnetischen Vektorpotentials bei gegebenem Magnetfeld; mit Abschnitt 2.6 über die Integration von Differentialformen werden die Grundlagen für ein Konvergenzkriterium (vgl. Theorem 3.7.3) des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators im folgenden Kapitel bereitgestellt. In Abschnitt 2.7 wird schließlich definiert, was man sich mathematisch unter einem Magnetfeld und einem Vektorpotential vorstellt.

Beweise und ausführliche Darstellungen der differentialgeometrischen Grundlagen sind z. B. in [DOCARMO], in [GODBILLON] oder in [LANG1] zu finden. Im gesamten Kapitel sei stets $k \in \mathbb{N}_0$ und $d \in \mathbb{N}$ mit $k \leq d$.

2.1 Multilineare Abbildungen

Seien E und F zwei BANACH-Räume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann wird der Raum $\mathbf{L}_k(E,F)$ der k-fach multilinearen stetigen Abbildungen $\omega\colon E^k \longrightarrow F$ mit der Norm

$$\|\omega\|_{\mathbf{L}_k(E,F)} := \sup\left\{\|\omega(x_1,\ldots,x_k)\|_F \,\middle|\, x_i \in \overline{B}_E(0,1) \text{ für } i=1,\ldots,k\right\}$$

zu einem BANACH-Raum. Eine multilineare Abbildung ω ist genau dann stetig, falls eine reelle Zahl $C>0$ existiert, so daß

$$\|\omega(x_1,\ldots,x_k)\|_F \leq C\,\|x_1\|_E \cdot \ldots \cdot \|x_k\|_E$$

für alle $x_1,\ldots,x_k \in E$ gilt. Wie üblich sei $\mathbf{L}_0(E,F) := F$ und $\mathbf{L}(E) := \mathbf{L}_1(E,E)$ gesetzt. In Anlehung an den Fall $E=\mathbb{R}$ wird abkürzend

$$\begin{aligned} \omega \cdot x^k &:= \omega(\overbrace{x,\ldots,x}^{k}) \\ \omega \cdot x^i \cdot y^{k-i} &:= \omega(\overbrace{x,\ldots,x}^{i},\overbrace{y,\ldots,y}^{k-i}) \end{aligned}$$

für $x,y \in E$ und $i \in \{0,\ldots,k\}$ geschrieben.

Für $0 \leq i \leq k$ sind die Räume $\mathbf{L}_k(E,F)$ und $\mathbf{L}_{k-i}(E,\mathbf{L}_i(E,F))$ normisomorph mittels der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_k(E,F) &\longrightarrow \mathbf{L}_{k-i}(E,\mathbf{L}_i(E,F)) \\ \omega &\longmapsto \widetilde{\omega}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\big(\widetilde{\omega}(x_1,\ldots,x_{k-i})\big)(x_{k-i+1},\ldots,x_k) := \omega(x_1,\ldots,x_k)$ gesetzt wurde. Ein Beweis befindet sich z. B. in [DIEUDONNÉ], Abschnitt V. 7. Mit Hilfe dieser Identifizierung sind die Schreibweisen

$$\omega \cdot x^{k-i} := \omega \cdot x^{k-i} \cdot (\cdot)^i := \widetilde{\omega}(\overbrace{x,\ldots,x}^{k-i}) \in \mathbf{L}_i(E,F)$$

sinnvoll. Der Punkt $\cdot$ ist dabei als Auswertung der jeweiligen multilinearen Abbildung zu verstehen, während $(\cdot)^i$ andeuten soll, daß noch i Argumente „erwartet“ werden. Ähnliche Ausdrücke sind entsprechend zu interpretieren.

2.1.1 Symmetrische multilineare Abbildungen

Eine k-fach multilineare Abbildung $\omega \in \mathbf{L}_k(E,F)$ heißt *symmetrisch*, falls

$$\omega(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_k) = \omega(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_k)$$

für alle $x_1,\ldots,x_k \in E$ und $1 \leq i < j \leq k$ gilt. Der (BANACH-)Raum aller symmetrischen, k-fach multilinearen (stetigen) Abbildungen wird mit $\mathbf{S}_k(E,F)$

bezeichnet. Mit Hilfe der Indentifizierung (2.1) wird $\mathbf{S}_k(E,F)$ ein (i. allg. echter) Unterraum von $\mathbf{S}_{k-i}(E,\mathbf{S}_i(E,F))$.

Ein *(verallgemeinertes, stetiges) homogenes Polynom vom Grad k* ist eine Abbildung $p\colon E \longrightarrow F$, für die es eine symmetrische, multilineare (stetige) Abbildung $\omega \in \mathbf{S}_k(E,F)$ gibt, so daß $p(x) = \omega \cdot x^k$ für alle $x \in E$ gilt. Ein *(verallgemeinertes, stetiges) Polynom vom Grad k* ist eine Abbildung $p\colon E \longrightarrow F$, die sich als Summe von homogenen Polynomen mit Grad kleiner oder gleich k schreiben läßt. Der Raum aller solcher Polynome wird mit $P_k(E,F)$ bezeichnet. Sei $P_0(E,F) := F$. Man überzeugt sich leicht davon, daß im Fall $E = \mathbb{R}^d$ und $F = \mathbb{R}$ diese Definition der gewöhnlichen entspricht.

Wie für gewöhnliche Polynome zeigt man die BINOMIsche Formel und ihre einfache Konsequenz:

2.1.2 Lemma. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \mathbf{S}_k(E,F)$ eine symmetrische Multilinearform. Dann gilt für alle $x,y \in E$:*

$$\omega \cdot (x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \omega \cdot x^i \cdot y^{k-i}$$

2.1.3 Korollar. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $\omega \in \mathbf{S}_k(E,F)$ und $x_0 \in E$. Dann ist die Abbildung $x \longmapsto \omega \cdot (x-x_0)^k$ ein Polynom vom Grad k.*

2.1.4 Alternierende multilineare Abbildungen

Eine k-fach multilineare Abbildung $\omega \in \mathbf{L}_k(E,F)$ heißt *alternierend*, falls

$$\omega(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k) = -\omega(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_k)$$

für alle $x_1,\dots,x_k \in E$ und $1 \le i < j \le k$ gilt. Der (BANACH-)Raum aller alternierenden, k-fach multilinearen (stetigen) Abbildungen wird mit $\mathbf{A}_k(E,F)$ bezeichnet. Wie im symmetrischen Fall sei $\mathbf{A}_k(E,F)$ kanonisch in $\mathbf{A}_{k-i}(E,\mathbf{A}_i(E,F))$ für $i \in \{0,\dots,k\}$ eingebettet. Im Fall $F = \mathbb{R}$ wird die (alternierende) multilineare Abbildung als *(alternierende) Multilinearform auf E* oder kurz als *k-Form* bezeichnet und $\mathbf{A}_k E := \mathbf{A}_k(E,\mathbb{R})$ gesetzt.

Sei $\varphi \in \mathbf{L}(E,F)$ eine (stetige) lineare Abbildung und $\omega \in \mathbf{A}_k F$ eine alternierende k-Form auf F. Dann wird durch

$$\varphi^*\omega(x_1,\dots,x_k) := \omega(\varphi x_1,\dots,\varphi x_k)$$

für $x_1,\dots,x_k \in E$ eine alternierende k-Form auf E definiert. Die lineare Abbildung φ induziert somit eine lineare Abbildung $\mathbf{A}_k\varphi := \varphi^*\colon \mathbf{A}_k F \longrightarrow \mathbf{A}_k E$. In Begriffen der Kategorientheorie wird $\mathbf{A}_k$ zu einem kontravarianten Funktor der Kategorie der (BANACH-)Vektorräume und (stetigen) linearen Abbildungen in sich. Ist φ ein Automorphismus, so auch φ^*.

Das *äußere Produkt* zweier alternierender Formen $\omega \in \mathbf{A}_k E$ und $\eta \in \mathbf{A}_m E$ ist definiert durch

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \ldots, x_{k+m}) := \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+m}} \operatorname{sign} \sigma \, \omega(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_k}) \eta(x_{\sigma_{k+1}}, \ldots, x_{\sigma_{k+m}}),$$

wobei $\mathcal{S}_{k+m}$ die Gruppe der Permutationen der Zahlen $\{1, \ldots, k+m\}$ und $\operatorname{sign} \sigma$ die Signatur der Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{k+m}$ bezeichnet. Durch die Summenbildung wird erreicht, daß die zunächst nur $(k+m)$-fach multilinearen Formen alternierend werden. Der Faktor $\frac{1}{k!m!}$ dient dabei als Normierung, denn genau $k!m!$ Permutationen aus $\mathcal{S}_{k+m}$ liefern dasselbe Ergebnis, da ω und η bereits alternierend sind.

Das äußere Produkt ist bilinear und assoziativ, was den Namen „Produkt“ rechtfertigt. Außerdem ist das Produkt *antikommutativ*, d. h. für $\omega \in \mathbf{A}_k E$ und $\eta \in \mathbf{A}_m E$ gilt $\omega \wedge \eta = (-1)^{km} \eta \wedge \omega$.

Im Fall $E = \mathbb{R}^d$ kann eine Basis von $\mathbf{A}_k \mathbb{R}^d$ angegeben werden: Sei $(e_i)_{i=1,\ldots,d}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^d$ und $(dx_i)_{i=1,\ldots,d}$ die duale Basis in $\mathbf{L}_1 \mathbb{R}^d = \mathbf{A}_1 \mathbb{R}^d$ (d. h. $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$). Dann wird $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq d}$ zu einer Basis von $\mathbf{A}_k \mathbb{R}^d$, und es gilt $\dim \mathbf{A}_k \mathbb{R}^d = \binom{d}{k}$.

2.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialbündel

Sei M eine d-dimensionale, C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit (im folgenden auch kurz *d-Mannigfaltigkeit* genannt) mit maximalem Atlas $(\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow U'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, wobei die Karte $\varphi_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow U'_\lambda$ ein Homöomorphismus zwischen den offenen Mengen $U_\lambda \subseteq M$ und $U'_\lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ ist. Als topologischer Raum habe M stets eine abzählbare Basis (diese Voraussetzung wird erst in Abschnitt 2.6 benötigt), und eine Mannigfaltigkeit sei ein HAUSDORFF-Raum.

Eine offene Menge $M = U$ in $\mathbb{R}^d$ ist stets eine d-Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der nur aus der Karte $id_U \colon U \longrightarrow U$ besteht.

Für $\lambda, \mu \in \Lambda$ sei $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu$ gesetzt. Dann induziert die *Kartenwechselabbildung* $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} \colon \varphi_\lambda U_{\lambda\mu} \longrightarrow \varphi_\mu U_{\lambda\mu}$ der Klasse C^∞ eine C^∞-differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} g_{\mu\lambda} \colon U_{\lambda\mu} &\longrightarrow \operatorname{Aut} \mathbb{R}^d \\ p &\longmapsto D_{\varphi_\lambda(p)}(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft $g_{\nu\mu}(p) g_{\mu\lambda}(p) = g_{\nu\lambda}(p)$ für $p \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$, wobei $\operatorname{Aut} \mathbb{R}^d$ die Gruppe der linearen Automorphismen in $\mathbb{R}^d$ und $D_x(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})$ die gewöhnliche Ableitung in $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Eine Familie $(g_{\mu\lambda})_{\lambda,\mu \in \Lambda}$ von Funktionen mit dieser Eigenschaft wird auch *Kozykel mit Werten in* $\operatorname{Aut} \mathbb{R}^d$ genannt. Das diesem Kozykel entsprechende Vektorraumbündel mit Basis M und Faser $\mathbb{R}^d$ wird *Tangentialbündel von M* genannt (vgl. [GODBILLON], Théorème II.2.14). Der Totalraum

TM dieses Bündels heißt *Tangentialraum*. Die Elemente der Faser $T_pM \cong \mathbb{R}^d$ in $p \in M$ werden *Tangentialvektoren im Punkt* p genannt. Der Tangentialraum TM kann in kanonischer Weise zu einer $2d$-dimensionale Mannigfaltigkeit gemacht werden (vgl. [Godbillon], Proposition III.3.12).

Ganz entsprechend definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} g^*_{\mu\lambda}\colon U_{\lambda\mu} &\longrightarrow \operatorname{Aut}(\mathbf{A}_k\mathbb{R}^d) \\ p &\longmapsto (g_{\mu\lambda}(p)^{-1})^* = g_{\lambda\mu}(p)^* \\ ((g^*_{\mu\lambda}(p))\cdot\omega)\cdot(x_1,\ldots,x_k) &= \omega\cdot\big(g_{\lambda\mu}(p)\cdot x_1,\ldots,g_{\lambda\mu}(p)\cdot x_k\big) \end{aligned}$$

für $\omega \in \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ und $x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R}^d$ einen Kozykel mit Werten in $\operatorname{Aut}(\mathbf{A}_k\mathbb{R}^d)$, wobei $\mathbf{A}_k\varphi = \varphi^*\colon \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ der von $\varphi\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ induzierte Automorphismus auf $\mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ ist (vgl. Abschnitt 2.1.4). Die Inversenbildung bei der Definition von $g^*_{\mu\lambda}$ ist nötig, da $\mathbf{A}_k$ als kontravarianter Funktor die Reihenfolge der Abbildungen vertauscht, was die Inversenbildung wieder korrigiert.

Der Kozykel $(g^*_{\mu\lambda})_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ induziert ein Vektorraumbündel mit Basis M und Faser $\mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$, das *Bündel der k-Formen auf M*. Der entsprechende Totalraum $\mathbf{A}_kTM$ heißt *Raum der k-Formen auf M*. Die Faser im Punkt $p \in M$ kann mit $\mathbf{A}_kT_pM \cong \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ identifiziert werden; somit können Elemente aus dieser Faser als alternierende k-Formen auf dem Tangentialraum T_pM angesehen werden.

Der Raum $\mathbf{A}_kTM$ der k-Formen auf M kann ebenfalls in kanonischer Weise zu einer $(d + \binom{d}{k})$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden.

2.3 Differentialformen

Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Eine *C^m-differenzierbare, alternierende k-Differentialform auf M* (kurz *Differentialform* oder *k-Form der Klasse C^m*) sei eine C^m-differenzierbare Abbildung $\omega\colon M \longrightarrow \mathbf{A}_kTM$ mit $\omega(p) \in \mathbf{A}_kT_pM$ für alle $p \in M$. (Mit anderen Worten: Eine k-Form der Klasse C^m ist ein Schnitt der Klasse C^m des Bündels $\mathbf{A}_kTM$). Der Vektorraum aller k-Formen der Klasse C^m auf M sei mit $\Omega^k_{C^m}M$ bezeichnet.

Sei $(\varphi_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow U'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Atlas von M und $\omega \in \Omega^k_{C^m}M$ eine k-Form. Weiter sei $\omega_\lambda\colon U_\lambda \longrightarrow \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ die durch

$$\omega_\lambda(p)\cdot(v_1,\ldots,v_k) := \omega(p)\cdot\big(D_{\varphi_\lambda(p)}(\varphi_\lambda^{-1})\cdot v_1,\ldots,D_{\varphi_\lambda(p)}(\varphi_\lambda^{-1})\cdot v_k\big) \qquad (2.2)$$

definierte Abbildung, wobei $D_x(\varphi_\lambda^{-1})\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow T_pU_\lambda$ die Ableitung der Kartenabbildung bezeichnet. Dann erfüllt die Familie $(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von Abbildungen die Transformationsformel

$$\omega_\mu(p) = g^*_{\mu\lambda}(p)\cdot\omega_\lambda(p) \quad \text{für alle } p \in U_{\lambda\mu} \text{ und } \lambda,\mu \in \Lambda. \qquad (2.3)$$

Umgekehrt definiert eine solche Familie mit diesem Transformationsverhalten genau eine Differentialform auf M. Eine solche Familie soll auch *Darstellung von ω in Karten* genannt werden.

Eine k-Form ω ist genau dann C^m-differenzierbar, falls

$$\omega'_\lambda := \omega_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1} \in C^m(U'_\lambda, \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d) \tag{2.4}$$

für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt (vgl. auch Abschnitt 4.2.1). In Koordinaten läßt sich die Form ω'_λ auch schreiben als

$$\omega'_\lambda(x) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d} \omega_\lambda^{i_1,\ldots,i_k}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k,$$

was durch $\omega'_\lambda = \sum_I \omega_\lambda^I dx_I$ abgekürzt werden soll (I steht dabei für das k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ mit $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le d$ usw.). Für die Komponentenfunktionen gilt natürlich $\omega_\lambda^I \in C^m(U'_\lambda, \mathbb{R})$.

Insbesondere ist für die in $\mathbb{R}^d$ offene Menge $U =: M$ eine k-Form ω der Klasse C^m eindeutig duch $\omega' \in C^m(U, \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d)$ bzw. durch $\omega' = \sum_I \omega^I dx_I$ mit $\omega^I \in C^m(U, \mathbb{R})$ bestimmt, d. h. die Vektorräume $\Omega^k_{C^m}U$ und $C^m(U, \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d)$ sind isomorph, und diese beiden Räume seien so miteinander identifiziert.

Speziell ist in dieser Interpretation eine 0-Form nichts anderes als eine Funktion aus $C^m(U, \mathbb{R})$, und eine 1-Form $\alpha = \sum_{j=1}^d a_j\, dx_j \in \Omega^1_{C^m}U$ entspricht einer vektorwertigen Funktion $a \in C^m(U, \mathbb{R}^d)$ mit $a(x) := \big(a_1(x), \ldots, a_d(x)\big)$. (Man beachte, daß $\mathbf{A}_1\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$ gilt.)

2.4 Äußere Ableitung von Differentialformen

Sei $\omega \in \Omega^k_{C^m}M$ mit $m \ge 1$ eine k-Form mit Darstellung in Karten $(\omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ bzw. $(\omega'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (vgl. (2.2) bzw. (2.4)). Durch

$$\begin{aligned} \eta_\lambda(p) \cdot (v_1, \ldots, v_{k+1}) &:= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} D_{\varphi_\lambda(p)}\omega'_\lambda \cdot v_i \cdot (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{k+1}) \\ \eta'_\lambda &:= \eta_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1} \end{aligned}$$

werden Abbildungen $\eta_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ bzw. $\eta'_\lambda \colon U'_\lambda \longrightarrow \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ definiert, wobei $D_x\omega'_\lambda \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^d, \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d)$ die gewöhnliche Ableitung von $\omega'_\lambda \colon U'_\lambda \longrightarrow \mathbf{A}_k\mathbb{R}^d$ (vgl. Abschnitt 4.2.1) bezeichnet. Die Summenbildung stellt sicher, daß $\eta_\lambda(p)$ auch wirklich eine *alternierende* $(k+1)$-Form wird.

Die Abbildung η'_λ ist C^{m-1}-differenzierbar. Die Familie $(\eta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ erfüllt die Transformationseigenschaft (2.3) für Differentialformen und definiert somit eine $(k+1)$-Form η der Klasse C^{m-1}, die mit $d\omega$ bezeichnet wird und *äußere Ableitung von ω* heißt. Die äußere Ableitung ist eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} d \colon \Omega^k_{C^m}M &\longrightarrow \Omega^{k+1}_{C^{m-1}}M \\ \omega &\longmapsto d\omega. \end{aligned}$$

Für 0-Formen auf einer offenen Menge U in $\mathbb{R}^d$, d. h. für Funktionen $f \in C^m(U, \mathbb{R})$ gilt

$$df(p) = D_p f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_i, \tag{2.5}$$

d. h. äußere Ableitung und gewöhnliche Ableitung stimmen für 0-Formen überein.

Für $k \geq 1$ gilt in der Karte mit Index λ und in Koordinaten mit $\omega'_\lambda = \sum_I \omega^I_\lambda dx_I$ die Formel

$$\begin{aligned}
\eta'_\lambda(p) \cdot (v_1, \ldots, v_{k+1}) &= \\
&= \sum_I \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} D_{\varphi_\lambda(p)} \omega^I_\lambda \cdot v_i \cdot dx_I(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{k+1}) \\
&= \sum_I (D_{\varphi_\lambda(p)} \omega^I_\lambda \wedge dx_I) \cdot (v_1, \ldots, v_{k+1})
\end{aligned}$$

(vgl. die Definition von $\wedge$ in Abschnitt 2.1.4). Schreibt man die gewöhnliche Ableitung $D\omega^I_\lambda$ als äußere Ableitung $d\omega^I_\lambda$, so folgt die suggestive Formel

$$\eta'_\lambda = \sum_I d\omega^I_\lambda \wedge dx_I \tag{2.6}$$

für die Darstellung von $d\omega$ in Karten. Speziell folgt aus Gleichung (2.5) und (2.6) für die äußere Ableitung der 1-Form $\alpha = \sum_{j=1}^d a_j dx_j \in \Omega^1_{C^m} U$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ die Formel

$$d\alpha = \sum_{j=1}^{d} da_j \wedge dx_j = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \Big(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\Big) dx_i \wedge dx_j, \tag{2.7}$$

denn es gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ wegen der Antikommutativität des äußeren Produkts.

Eine wichtige Eigenschaft der äußeren Ableitung ist die *Komplexeigenschaft* $d \circ d = 0$, d. h. für $\omega \in \Omega^k_{C^m} M$ mit $m \geq 2$ gilt $d(d\omega) = 0$. Für $k = 0$ ist dies eine einfache Konsequenz aus der Symmetrie der zweiten Ableitung (als Bilinearform interpretiert) bzw. der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen.

2.5 Das Lemma von Poincaré

2.5.1 Definition. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k_{C^m} M$ mit $m \geq 1$ und $k \geq 0$ heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ gilt.

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k_{C^m} M$ mit $m \geq 1$ und $k \geq 1$ heißt *exakt*, falls es eine $(k-1)$-Form $\eta \in \Omega^{k-1}_{C^m}$ mit $d\eta = \omega$ gibt.

Wegen der Komplexeigenschaft $d \circ d = 0$ ist jede exakte Form $\omega \in \Omega^k_{C^m} M$ mit $m \geq 1$ und $k \geq 0$ geschlossen. Unter gewissen Umständen gilt auch die Umkehrung. Zur Formulierung geeigneter Voraussetzungen dient folgende Definition:

2.5.2 Definition. (Kontrahierbare Mannigfaltigkeiten)
Eine Mannigfaltigkeit M heißt *(C^∞-)kontrahierbar* oder *(C^∞-)nullhomotop*, falls es eine C^∞-differenzierbare Abbildung $H\colon M \times [0,1] \longrightarrow M$ und einen Punkt $p_0 \in M$ gibt, so daß $H(p,1) = p$ und $H(p,0) = p_0$ für alle $p \in M$ gilt.

Der Raum $\mathbb{R}^d$ und alle konvexen, offenen Teilmengen sind als Mannigfaltigkeit kontrahierbar.

2.5.3 Theorem. (Lemma von Poincaré)
Sei M eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist jede geschlossene Form $\omega \in \Omega^k_{C^m} M$ der Klasse C^m mit $m \geq 1$ und $k \geq 1$ exakt, d. h. aus $d\omega = 0$ folgt die Existenz einer $(k-1)$-Form $\eta \in \Omega^{k-1}_{C^m} M$ derselben Klasse C^m mit $d\eta = \omega$.

Für geschlossene 1-Formen $\alpha \in \Omega^1_{C^m} M$ kann sogar eine 0-Form bzw. eine Funktion $f \in C^{m+1}(M, \mathbb{R})$ der Klasse C^{m+1} mit $df = \alpha$ gefunden werden.

Beweis. Ein Beweis der ersten Aussage ist in [Cartan] zu finden (Théorème 2.12.1); dort wird mit Formen der Klasse C^m gerechnet, jedoch nur auf sternförmigen offenen Mengen in $\mathbb{R}^d$ (bzw. in Banach-Räumen). Eine Übertragung mittels Karten auf die Mannigfaltigkeit ist jedoch problemlos möglich. Bei kontrahierbaren Mannigfaltigkeiten sei auf [doCarmo], Theorem 4.2 verwiesen.

Für den Beweis des zweiten Teils genügt es, exakte 1-Formen α der Klasse C^m auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ zu betrachten. Aus dem ersten Teil folgt die Existenz einer Funktion $f \in C^m(U, \mathbb{R})$ mit $df = Df = \alpha$, also ist df auch eine Form der Klasse C^m und f somit von der Klasse C^{m+1}. $\square$

Bei geschlossenen k-Formen mit $k \geq 2$ verliert man in der Regel eine Differentiationsstufe. Sei z. B. $\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq d} b_{ij} dx_i \wedge dx_j$ eine exakte 2-Form der Klasse C^1 auf $\mathbb{R}^d$. Dann existiert nach dem Lemma von Poincaré eine 1-Form $\alpha = \sum_{j=1}^d a_j dx_j$ der Klasse C^1 mit $d\alpha = \beta$, so daß für die Komponentenfunktionen $b_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ nach Gleichung (2.7) gilt. Obwohl die linke Seite noch einmal differenzierbar ist, erhält man keine Aussagen über die Differenzierbarkeit der einzelnen Terme in der Differenz.

2.6 Integration von Differentialformen

Um den Satz von Stokes zu formulieren, werden zunächst einige Begriffe aus der Differentialgeometrie eingeführt, mit Hilfe derer das Integral von Differentialformen definiert werden kann.

2.6.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Sei M eine berandete d-Mannigfaltigkeit (d. h. jeder Punkt $p \in M$ hat eine Umgebung, die zu einer Umgebung im Halbraum $\mathbb{R}^d_- := (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{d-1}$ homöomorph ist). Der *Rand* ∂M der Mannigfaltigkeit M ist die Menge der Punkte aus M, die unter einer Kartenabbildung auf die Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ abgebildet werden[1]. Diese Definition ist unabhängig von der speziell gewählten Karte (vgl. [doCarmo], Lemma 4.3).

Falls der Rand ∂M einer d-Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so kann dieser zu einer $(d-1)$-dimensionalen, C^∞-differenzierbaren Mannigfaltigkeit (vgl. [doCarmo], Kapitel 4.2) gemacht werden.

2.6.2 Orientierbare Mannigfaltigkeiten

Die Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, falls es einen Atlas $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gibt, so daß die Kartenwechselabbildungen die Orientierung erhalten, d. h. falls

$$\det g_{\mu\lambda}(p) = \det \left(D_{\varphi_\lambda(p)}(\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}) \right) > 0 \tag{2.8}$$

für alle $p \in U_{\lambda\mu}$ und $\lambda, \mu \in \Lambda$ gilt. Dieser Atlas heißt *orientiert* und legt eine *Orientierung* von M fest. Mit $-M$ wird die Mannigfaltigkeit bezeichnet, die über den Atlas $(\widetilde{\varphi}_\lambda \colon U_\lambda \longrightarrow U'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $\widetilde{\varphi}_\lambda := \chi \circ \varphi_\lambda$ definiert ist, wobei $\chi \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung mit $\det \chi = -1$ ist. Der zu diesem Atlas gehörende Kozykel erfüllt die Gleichung $\tilde{g}_{\mu\lambda}(p) = \chi g_{\mu\lambda}(p) \chi^{-1}$. Wegen $\det \tilde{g}_{\mu\lambda}(p) = \det g_{\mu\lambda}(p) > 0$ ist auch $-M$ orientierbar. $-M$ trägt dann die *umgekehrte Orientierung* von M.

Der Rand ∂M einer orientierbaren Mannigfaltigkeit M ist wieder orientierbar, wobei man als Orientierung den von M induzierten orientierten Atlas wählt (vgl. [doCarmo], Kapitel 4.2).

2.6.3 Integrale von Differentialformen

Sei M eine orientierbare d-Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^d_{C^m} M$ mit $m \geq 0$ eine d-Form auf M. Der *Träger* $\operatorname{supp} \omega$ der d-Form ω ist definiert als der Abschluß der Menge $\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0 \in \mathbf{A}_d T_p M\}$.

Sei $\omega \in \Omega^d_{C^m} M$ eine d-Form auf M mit Darstellung $(\omega'_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in einem maximalen Atlas (vgl. (2.4)). Weiter habe ω einen kompakten Träger, der in einem Kartengebiet U_λ enthalten ist. Wegen $\dim \mathbf{A}_d \mathbb{R}_d = 1$ gilt $\omega'_\lambda = \omega_\lambda^{1,\ldots,d} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$. Das *Integral von* ω *über* M sei die reelle Zahl

$$\int_M \omega := \int_{U'_\lambda} \omega_\lambda^{1,\ldots,d} dx,$$

wobei $dx = dx_1 \ldots dx_d$ das d-dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Falls der Träger von ω außerdem noch in einem anderen Kartengebiet U_μ liegt, so ist die

[1] Der Rand ∂M der Mannigfaltigkeit ist nicht zu verwechseln mit dem topologischen Rand $\partial M := \overline{M} \setminus \mathring{M} = \emptyset$ bezüglich der Topologie von M bzw. mit dem Rand bezüglich der Topologie eines umgebenden Raumes $\mathbb{R}^n \supset M$.

Unabhängigkeit des Integrals von der Kartenwahl zu zeigen. Dies folgt sofort wegen der Transformationsformel für Integrale unter Diffeomorphismen und dem Transformationsverhalten von Differentialformen (2.3). Dabei beachte man, daß die lineare Abbildung $g^*_{\mu\lambda}(p)\colon \mathbf{A}_d\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbf{A}_d\mathbb{R}^d$ in dem eindimensionalen Vektorraum $\mathbf{A}_d\mathbb{R}^d$ die Multiplikation mit $\det g_{\lambda\mu}(p)$ ist und die Transformationsformel den bis auf das Vorzeichen inversen Faktor $|\det g_{\mu\lambda}(p)|$ liefert. Das Vorzeichen des Integrals ist wegen der Orientierbarkeit von M eindeutig festgelegt.

Da M eine abzählbare Basis hat, existiert eine der offenen Überdeckung $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $(\theta_\kappa)_{\kappa\in K}$, d.h. zu jedem $\kappa \in K$ existiert ein $\lambda_\kappa \in \Lambda$ mit $\operatorname{supp}\theta_\kappa \subset U_{\lambda_\kappa}$ (vgl. [Godbillon], Proposition III.2.12 und auch Definition 4.4.3).

Sei nun $\omega \in \Omega^d_{C^m} M$ eine d-Form mit kompaktem Träger in M. Dann ist $\theta_\kappa\omega_{\lambda_\kappa}$ eine d-Form mit kompaktem Träger in U_λ, und durch

$$\int\limits_M \omega := \sum_{\kappa\in K} \int\limits_M \theta_\kappa\omega_{\lambda_\kappa}$$

wird eine reelle Zahl definiert, das *Integral der d-Form ω*. Wie man sich überzeugen kann, ist diese Zahl unabhängig von der speziell gewählten Zerlegung der Eins.

Bei Umorientierung der Mannigfaltigkeit kehrt sich das Vorzeichen des Integrals um, es gilt also $\int_{-M}\omega = -\int_M \omega$.

2.6.4 Theorem. (Satz von Stokes) *Sei $d \geq 1$ und $m \geq 1$. Weiter sei M eine berandete d-Mannigfaltigkeit und $\omega \in \mathbf{A}^{d-1}_{C^m} M$ eine $(d-1)$-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega.$$

Beweis. (vgl. [Godbillon], Théorème IV.4.7) □

Genaugenommen ist ω keine $(d-1)$-Form auf ∂M, sondern eine $(d-1)$-Form auf M. Falls $i\colon \partial M \longrightarrow M$ die kanonische Injektion ist, so definiert

$$(i^*\omega)(p)\cdot(v_1,\ldots,v_{d-1}) := (D_p i\cdot v_1,\ldots,D_p i\cdot v_{d-1})$$

die gewünschte $(d-1)$-Form $i^*\omega \in \Omega^{d-1}_{C^m}\partial M$. Im folgenden soll aber nicht zwischen ω und der Einschränkung $i^*\omega$ unterschieden werden.

Abschließend wird noch der Zusammenhang zwischen Wegintegralen und der Integration von 1-Formen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachtet.

2.6.5 Wegintegrale von 1-Formen
Seien $\alpha = \sum_{j=1}^{d} a_j dx_j \in \Omega^1_{C^0}U$ eine 1-Form und $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ ein stückweise differenzierbarer Weg, d. h. eine stetige Abbildung, die bis auf endlich viele Ausnahmepunkte differenzierbar ist. Dann wird durch

$$\int\limits_{\gamma} \alpha := \sum_{j=1}^{d} \int\limits_{a}^{b} a_j\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}_j(t)dt$$

eine reele Zahl definiert, das *Wegintegral von α über γ*. Falls das Bild von γ als (kompakte) 1-Mannigfaltigkeit C aufgefaßt werden kann, so stimmt der Wert des Wegintegrals mit dem oben eingeführten Integral von Differentialformen überein, d. h. es gilt $\int_\gamma \alpha = \int_C \alpha$ bzw. genauer $\int_\gamma \alpha = \int_C i^*\alpha$, wobei $i\colon C \longrightarrow U$ die Inklusionsabbildung bezeichnet.

Mit Hilfe des Homotopiebegriffes für Wege kann eine Invarianz des Wegintegrals gezeigt werden.

2.6.6 Definition. Seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \longrightarrow M$ zwei geschlossene Wege (d. h. stetige Abbildungen mit $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ und $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$) in der d-Mannigfaltigkeit M. Die Wege γ_0, γ_1 heißen *(stetig) homotop*, falls eine stetige Abbildung $H\colon [a,b] \times [0,1] \longrightarrow M$ mit $H(\cdot,0) = \gamma_0$ und $H(\cdot,1) = \gamma_1$ existiert.

Eine offene Menge U heißt *einfach zusammenhängend*, falls jeder geschlossene Weg in U homotop zu einem konstanten Weg ist.

Man beachte, daß in dieser Definition von einer einfach zusammenhängenden (offenen) Menge nicht gefordert wird, daß sie zusammenhängend ist.

2.6.7 Satz. (Homotopieinvarianz des Wegintegrals)
Sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$. Außerdem seien γ_0 und γ_1 zwei stückweise differenzierbare, geschlossene, (stetig) homotope Wege in U und $\alpha \in \Omega^1_{C^0}U$ eine geschlossene 1-Form. Dann gilt für die Wegintegrale die Beziehung $\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha$.

Beweis. (vgl. [doCarmo], Proposition 2.2) □

2.7 Magnetfelder und Vektorpotentiale

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels stehen nun alle Begriffe bereit, mit Hilfe derer die mathematische Beschreibung eines Magnetfeldes gegeben werden kann.

Sei $m \geq 1$. Ein *magnetisches Feld (der Klasse C^m) auf $\mathbb{R}^d$* ist eine geschlossene 2-Form $\beta \in \Omega^2_{C^m}\mathbb{R}^d$. Da hier und in den folgenden Kapiteln stets von nichttrivialen Magnetfeldern ausgegangen wird (d. h. $\beta \neq 0$), sei $d \geq 2$ vorausgesetzt. Nach dem Lemma von Poincaré (Theorem 2.5.3) ist die 2-Form exakt, denn

$\mathbb{R}^d$ ist kontrahierbar. Es existiert also eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1_{C^m}\mathbb{R}^d$ mit $d\alpha = \beta$. Diese 1-Form wird auch *magnetisches Vektorpotential (der Klasse C^m)* genannt. In Koordinaten kann

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{d} a_i dx_i \qquad \text{und} \\ \beta &= \sum_{1 \le i < j \le d} B_{ij} dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

geschrieben werden. Aus Formel (2.7) folgt die Beziehung für die Komponentenfunktionen

$$B_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Manchmal wird das Vektorpotential auch einfach durch die vektorwertige Funktion $a \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ mit $a(x) = \big(a_1(x), \ldots, a_d(x)\big)$ beschrieben.

Soll das Magnetfeld β nur eine stetige Funktion sein, so muß zusätzlich die Existenz eines Vektorpotentials α der Klasse C^1 gefordert werden, denn eine äußere Ableitung und damit die Geschlossenheit von β ist in diesem Fall nicht definiert.

Zwei Vektorpotentiale $\alpha, \widetilde{\alpha} \in \Omega^1_{C^m}\mathbb{R}^d$, die beide das Feld β erzeugen (d. h. für die $d\alpha = d\widetilde{\alpha} = \beta$ gilt), unterscheiden sich nur um die Ableitung einer 0-Form bzw. einer Funktion. Da $\widetilde{\alpha} - \alpha$ eine geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^d$ ist, existiert nach dem Lemma von Poincaré (Theorem 2.5.3) eine Funktion $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\widetilde{\alpha} = \alpha + df$. Umgekehrt erzeugen natürlich zwei solche Vektorpotentiale wegen der Komplexeigenschaft $d \circ d = 0$ dasselbe Feld β.

Sei $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Die Abbildung $\widetilde{\cdot}\colon \Omega^1_{C^m}\mathbb{R}^d \longrightarrow \Omega^1_{C^m}\mathbb{R}^d$ mit $\widetilde{\alpha} := \alpha + df$ heißt *Eichtransformation*. Da die „physikalische Information“ im Magnetfeld $\beta := d\alpha$ enthalten ist, sollten sich physikalische Aussagen nicht ändern, falls man das Vektorpotential einer Eichtransformation unterwirft. In der Tat wird in Lemma 3.4.1 gezeigt, daß die magnetischen Schrödinger-Operatoren zu Vektorpotentialen, die aus einer Eichtransformation hervorgehen, unitär äquivalent sind, d. h. aus physikalischer Sicht nicht zu unterscheiden sind.

Kapitel 3

Schrödinger-Operatoren mit Magnetfeld

In diesem Kapitel werden die zugrundeliegenden Resultate über die Konvergenz von magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren mit starkem Magnetfeld dargestellt. Dabei wird zunächst kurz auf die Beziehung von Operatoren und Sesquilinearformen eingegangen (Theorem 3.1.3), mit dessen Hilfe sich bequem selbstadjungierte Operatoren definieren lassen. Die bei der Konstruktion des Grenzoperators in Abschnitt 3.3 auftretenden SOBOLEV-Räume auf abgeschlossenen Mengen werden entsprechend der Arbeit von I. HERBST und Z. ZHAO in Abschnitt 3.2 definiert. Von dem magnetischen Schroedinger-Operator und seiner Invarianz gegenüber Eichtransformationen handelt der nächste Abschnitt. Anschließend wird kurz auf die starke bzw. die Normresolventenkonvergenz (hier in einem etwas allgemeineren Sinn) eingegangen; die monotone Konvergenz quadratischer Formen (Satz 3.5.4) liefert ein hinreichendes und die Konvergenz der Halbgruppe (Satz 3.5.5) ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, die aber beide erst in Kapitel 5 Verwendung finden. In Abschnitt 3.6 wird die Konvergenzaussage des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators bei steigender Magnetfeldstärke aus der Arbeit von R. HEMPEL und I. HERBST zitiert; der letzte Abschnitt dieses Kapitels gibt schließlich ein Kriterium an, aus dem die Konvergenz des SCHRÖDINGER-Operators folgt (Theorem 3.7.3).

Sämtliche Vektor- bzw. Funktionenräume seien — sofern nicht anders angegeben — komplex. Beweise und weitere Aussagen sind z. B. in [KATO], [REEDSIMON1] oder in [WEIDMANN1] zu finden.

3.1 Operatoren und Sesquilinearformen

Zunächst wird kurz auf Operatoren und Sesquilinearformen in HILBERT-Räumen eingegangen. Im unbeschränkten, d. h. unstetigen Fall muß insbesondere auf die Definitionsbereiche Rücksicht genommen werden, was in vielen Beweisen den größten Aufwand erfordert. Im folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein komplexer HILBERT-Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ und Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

3.1.1 Operatoren in Hilbert-Räumen

Ein Operator (d. h. eine lineare Abbildung) $T\colon \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$, wobei $\mathcal{D}(T)$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, heißt *dicht definiert*, falls $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

Ein Operator T heißt *symmetrisch*, falls die Gleichung $\langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, Tv\rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(T)$ gilt. T heißt *positiv* (in Zeichen $T \geq 0$), falls $\langle Tu, u\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(T)$ gilt.

Für einen dicht definierten Operator T setze man

$$\mathcal{D}(T^*) := \big\{ v \in \mathcal{H} \,\big|\, \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathbb{C},\ u \longmapsto \langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}} \text{ stetig} \big\}.$$

Dann ist $\mathcal{D}(T^*)$ ein linearer Unterraum, und für $v \in \mathcal{D}(T^*)$ kann $u \longmapsto \langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}}$ eindeutig zu einem stetigen Funktional aus $\mathcal{H}^* := \mathbf{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$ fortgesetzt werden, da T dicht definiert ist. Nach dem Darstellungssatz von RIESZ ist dieses Funktional identisch mit $\langle\cdot, w\rangle_{\mathcal{H}}$ für genau ein $w \in \mathcal{H}$. Damit ist $v \in \mathcal{D}(T^*)$ äquivalent zur Existenz eines $w \in \mathcal{H}$ mit

$$3.4.1\ \langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, w\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}(T),$$

und w ist durch v eindeutig bestimmt, da $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Durch $T^*v := w$ wird somit ein Operator definiert, der zu T *adjungierte Operator*, für den

$$\langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, T^*v\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } u \in \mathcal{D}(T) \text{ und } v \in \mathcal{D}(T^*)$$

gilt.

Ein dicht definierter Operator T heißt *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$, d. h. falls $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*)$ und $Tu = T^*u$ für alle $u \in \mathcal{D}(T)$ gilt. Selbstadjungierte Operatoren sind symmetrisch und (per definitionem) dicht definiert, die Umkehrung gilt i. a. nicht.

3.1.2 Sesquilineare Abbildungen

Eine Abbildung $t\colon \mathcal{D}(t) \times \mathcal{D}(t) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit linearem Unterraum $\mathcal{D}(t) \subseteq \mathcal{H}$ heißt *Sesquilinearform* oder einfach *Form*, falls t linear im ersten Argument und konjugiert linear im zweiten Argument ist.

Eine Sesquilinearform t heißt *dicht definiert*, falls $\mathcal{D}(t)$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. Eine Form t heißt *abgeschlossen*, falls der Prä-HILBERT-Raum $\big(\mathcal{D}(t), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}(t)}\big)$ mit $\langle u, v\rangle_{\mathcal{D}(t)} := \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}} + t(u, v)$ vollständig, also selber ein HILBERT-Raum ist. Ein in diesem HILBERT-Raum dichter, linearer Teilraum $\mathcal{D}$ heißt *determinierender Formbereich* (engl. *form core*).

Eine Sesquilinearform t heißt *symmetrisch*, falls $t(u, v) = \overline{t(v, u)}$ für alle $u, v \in \mathcal{D}(t)$ gilt. Dies ist äquivalent zu $t(u)^2 := t(u, u) \in \mathbb{R}$ für alle $u \in \mathcal{D}(t)$. Eine Sesquilinearform t heißt *positiv*, falls $t(u)^2 \geq 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(t)$ gilt.

Jede Sesquilinearform t ist wegen der *Polarisierungsidentität*

$$t(u,v) = \frac{1}{4}\bigl(t(u+v)^2 - t(u-v)^2 + it(u-iv)^2 - it(u+iv)^2\bigr) \tag{3.1}$$

eindeutig durch die *quadratische Form* $u \longmapsto t(u)^2$ festgelegt.

3.1.3 Theorem. (Erster Darstellungssatz) *Zu jeder dicht definierten, abgeschlossenen, positiven Sesquilinearform t existiert genau ein positiver, selbstadjungierter Operator T, wobei $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(t)$ ein determinierender Formbereich von t ist und*

$$t(u,v) = \langle Tu, v\rangle_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle } u \in \mathcal{D}(T) \textit{ und } v \in \mathcal{D}(t)$$

gilt. Dabei ist der Definitionsbereich von T gegeben durch

$$\mathcal{D}(T) = \bigl\{u \in \mathcal{D}(t) \,\big|\, \mathcal{D}(t) \longrightarrow \mathbb{C},\ v \longmapsto t(u,v) \textit{ stetig}\bigr\}.$$

Beweis. vgl. [KATO], Theorem VI.2.1 oder [WEIDMANN1], Satz 5.37 □

Wie bei der Definition des adjungierten Operators folgt, daß $u \in \mathcal{D}(T)$ äquivalent ist zur Existenz eines $w \in \mathcal{H}$, so daß $t(u,v) = \langle w, v\rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $v \in \mathcal{D}(t)$ gilt, und es ist $Tu = w$. Für die Aussage $u \in \mathcal{D}(T)$ genügt es sogar, zu zeigen, daß ein $w \in \mathcal{H}$ existiert, so daß

$$t(u,v) = \langle w, v\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}$$

gilt, wobei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(t)$ nur ein determinierender Formbereich von t ist (vgl. [KATO], Theorem VI.2.1 und Theorem VI.1.21). Direkt sieht man dies mit einem Limesargument ein, denn sowohl t als auch $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ sind stetige Sesquilinearformen im HILBERT-Raum $\mathcal{D}(t)$. Dies ist leicht einzusehen mit Hilfe der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung, die für beide Formen gilt.

3.2 Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt werden SOBOLEV-Räume, d. h. Räume schwach differenzierbarer Funktionen auf verschiedenen Klassen von Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ definiert und einfache Beziehungen untereinander untersucht. Diese Räume treten insbesondere bei der Definition des Grenzoperators (des DIRICHLET-LAPLACE-Operators) auf. Es sei stets $d \geq 1$.

3.2.1 Quadratintegrierbare Funktionen

Sei M eine BOREL-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. Mit $L_2(M)$ sei der (komplexe) BANACH-Raum der (Äquivalenzklassen der fast überall (f. ü.) gleichen) meßbaren Funktionen $f\colon M \longrightarrow \mathbb{C}$, die $\|f\|_{L_2(M)} := \bigl(\int_M |f|^2\,dx\bigr)^{1/2} < \infty$ erfüllen, bezeichnet, wobei dx das LEBESGUE-Maß in $\mathbb{R}^d$ sei. Der Vektorraum $L_2(M)$ wird mit $\langle u, v\rangle_{L_2(M)} := \int_M u\overline{v}\, dx$ zu einem HILBERT-Raum.

Es gilt $L_2(\mathbb{R}^d) \cong L_2(M) \oplus_2 L_2(M^c)$ als direkte Summe von HILBERT-Räumen. Gemäß diesem Isomorphismus soll im weiteren Verlauf nicht immer zwischen Funktionen auf (meßbaren) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und ihrer kanonischen Fortsetzung (durch 0 auf dem Komplement) auf $\mathbb{R}^d$ unterschieden werden. Mit dieser Identifikation wird $L_2(M)$ ein abgeschlossener Unterraum von $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann ist der Vektorraum $C_c^\infty(U)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger dicht im HILBERT-Raum $L_2(U)$ (vgl. [WERNER], Lemma V.1.9).

3.2.2 Sobolev-Räume auf offenen Mengen

Sei ∂^α der partielle Ableitungsoperator der Ordnung $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ zum Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Eine Funktion $u \in L_2(U)$ besitze die *schwache α-te Ableitung* $\partial^\alpha u \in L_2(U)$, falls

$$\langle \partial^\alpha u, v\rangle_{L_2(U)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha v\rangle_{L_2(U)} \tag{3.2}$$

für alle „Testfunktionen“ $v \in C_c^\infty(U)$ gilt. Die α-te Ableitung $\partial^\alpha u$ ist wegen der Dichtheit von $C_c^\infty(U)$ in $L_2(U)$ eindeutig bestimmt.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Der Raum $\mathcal{H}^k(U)$ der Funktionen $u \in L_2(U)$, deren schwache α-te Ableitungen für alle $|\alpha| \le k$ existieren und ebenfalls aus $L_2(U)$ sind, wird mit

$$\|u\|_{\mathcal{H}^k(U)} := \Big(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(U)} \Big)^{1/2} \tag{3.3}$$

zu einem komplexen HILBERT-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^k(U)} := \sum_{|\alpha|\le k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v\rangle_{L_2(U)}\,. \tag{3.4}$$

Es gilt $C_c^\infty(U) \subset \mathcal{H}^k(U)$. Sei $\mathring{\mathcal{H}}^k(U)$ der Abschluß von $C_c^\infty(U)$ in $\mathcal{H}^k(U)$. Der Raum $\mathring{\mathcal{H}}^k(U)$ ist per definitionem ein abgeschlossener Unterraum, also selber ein HILBERT-Raum. Im Gegensatz zu Funktionen aus $\mathcal{H}^k(U)$ verschwindet eine Funktion aus $\mathring{\mathcal{H}}^k(U)$ auf dem Rand ∂U in dem Sinn, daß sie sich durch Funktionen mit kompaktem Träger in U approximieren läßt.

3.2.3 Sobolev-Räume auf meßbaren Mengen

Ein weiterer Raum schwach differenzierbarer Funktionen, die in einem anderen Sinn auf dem Rand verschwinden, wird durch folgende Definition gegeben. Für eine BOREL-meßbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ sei wie in [HERZHAO]

$$\widetilde{\mathcal{H}}^k(M) := \big\{ u \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d) \,\big|\, u\restriction_{M^c} = 0 \text{ f.ü.} \big\}.$$

Der Raum $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d)$ und damit selber ein HILBERT-Raum: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$, die in $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d)$ (und somit auch in $L_2(\mathbb{R}^d)$) gegen $u \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d)$ konvergiert. Da jedes Element u_n nach Voraussetzung in dem abgeschlossenen Unterraum $L_2(M)$ der auf M^c f. ü. verschwindenden Funktionen liegt, folgt $u\restriction_{M^c} = 0$ f. ü. und damit $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$.

Analog kann $\mathring{\mathcal{H}}^k(U) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}^k(U)$ gezeigt werden, indem eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C_c^\infty(U)$ betrachtet wird, die gegen $u \in \mathring{\mathcal{H}}^k(U)$ in $\mathcal{H}^k(U)$ konvergiert.

Falls meas $(M_1 \triangle M_2) = 0$ für meßbare Teilmengen M_1 und M_2 gilt, so folgt $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M_1) = \widetilde{\mathcal{H}}^k(M_2)$, und aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M_1) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}^k(M_2)$, wie man leicht sieht.

3.2.4 Sobolev-Räume auf abgeschlossenen Mengen

Sei M eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$. Es gilt u in $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$ genau dann, falls $u \in L_2(M)$ liegt und u schwache Ableitungen $\partial^\alpha u \in L_2(M)$ bis zur Ordnung k für alle $|\alpha| \leq k$ besitzt. Dabei ist die schwache Ableitung im Sinne von

$$\langle \partial^\alpha u, v\restriction_M \rangle_{L_2(M)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha v\restriction_M \rangle_{L_2(M)} \tag{3.5}$$

für alle $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiert. Die Äquivalenz dieser Aussagen sieht man ein, indem man beachtet, daß wie bei gewöhnlichen Ableitungen aus $u\restriction_{M^c} = 0$ f. ü. auf der offenen Menge M^c auch $\partial^\alpha u\restriction_{M^c}$ für die schwache Ableitung nach (3.2) folgt (vgl. [GilbTrud], Lemma 7.7). Daher braucht man bei der Norm bzw. bei dem Skalarprodukt auf $\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$ nur über M zu integrieren, und die (3.3) entsprechende Norm bzw. das (3.4) entsprechende Skalarprodukt werden mit $\|\cdot\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)}$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)}$ bezeichnet.

3.2.5 Beziehungen zwischen den Sobolev-Räumen

Seien U eine offene und M eine meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d$. Insgesamt gelten also die Inklusionen

$$\begin{array}{ccccccc} C_c^\infty(U) & \subset & \mathring{\mathcal{H}}^k(U) & \subseteq & \mathcal{H}^k(U) & \subseteq & L_2(U) \\ \mathring{\mathcal{H}}^k(\mathring{M}) & \subseteq & \widetilde{\mathcal{H}}^k(\mathring{M}) & \subseteq & \widetilde{\mathcal{H}}^k(\overline{M}) & \subseteq & L_2(\overline{M}). \end{array}$$

Ist außerdem M abgeschlossen, und gilt meas $(\partial M) = 0$, so folgt

$$\widetilde{\mathcal{H}}^k(M) = \widetilde{\mathcal{H}}^k(\mathring{M}) \subseteq \mathcal{H}^k(\mathring{M}),$$

denn eine im Sinne von (3.5) schwach differenzierbare Funktion $u \in L_2(M) = L_2(\mathring{M})$ ist natürlich auch schwach differenzierbar im Sinne von (3.2), da weniger Testfunktionen verwendet werden. Im Fall $M = \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathring{\mathcal{H}}^k(\mathbb{R}^d) = \widetilde{\mathcal{H}}^k(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^d)$$

(vgl. [Adams], Corollar 3.19). In [HerZhao] bzw. in Satz 5.2.9 wird gezeigt, daß bei hinreichend regulären Mengen M die Räume $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ übereinstimmen und damit Funktionen aus diesen Räumen in demselben Sinn auf dem Rand verschwinden.

3.3 Dirichlet-Laplace-Operatoren

Der DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf einer Menge M mit elektrischem Potential beschreibt aus quantenmechanischer Sicht die Energie eines geladenen Teilchens in diesem Potential, das sich im Raumbereich M aufhalten kann und dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Rand den Wert 0 hat. Gewöhnlich wird der DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf einer offenen Menge U über eine Sesquilinearform auf dem SOBOLEV-Raum $\mathring{\mathcal{H}}^1(U)$ definiert (vgl. [REEDSIMON4], S. 263). Hier wird jedoch wie in [HEMHER] der SOBOLEV-Raum $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ zugrunde gelegt. Das „Verschwinden" der Funktionen auf dem Rand trägt jedoch in beiden Fällen der verschwindenden Aufenthaltswahrscheinlichkeit in Randbereichen Rechnung. Zunächst wird der DIRICHLET-LAPLACE-Operator ohne elektrisches Potential konstruiert.

Sei M eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$. Durch

$$t_M(u,v) := \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j u, \partial_j v \rangle_{L_2(M)} \quad \text{für } u,v \in \mathcal{D}(t_M) := \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$$

wird eine positive, dicht definierte Sesquilinearform im HILBERT-Raum $\mathcal{H} := \overline{\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)} \subseteq L_2(M)$ definiert, wobei der Abschluß in $L_2(M)$ zu nehmen ist. Hier bezeichne ∂_j die (schwache) partielle Ableitung in j-ter Koordinatenrichtung im Sinne von (3.5). Wegen

$$\langle u,v \rangle_{\mathcal{D}(t_M)} = \langle u,v \rangle_{L_2(M)} + t_M(u,v) = \langle u,v \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)} \quad \text{für } u,v \in \mathcal{D}(t_M)$$

ist die Form t_M abgeschlossen, denn $\big(\widetilde{\mathcal{H}}^1(M), \langle \cdot,\cdot \rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)}\big)$ ist vollständig. Somit existiert nach dem ersten Darstellungssatz (Theorem 3.1.3) ein eindeutig bestimmter selbstadjungierter, positiver Operator $-\Delta_M$, der sogenannte DIRICHLET-LAPLACE-*Operator auf der Menge* M, für den

$$\langle -\Delta_M u, v \rangle_{L_2(M)} = t_M(u,v) = \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j u, \partial_j v \rangle_{L_2(M)}$$

mit $u \in \mathcal{D}(-\Delta_M)$ und $v \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ gilt.

Falls $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M}) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ gilt, also $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathring{M})$ dicht in $\mathcal{D}(t_M)$ liegt und damit $\mathcal{D}$ ein determinierender Formbereich von t_M ist, so gilt $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(-\Delta_M)$. Zu $u \in \mathcal{D}$ existiert ein $w := -\sum_{j=1}^{d} \partial_j^2 u \in \mathcal{D}$, so daß

$$t_M(u,v) = \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j u, \partial_j v \rangle_{L_2(M)} = \sum_{j=1}^{d} - \left\langle \partial_j^2 u, v \right\rangle_{L_2(M)} = \langle w, v \rangle_{L_2(M)}$$

für alle $v \in \mathcal{D}$ gilt. Dabei wurde der Satz von FUBINI verwendet und partiell integriert. Insbesondere entspricht $-\Delta_M \restriction_{\mathcal{D}}$ dem (negativen) LAPLACE-Differential-Operator $-\sum_{j=1}^{d} \partial_j^2$, was die Bezeichnung nachträglich rechtfertigt.

Zur Abkürzung wird $-\Delta := -\Delta_{\mathbb{R}^d}$ gesetzt. Bedingungen an den Rand von M, unter denen die Gleichheit der SOBOLEV-Räume gilt, werden in Satz 5.2.9 angegeben.

Im allgemeinen wird der HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ echt kleiner sein als $L_2(M)$; es existiert jedoch stets eine (meßbare) Teilmenge M^* von M, so daß $\mathcal{H} \cong L_2(M^*)$ gilt (vgl. [HERZHAO], Theorem 2.2). Falls jedoch $\operatorname{meas}(\partial M) = 0$ gilt, so folgt $\mathcal{H} \cong L_2(M)$, denn $C_c^\infty(\mathring{M}) \subset \mathcal{D}(t_M)$ ist dicht in $L_2(\mathring{M}) \cong L_2(M)$ (vgl. Abschnitt 3.2.1).

Sei $\varphi\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine meßbare, beschränkte und positive Abbildung. Durch die Zuordnung $u \longmapsto \varphi u$ wird ein positiver, selbstadjungierter, stetiger Multiplikationsoperator auf $L_2(M)$ definiert, der ebenfalls mit φ bezeichnet werden soll. Ganz entsprechend der Definition von $-\Delta_M$ kann ein Operator $-\Delta_M + \varphi$ zur Form $(u,v) \longmapsto t_M(u,v) + \langle \varphi u, v\rangle_{L_2(M)}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(-\Delta_M + \varphi) = \mathcal{D}(-\Delta_M)$ konstruiert werden. Dieser Operator heißt DIRICHLET-LAPLACE-*Operator auf der Menge M mit Potential φ.*

3.4 Magnetische Schrödinger-Operatoren

Der magnetische SCHRÖDINGER-Operator beschreibt wie zuvor der DIRICHLET-LAPLACE-Operator aus quantenmechanischer Sicht die Energie eines geladenen Teilchens, das sich diesmal jedoch in einem Magnetfeld β im gesamten Raum $\mathbb{R}^d$ aufhält. Bei der Konstruktion wird auf das magnetische Vektorpotential α mit $d\alpha = \beta$ zurückgegriffen. Die bei der Wahl eines solchen Vektorpotentials bestehende Willkür darf physikalisch keine Konsequenzen haben; mathematisch drückt sie sich durch die unitäre Äquivalenz der entsprechenden magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren aus (vgl. Lemma 3.4.1).

Sei $\alpha = \sum_{j=1}^d a_j\, dx_j \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 1$ eine 1-Form der Klasse C^1 mit Komponentenfunktionen $a_j \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Setzt man $p_j u := -i\partial_j u - a_j u$ und

$$\begin{aligned} h_\alpha(u,v) &:= \sum_{j=1}^d \langle p_j u, p_j v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{mit} \\ u,v \in \mathcal{D}(h_\alpha) &:= \bigl\{ u \in L_2(\mathbb{R}^d) \bigm| p_j u \in L_2(\mathbb{R}^d) \text{ für } j = 1,\dots,d \bigr\}, \end{aligned}$$

so wird eine positive Sesquilinearform im HILBERT-Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$ definiert. Dabei ist $p_j u$ dasjenige Element aus $L_2(\mathbb{R}^d)$, welches eindeutig durch

$$\langle p_j u, w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \langle u, p_j w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} \quad \text{für alle } w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \tag{3.6}$$

bestimmt ist. Wie man mittels partieller Integration und dem Satz von FUBINI sieht, verallgemeinert diese Definition die übliche für Funktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. (Man beachte, daß die Komponentenfunktionen a_j reellwertig sind!) Insbesondere ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ im Definitionsbereich $\mathcal{D}(h_\alpha)$ enthalten, und die Form h_α ist dicht definiert.

Zu zeigen bleibt nur noch die Abgeschlossenheit von h_α: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CAUCHY-Folge in $\big(\mathcal{D}(h_\alpha), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}(h_\alpha)}\big)$. Dann sind insbesondere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(p_j u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY-Folgen in $L_2(\mathbb{R}^d)$, also konvergent gegen u bzw. $v_j \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Wegen

$$\langle v_j, w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{n\to\infty} \langle p_j u_n, w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{n\to\infty} \langle u_j, p_j w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \langle u, p_j w\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt $v_j = p_j u$ für $j = 1, \dots, d$ nach Gleichung (3.6), also $u \in \mathcal{D}(h_\alpha)$ und $\|u - u_n\|_{\mathcal{D}(h_\alpha)} \to 0$.

Der nach dem ersten Darstellungssatz (Theorem 3.1.3) zugehörige selbstadjungierte, positive Operator H_α im HILBERT-Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$ wird *magnetischer* SCHRÖDINGER-*Operator mit Vektorpotential* α genannt.

Wie im Fall des DIRICHLET-LAPLACE-Operators im vorigen Abschnitt und mit (3.6) zeigt man, daß $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(H_\alpha)$ gilt, und die Wirkung auf $\mathcal{D}$ wie in gewöhnlicher Bedeutung der Differential- und Multiplikationsoperatoren mit

$$H_\alpha\restriction_{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)} = (-i\nabla - a)^2 := \sum_{j=1}^d (-i\partial_j - a_j)^2$$

angegeben werden kann, wobei $x \mapsto a(x) := \big(a_1(x), \dots, a_d(x)\big) \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ die α entsprechende vektorwertige Funktion ist. Dabei muß man nur wissen, daß $\mathcal{D}$ ein determinierender Formbereich von h_α ist, was aber auch mit schwächeren Voraussetzungen an α bewiesen werden kann (vgl. [LEINFSIM], Theorem 1).

Ganz entsprechend wie in Abschnitt 3.3 kann für meßbare, beschränkte und positive Funktionen $\varphi\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ der *magnetische* SCHRÖDINGER-*Operator $H_\alpha + \varphi$ mit Vektorpotential α und elektrischem Potential φ* definiert werden. Er hat denselben Definitionsbereich wie der Operator H_α ohne elektrisches Potential.

Eine wichtige Eigenschaft des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators ist die Invarianz gegenüber Eichtransformationen (vgl. Abschnitt 2.7):

3.4.1 Lemma. *Seien $\alpha, \tilde\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ zwei 1-Formen mit $d\alpha = d\tilde\alpha$. Dann sind die zugehörigen magnetischen* SCHRÖDINGER-*Operatoren H_α und $H_{\tilde\alpha}$ unitär äquivalent, d. h. falls $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ eine Funktion (Nullform) mit $\tilde\alpha = \alpha + df$ ist, dann gilt $e^{if} H_\alpha e^{-if} = H_{\tilde\alpha}$, wobei e^{if} den (unitären) Multiplikationsoperator $(e^{if}u)(x) := e^{if(x)}u(x)$ für $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ f. ü. bezeichnet.*

Beweis. Nach Abschnitt 2.7 existiert eine solche Funktion f. Sei $p_j := -i\partial_j - a_j$ und $\tilde p_j := -i\partial_j - \tilde a_j$, wobei a_j bzw. $\tilde a_j$ die entsprechenden Komponentenfunktionen zu den 1-Formen α bzw. $\tilde\alpha$ sind. Durch einfaches Nachrechnen bestätigt man, daß

$$p_j(e^{-if}u) = e^{-if}(\tilde p_j u) \tag{3.7}$$

zunächst für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ein determinierender Formbereich von $h_{\tilde\alpha}$ ist (vgl. [LEINFSIM], Theorem 1), kann man mit (3.6) ähnlich wie beim Beweis der Abgeschlossenheit von h_α zeigen, daß $u \in \mathcal{D}(h_{\widetilde{\alpha}}) \Rightarrow e^{-if}u \in \mathcal{D}(h_\alpha)$ und daß (3.7) auch für $u \in \mathcal{D}(h_{\widetilde{\alpha}})$ erfüllt ist. Da außerdem e^{-if} ein unitärer Operator ist, folgt

$$\begin{aligned}\left\langle e^{if} H_\alpha e^{-if} u, v \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= h_\alpha(e^{-if}u, e^{-if}v) = \sum_{j=1}^{d} \left\langle p_j e^{-if} u, p_j e^{-if} v \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sum_{j=1}^{d} \left\langle e^{-if} \tilde{p}_j u, e^{-if} \tilde{p}_j v \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sum_{j=1}^{d} \left\langle \tilde{p}_j u, \tilde{p}_j v \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} = h_{\widetilde{\alpha}}(u, v)\end{aligned}$$

für $u, v \in \mathcal{D}(h_{\widetilde{\alpha}})$ mit $e^{-if}u \in \mathcal{D}(H_\alpha)$. Wegen Theorem 3.1.3 gilt $u \in \mathcal{D}(H_{\widetilde{\alpha}})$ und $H_{\widetilde{\alpha}}u = e^{if} H_\alpha e^{-if} u$. Die Implikation $u \in \mathcal{D}(H_{\widetilde{\alpha}}) \Rightarrow e^{-if}u \in \mathcal{D}(H_\alpha)$ folgt analog mit vertauschten Rollen von α und $\widetilde{\alpha}$ bzw. f und $-f$. $\square$

3.5 Resolventenkonvergenz

Um die Konvergenzaussagen über den magnetischen SCHRÖDINGER-Operator überhaupt treffen zu können, muß zunächst ein Konzept eingeführt werden, mit dessen Hilfe die Konvergenz unstetiger, selbstadjungierter Operatoren definiert werden kann, denn bei solchen Operatoren müssen nicht einmal die Definitionsbereiche übereinstimmen. Man hilft sich, indem man Konvergenzaussagen über die Resolvente eines Operators erklärt. Im Fall von stetigen, selbstadjungierten Operatoren stimmen diese Definitionen aber mit der entsprechenden Konvergenz für die Operatoren überein (vgl. [REEDSIMON1], Theorem VIII.18).

Ein weiteres Problem bereitet der Umstand, daß der magnetische SCHRÖDINGER-Operator im HILBERT-Raum $L_2(\mathbb{R}^d)$ selbstadjungiert ist, dagegen der Kandidat für den Grenzoperator, der DIRICHLET-LAPLACE-Operator, diese Eigenschaft nur auf einem abgeschlossenen Unterraum hat. Der hier gewählte (allgemeinere) Resolventenbegriff nimmt Rücksicht auf diesen Umstand. Schließlich werden zwei Konvergenzkriterien angebeben, die jedoch erst in Abschnitt 5.2 benötigt werden. Dort treten Operatorenfolgen auf, bei denen sogar jeder Operator in einem anderen Unterraum selbstadjungiert ist, was die hier gewählte Allgemeinheit rechtfertigt.

Ein abgeschlossener Unterraum eines HILBERT-Raumes wird im folgenden als *Teil-*HILBERT*-Raum* bezeichnet. Teil-HILBERT-Räume sind selber HILBERT-Räume.

3.5.1 Definition. Sei T_0 ein positiver, selbstadjungierter Operator im HILBERT-Raum $\mathcal{H}_0$. Dann ist $R(T_0) := (T_0 + 1)^{-1}$ ein auf ganz $\mathcal{H}_0$ definierter stetiger Operator, der *Resolvente von T_0 (im Punkt -1)* genannt wird.

Bei einem positiven Operator liegt -1 in der Resolventenmenge, d. h. $(T_0 - (-1))\colon \mathcal{D}(T_0) \longrightarrow \mathcal{H}_0$ besitzt eine (stetige) Inverse. Der Beweis verläuft genauso wie die Aussage, daß bei selbstadjungierten Operatoren nichtreelle Zahlen in der Resolventenmenge liegen (vgl. [WERNER], Theorem VII.2.14).

Falls $\mathcal{H}_0$ ein Teil-HILBERT-Raum vom HILBERT-Raum $\mathcal{H}$ und T_0 weiterhin ein positiver, selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}_0$ ist, so kann die Resolvente bezüglich des größeren HILBERT-Raumes $\mathcal{H}$ definiert werden durch

$$R(T_0)u := \begin{cases} (T_0+1)^{-1}u & \text{falls } u \in \mathcal{H}_0 \\ 0 & \text{falls } u \in \mathcal{H}_0^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0. \end{cases}$$

Kurz soll dafür auch $R(T_0) = (T_0+1)^{-1} \oplus 0_{\mathcal{H}_0^\perp}$ geschrieben werden. Dieser stetige Operator $R(T_0)$ in $\mathcal{H}$ heißt ebenfalls *Resolvente von* T_0.

Diese Definition ist durch das Konzept einer Quasi-Inversen für beliebige selbstadjungierte Operatoren gerechtfertigt (vgl. [WEIDMANN2]).

3.5.2 Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein HILBERT-Raum und sei $\mathcal{H}_n$ ein Teil-HILBERT-Raum von $\mathcal{H}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei T_n ein positiver, in $\mathcal{H}_n$ selbstadjungierter Operator für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere im starken Resolventensinn*, falls $R(T_n) \to R(T_0)$ stark — d. h. punktweise — in $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ konvergiert, d. h. falls

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \big((T_n+1)^{-1} \oplus 0_{\mathcal{H}_n^\perp}\big)u - \big((T_0+1)^{-1} \oplus 0_{\mathcal{H}_0^\perp}\big)u \right\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{H}$$

gilt. Kurz soll dieser Sachverhalt durch $T_n \xrightarrow{\text{s.r.s.}} T_0$ ausgedrückt werden[1].

Ganz analog kann die *Normresolventenkonvergenz* definiert werden (in Zeichen $T_n \xrightarrow{\text{n.r.s.}} T_0$)[2], indem man

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (T_n+1)^{-1} \oplus 0_{\mathcal{H}_n^\perp} - (T_0+1)^{-1} \oplus 0_{\mathcal{H}_0^\perp} \right\|_{\mathbf{L}(\mathcal{H})} = 0$$

fordert.

Sind alle Operatoren selbstadjungiert in einem festen HILBERT-Raum $\mathcal{H} := \mathcal{H}_n$, so reduziert sich die Definition auf die sonst übliche Form

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (T_n+1)^{-1}u - (T_0+1)^{-1}u \right\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{H}$$

bzw. auf die entsprechende Formel für die Normresolventenkonvergenz.

3.5.3 Definition. Seien s und t zwei symmetrische Sesquilinearformen im HILBERT-Raum $\mathcal{H}$. Die Relation $s \le t$ gilt genau dann, falls $\mathcal{D}(s) \supseteq \mathcal{D}(t)$ und $s(u,u) \le t(u,u)$ für alle $u \in \mathcal{D}(t)$ erfüllt ist.

[1]Die Abkürzung *s. r. s.* steht für *(convergence in) strong resolvent sense.*

[2]Entsprechend steht *n. r. s.* für *(convergence in) norm resolvent sense.*

Die zunächst etwas unerwartete Richtung der Inklusion der Definitionsbereiche wird durch folgenden Satz motiviert, der aber erst in Abschnitt 5.2 benötigt wird:

3.5.4 Satz. (Monotone Konvergenz quadratischer Formen)
Sei t_n eine positive, abgeschlossene, im Hilbert-*Raum $\mathcal{H}_n$ dicht definierte Sesquilinearform für $n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin sei $\mathcal{H}$ ein* Hilbert-*Raum, der alle Räume $\mathcal{H}_n$ als Teil-*Hilbert-*Räume enthält. Weiter sei T_n der zur Form t_n gehörende, in $\mathcal{H}_n$ selbstadjungierte, positive Operator (vgl. Theorem 3.1.3), und sei* eine *der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton wachsend, es gelte*
$$\mathcal{D}(t_0) = \bigl\{ u \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(t_n) \bigm| \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n(u,u) < \infty \bigr\} \tag{3.8}$$
und $\lim_{n\to\infty} t_n(u,v) = t_0(u,v)$ für $u, v \in \mathcal{D}(t_0)$.

2. *Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton fallend, die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(t_n)$ liege dicht im* Hilbert-*Raum $\bigl(\mathcal{D}(t_0), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}(t_0)}\bigr)$, und es gelte $\lim_{n\to\infty} t_n(u,v) = t_0(u,v)$ für $u, v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(t_n)$. (Genauer hat man $u, v \in \mathcal{D}(t_{n_0})$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, und der Limes ist über $n \to \infty$ mit $n \geq n_0$ zu nehmen.)*

Dann folgt die starke Resolventenkonvergenz $T_n \xrightarrow{s.r.s.} T_0$.

Beweis. (vgl. [Weidmann2], Satz 3.1) □

Falls die Existenz einer „Grenzform“ t_0 in Satz 3.5.4(1) nicht vorausgesetzt werden soll, so definiert (3.8) eine positive Form mit $t_0(u,u) := \lim_{n\in\mathbb{N}} t_n(u,u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} t_n(u,u)$. Diese Form ist sogar abgeschlossen und dicht definiert im Teil-Hilbert-Raum $\mathcal{H}_0 := \overline{\mathcal{D}(t_0)}$, wobei der Abschluß in $\mathcal{H}$ zu nehmen ist. Somit existiert der zu t_0 gehörende Operator T_0, und die Konvergenz $T_n \xrightarrow{\text{s.r.s.}} T_0$ gilt.

Der folgende Satz wird ebenfalls erst in Abschnitt 5.2 verwendet.

3.5.5 Satz. *Sei T_n ein positiver, im* Hilbert-*Raum $\mathcal{H}_n$ selbstadjungierter Operator für $n \in \mathbb{N}_0$, und sei $\mathcal{H}$ ein* Hilbert-*Raum, der alle Räume $\mathcal{H}_n$ enthält. Dann ist die starke Resolventenkonvergenz $T_n \xrightarrow{s.r.s.} T_0$ äquivalent mit der starken Konvergenz der zugehörigen Halbgruppe, d. h. mit*
$$\lim_{n\to\infty} \bigl\| e^{-tT_n} u - e^{-tT_0} u \bigr\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad \textit{für alle } u \in \mathcal{H} \textit{ und } t > 0.$$

3.5.6 Bemerkungen.

1. Falls $E_n \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \longrightarrow \mathbf{L}(\mathcal{H}_n)$ das Spektralmaß zu T_n in $\mathcal{H}_n$ bezeichnet (vgl. [Werner], Theorem VII.3.2 oder [ReedSimon1], Theorem VIII.6; $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

bezeichnet dabei die σ-Algebra der BOREL-meßbaren Teilmengen von $\mathbb{R}_+$), so wird $e^{-tT_n} \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ durch

$$e^{-tT_n}u := \begin{cases} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t\lambda} dE_n(\lambda)\Big)u & \text{für } u \in \mathcal{H}_n \\ 0 & \text{für } u \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_n \end{cases}$$

definiert. Das Integral existiert im Sinne der Normtopologie auf $\mathbf{L}(\mathcal{H}_n)$ (vgl. auch [LANG2], Abschnitt X.4 und [WERNER], Satz VII.1.11) und ist in der Norm durch 1 beschränkt.

2. Streng genommen bilden die Operatoren e^{-tT_n} keine Halbgruppe, da e^{-0T_n} die Projektion auf $\mathcal{H}_n$ und nicht die Identität auf $\mathcal{H}$ ist.

3. Eine entsprechende Aussage kann auch für die Normresolventenkonvergenz getroffen werden; der Beweis verläuft analog.

Beweis von Satz 3.5.5. Zunächst sei die Halbgruppenkonvergenz vorausgesetzt und $u \in \mathcal{H}_n$. Aus $\frac{1}{\lambda+1} = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t}e^{-t\lambda}dt$ und dem Funktionalkalkül (vgl. [REEDSIMON1], Theorem VIII.5) folgt

$$\begin{aligned} \langle R(T_n)u, u\rangle_{\mathcal{H}} = \big\langle (T_n+1)^{-1}u, u\big\rangle_{\mathcal{H}_n} &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\lambda+1} d\,\langle E_n(\lambda)u, u\rangle_{\mathcal{H}_n} \\ &\overset{\text{FUBINI}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t\lambda} d\,\langle E_n(\lambda)u, u\rangle_{\mathcal{H}_n} dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \big\langle e^{-tT_n}u, u\big\rangle_{\mathcal{H}} dt \\ &= \Big\langle \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t}e^{-tT_n}u\,dt, u\Big\rangle_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral in der Normtopologie auf $\mathcal{H}$ existiert (vgl. [LANG2], Abschnitt X.4, Theorem 2). Mit Hilfe der Polarisierungsidentität (3.1) folgt

$$R(T_n)u = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t}e^{-tT_n}u\,dt$$

zunächst nur für $u \in \mathcal{H}_n$. Für $u \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_n$ haben beide Seiten jedoch den Wert 0, so daß diese Gleichung für alle $u \in \mathcal{H}$ erfüllt ist. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz und der Konvergenz der Halbgruppe gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|R(T_0)u - R(T_n)u\|_{\mathcal{H}} \le \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-t} \underbrace{\big\|e^{-tT_0}u - e^{-tT_n}u\big\|_{\mathcal{H}}}_{\le 2\|u\|_{\mathcal{H}}} dt = 0$$

für alle $u \in \mathcal{H}$.

Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, sei $t > 0$, $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > 0$. Mit $C_0(\mathbb{R}_+)$ wird die komplexe BANACH-Algebra der stetigen Funktionen f auf $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ mit $\lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$ und Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet. Sei A die von $s(\lambda) := \frac{1}{\lambda+1}$ erzeugte Unteralgebra, d. h. die Polynome in s vom Grad größer oder gleich 1. Diese Unteralgebra ist selbstadjungiert (wegen $\overline{s} = s$), sie enthält ein nirgends verschwindendes Element (nämlich s), und sie trennt Punkte, d. h. zu $\lambda \neq \mu$ existiert ein $f \in A$ mit $f(\lambda) \neq f(\mu)$ (z. B. $f = s$). Nach dem Satz von STONE-WEIERSTRASS (vgl. [REEDSIMON1], Theorem IV.10) liegt A dicht in $C_0(\mathbb{R}_+)$. Damit existiert zu $f \in C_0(\mathbb{R}_+)$ mit $f(\lambda) = e^{-t\lambda}$ ein Polynom $p \in A$ mit $\|p - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3\|u\|_{\mathcal{H}}}$. Sei $p(T_n)$ das entsprechende Polynom in $\mathbf{L}(\mathcal{H})$, indem man s durch die Resolvente $R(T_n)$ ersetzt. Aus dem Funktionalkalkül folgt die Abschätzung

$$\left\|p(T_n) - e^{-tT_n}\right\|_{\mathbf{L}(\mathcal{H})} = \left\|\left(p(T_n) - e^{-tT_n}\right)\restriction_{\mathcal{H}_n}\right\|_{\mathbf{L}(\mathcal{H}_n)} < \frac{\varepsilon}{3\,\|u\|_{\mathcal{H}}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (vgl. [REEDSIMON1], Theorem VIII.5). Aus der Voraussetzung und der starken Folgenstetigkeit der Hintereinanderschaltung von Operatoren in $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ folgt die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|p(T_n)u - p(T_0)u\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq n_0$ gilt. Insgesamt erhält man die Behauptung aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}&\left\|e^{-tT_n}u - e^{-tT_0}u\right\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\quad \leq \left\|e^{-tT_n}u - p(T_n)u\right\|_{\mathcal{H}} + \|p(T_n)u - p(T_0)u\|_{\mathcal{H}} + \left\|p(T_0)u - e^{-tT_0}u\right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon\end{aligned}$$

für $n \geq n_0$. □

3.6 Konvergenzaussagen bei starkem Feld

Nun stehen alle Begriffe bereit, um die Konvergenzaussagen über den magnetischen SCHRÖDINGER-Operator aus der Arbeit von R. HEMPEL und I. HERBST zitieren zu können.

Zunächst wird das magnetische Vektorpotential $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ vorgegeben und daraus das zugehörige Magnetfeld $\beta := d\alpha \in \Omega^2_{C^0}\mathbb{R}^d$ abgeleitet. Sei weiter

$$\begin{aligned} M_\alpha &:= \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \alpha(x) = 0\right\} = \alpha^{-1}\{0\} \qquad \text{und} \\ M_\beta &:= \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \beta(x) = 0\right\} = \beta^{-1}\{0\}. \end{aligned}$$

Mit $\operatorname{meas}(A)$ wird das d-dimensionale LEBESGUE-Maß der meßbaren Menge A bezeichnet. Sei H_α der magnetische SCHRÖDINGER-Operator mit Vektorpotential α (vgl. Abschnitt 3.4) und $-\Delta_{M_\beta}$ der DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf der Menge M_β (vgl. Abschnitt 3.3). Dann kann folgende Konvergenz bei wachsendem Magnetfeld gezeigt werden:

3.6.1 Theorem. *Falls* $\operatorname{meas}(M_\beta \setminus M_\alpha) = 0$ *gilt, so folgt die starke Resolventenkonvergenz*

$$H_{\lambda\alpha} \overset{s.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_{M_\beta} \quad \textit{für } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Sei zusätzlich der Träger des Magnetfeldes $\operatorname{supp}\beta = \overline{M_\beta^c}$ *kompakt, oder sei das Magnetfeld* β *eine* $\mathbb{Z}^d$*-periodische Funktion (d. h.* $\beta(n+x) = \beta(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $n \in \mathbb{Z}^d$*). Dann folgt sogar die Normresolventenkonvergenz*

$$H_{\lambda\alpha} \overset{n.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_{M_\beta} \quad \textit{für } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Beweis. (vgl. [HemHer], Theorem 2.2, Corollary 3.3, Theorem 3.9) □

Mit Hilfe dieser Konvergenz können insbesondere Aussagen über das Spektrum von $H_{\lambda\alpha}$ für große λ getroffen werden, falls man das Spektrum von $-\Delta_{M_\beta}$ kennt (vgl. auch die Diskussion in [HemHer], Corollary 3.10).

3.7 Voraussetzungen für die Konvergenz

Für die Konvergenzaussagen bei starkem Magnetfeld im vorigen Abschnitt war die Bedingung $\operatorname{meas}(M_\beta \setminus M_\alpha) = 0$ wesentlich, wobei wie zuvor das Vektorpotential $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$, das Magnetfeld $\beta := d\alpha \in \Omega^2_{C^0}\mathbb{R}^d$ und $M_\alpha := \alpha^{-1}\{0\}$ bzw. $M_\beta := \beta^{-1}\{0\}$ gewählt wurden.

Physikalisch gesehen ist eine solche Bedingung jedoch unbefriedigend, da sie nicht invariant gegenüber Eichtransformationen ist (vgl. Abschnitt 2.7). Sei nämlich $\widetilde{\alpha} := \alpha + df$ eine weitere Einsform mit nichtkonstantem $f \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, für die wegen $d(df) = 0$ ebenfalls $d\widetilde{\alpha} = \beta$ folgt. Dann gilt $M_\alpha \neq M_{\widetilde{\alpha}}$, und i. allg. wird nicht mehr $\operatorname{meas}(M_\beta \setminus M_{\widetilde{\alpha}}) = 0$ erfüllt sein. Interessant sind daher Bedingungen, die nur das Magnetfeld β betreffen und damit unabhängig von dem speziell gewählten Vektorpotential α sind. Da die magnetischen Schrödinger-Operatoren H_α und $H_{\widetilde{\alpha}}$ mit $\widetilde{\alpha} = \alpha + df$ aber unitär äquivalent sind (vgl. Lemma 3.4.1), stimmen insbesondere ihre Spektren überein; spektrale Aussagen bleiben somit unabhängig von einem speziell gewählten Vektorpotential, weshalb eine Bedingung nur an das Feld β auch aus dieser Sicht sinnvoll erscheint.

Bei der Konstruktion des magnetischen Schrödinger-Operators hat man sich zunächst das Vektorpotential α vorgegeben und daraus das Magnetfeld abgeleitet. Entsprechend ist auch die Formulierung von Theorem 3.6.1 von diesem Vektorpotential abhängig.

Falls man sich dagegen *zuerst* das Feld β als geschlossene 2-Form vorgibt, so erhält man dieselben Konvergenzaussagen durch die Forderung an das Feld β, daß eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\alpha = \beta$ und $\operatorname{meas}(M_\beta \setminus M_\alpha) = 0$ existiert (vgl. [HemHer], Kapitel 4). Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes soll ein Kriterium gefunden werden (vgl. Theorem 3.7.3), aus dem die oben beschriebene Bedingung an das Feld folgt. Die hier gewählte Konstruktion wurde bereits in [HemHer], Kapitel 4 vorgeschlagen; sie erfordert folgende Definition:

3.7.1 Definition. Die in $\mathbb{R}^d$ offene Menge U *erlaube einen Fortsetzungsoperator der Klasse* C^k, falls es zu jedem $f \in C^k(U,\mathbb{R})$ mit stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbarer höchster Ableitung $D^k f$ eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ auf ganz $\mathbb{R}^d$ gibt, d. h. es gilt $\tilde{f}\restriction_U = f$.

Diese Definition beinhaltet eine Regularitätsbedingung an die Menge U. Nicht jede Menge wird diese Bedingung erfüllen, wie aus den Gegenbeispielen 4.6.11 ersichtlich ist. Den Fragen der Fortsetzbarkeit von Funktionen der Klasse C^k ist das gesamte Kapitel 4 gewidmet. Wie man leicht sieht, findet man ohne die Voraussetzung an die Fortsetzbarkeit der höchsten Ableitung (bzw. der höchsten partiellen Ableitungen) auf $\overline{U}$ schon bei einfachen Beispielen für die Menge U — z. B. einer Halbebene oder einem Kreis — Funktionen, die sich nicht fortsetzen lassen; man denke etwa an Funktionen mit unbeschränkter Ableitung.

Zur Abkürzung dient folgende Definition:

3.7.2 Definition. Eine *Fläche* sei im folgenden eine zweidimensionale, kompakte, orientierbare, berandete, C^∞-differenzierbare Mannigfaltigkeit, die als Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ aufgefaßt werden kann.

3.7.3 Theorem. *Seien $\beta \in \Omega^2_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ eine geschlossene 2-Form (d. h. $d\beta = 0$), $M \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar mit $U := \mathring{M} \subset M_\beta$ (d. h. $\beta\restriction_U = 0$). Außerdem seien die folgenden drei Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gelte die Flußbedingung $\int_D \beta = 0$ für alle Flächen D mit Rand $\partial D \subset U$.*

2. *Es gelte* $\operatorname{meas}(\partial M) = 0$ *bzw. die schwächere Forderung* $\operatorname{meas}(M \setminus \overline{U}) = 0$.

3. *Die offene Menge U erlaube einen Fortsetzungsoperator der Klasse C^2.*

Dann existiert eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\alpha = \beta$ und $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) = 0$ *(zur Erinnerung: $M_\alpha := \alpha^{-1}\{0\}$).*

Zum Beweis ist folgendes Lemma nötig:

3.7.4 Lemma. *Sei $\beta \in \Omega^2_{C^0}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ eine exakte 2-Form, für die eine 1-Form $\widetilde{\alpha} \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $\beta = d\widetilde{\alpha}$ existiert. Weiter sei U eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gilt $\beta\restriction_U = 0$, und die Flußbedingung $\int_D \beta = 0$ ist für alle Flächen D mit Rand $\partial D \subset U$ erfüllt.*

2. *Die 1-Form $\widetilde{\alpha}\restriction_U$ ist exakt, d. h. es existiert eine Funktion $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ mit $df = \widetilde{\alpha}\restriction_U$.*

Beweis. Zunächst sei die Flußbedingung und $x_0 \in U$ vorausgesetzt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann U als zusammenhängend vorausgesetzt werden (sonst wähle man für jede Zusammenhangskomponente einen Punkt x_0). Sei $x \in U$ ein weiterer Punkt. Da eine offene, zusammenhängende Menge in einem normierten Vektorraum auch wegzusammenhängend ist, existiert ein Weg γ_x von x_0 nach x in U. Ohne Einschränkung kann γ_x als Polygonzug (d. h. als stückweise affiner Weg) und damit als stückweise differenzierbar vorausgesetzt werden (vgl. Lemma 4.5.2). Sei f die durch

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \widetilde{\alpha}$$

definierte Funktion auf U. Zu zeigen bleibt, daß $f(x)$ unabhängig von der Wahl des Weges γ_x ist.

Sei γ_x' ein weiterer Polygonzug von x_0 nach x. Durch Aneinanderfügen von γ_x und $-\gamma_x'$ entsteht ein geschlossener Weg γ. Um den Satz von Stokes (vgl. Theorem 2.6.4) anwenden zu können, muß eine Fläche D gefunden werden, deren Rand dem Weg γ entspricht. Dieses Problem ist in der Knotentheorie im Fall $d = 3$ unter dem Stichwort „Seifert-Flächen“ bekannt.

Zunächst kann angenommen werden, daß γ_x und γ_x' nur die Endpunkte gemeinsam haben (ansonsten betrachte man Teilabschnitte der Wege). Da der geschlossene Weg γ ganz in der offenen Menge U liegt, existiert ein geschlossener Weg $\widetilde{\gamma}$ in U „ohne Ecken“, der homotop zu γ ist und dessen Bild als 1-Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann. Wegen der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (vgl. Satz 2.6.7) haben das Integral über γ und das Integral über $\widetilde{\gamma}$ den gleichen Wert. (Man beachte, daß $d\widetilde{\alpha}\restriction_U = \beta\restriction_U = 0$ gilt.)

In der Knotentheorie wird bewiesen, daß jede geschlossene Kurve Rand einer (topologischen) orientierbaren, kompakten 2-Mannigfaltigkeit ist. Für die Dimension $d = 2$ ist dies eine Konsequenz aus dem Kurvensatz von Jordan (vgl. [Rolfsen], Theorem 2.A.1), für $d = 3$ folgt dies aus der Existenz von Seifert-Flächen (vgl. [Rolfsen], Theorem 5.A.4 und Abbildung 3.1) und im Fall $d \geq 4$ gilt diese Aussage aufgrund des Entknotungssatzes (vgl. [Rolfsen], S. 8). Durch eventuell nötige weitere lokale Änderungen des Weges $\widetilde{\gamma}$ kann außerdem erreicht werden, daß die zu $\widetilde{\gamma}$ gehörende orientierbare 2-Mannigfaltigkeit D, dessen Rand ∂D dem Bild von $\widetilde{\gamma}$ entspricht, sogar differenzierbar, also eine Fläche ist. Insgesamt folgt die Wohldefiniertheit von f aus

$$\int_{\gamma_x} \widetilde{\alpha} - \int_{\gamma_x'} \widetilde{\alpha} = \int_{\gamma} \widetilde{\alpha} = \int_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\alpha} = \int_{\partial D} \widetilde{\alpha} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{D} \beta = 0$$

Schließlich ist $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $df(x) = \tilde{\alpha}(x)$ für $x \in U$, wie man durch Nachrechnen zeigt (vgl. [doCarmo], Proposition 2.1).

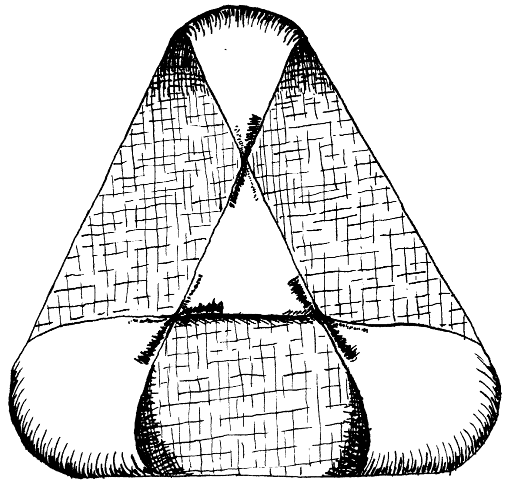

Abbildung 3.1: Ein Beispiel im Fall $d = 3$ für eine SEIFERT-Fläche. Die kleine, dreieckige Fläche in der Mitte, die verdreht an den Ecken „hängt“, ist von derselben Seite zu sehen wie die große darunter. Man beachte, daß der Rand dieser orientierbaren Fläche gleichzeitig der Rand eines MÖBIUS-Bandes ist.

Die umgekehrte Richtung ist trivial, denn zweimaliges Anwenden des Satzes von STOKES liefert $\int_D \beta = \int_{\partial D} \tilde{\alpha} = \int_{\partial\partial D} f = 0$, da $\partial\partial D = \emptyset$ gilt, und es ist $\beta\restriction_U = d(df) = 0$ (vgl. Abschnitt 2.4). $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun das Kriterium bewiesen werden, aus dem die Konvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators folgt.

Beweis von Theorem 3.7.3. Nach dem Lemma von POINCARÉ (vgl. Theorem 2.5.3) existiert zu der geschlossenen 2-Form $\beta \in \Omega^2_{C^1}\mathbb{R}^d$ eine 1-Form $\tilde{\alpha} \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\tilde{\alpha} = \beta$. Nach Lemma 3.7.4 existiert eine Funktion $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $df = \tilde{\alpha}\restriction_U$, woraus mit $\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^d a_j\, dx_j$ für die partiellen Ableitungen $\partial_j f = a_j\restriction_U$ und $\partial_{jk} f = \partial_k a_j\restriction_U$ folgt. Insbesondere sind die zweiten partiellen Ableitungen von f stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar. Nach Voraussetzung (3) des Theorems existiert eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $d\tilde{\alpha}\restriction_U = \tilde{f}\restriction_U$. Aus der Stetigkeit folgt $d\tilde{\alpha}\restriction_{\overline{U}} = \tilde{f}\restriction_{\overline{U}}$, und die zweite Voraussetzung impliziert $d\tilde{\alpha}\restriction_M = \tilde{f}\restriction_M$ f. ü. (man beachte $M \setminus \overline{U} \subseteq \partial M$).

Setzt man $\alpha := \tilde{\alpha} - d\tilde{f} \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$, so folgt $d\alpha = d\tilde{\alpha} = \beta$ (wegen $d(d\tilde{f}) = 0$, vgl. Abschnitt 2.4) und $\alpha(x) = \tilde{\alpha}(x) - d\tilde{f}(x) = 0$ für fast alle $x \in M$. Somit gilt die Implikation $x \in M \Rightarrow x \in M_\alpha$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, d. h. $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) = 0$. $\square$

3.7.5 Bemerkungen.

1. Falls U einfach zusammenhängend ist (vgl. Definition 2.6.6!), folgt hieraus bereits die Flußbedingung: Nach dem Satz von STOKES gilt $\int_D \beta = \int_{\partial D} \tilde{\alpha}$; da aber $\partial D \subset U$ aufgefaßt als geschlossener Weg homotop zu einem Punkt

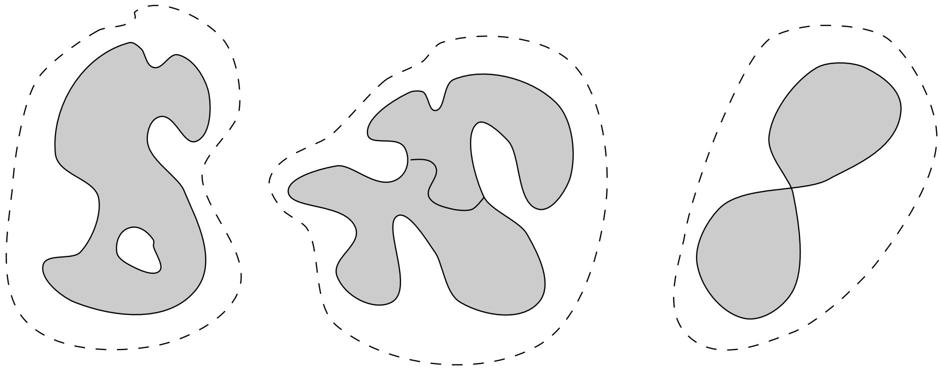

Abbildung 3.2: Für die Flußbedingung im Fall des zweidimensionalen Raumes genügt es, daß das Integral über die gestrichelt umrandeten Flächen D, die die Komponenten des Magnetfeldbereichs Ω (grau) enthalten, jeweils verschwindet.

$x_0 \in U$ ist und das (Weg-)Integral invariant bei homotopen Wegen bleibt (vgl. Satz 2.6.7), gilt $\int_{\partial D} \widetilde{\alpha} = \int_{\{x_0\}} \widetilde{\alpha} = 0$.

2. Falls $M = \beta^{-1}\{0\}$ gilt, genügt im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ für die Flußbedingung, daß der Gesamtfluß durch jede beschränkte Zusammenhangskomponente von $\Omega := M^c$ verschwindet, wobei Zusammenhangskomponenten, die keinen echt positiven Abstand zueinander haben, zu einer Komponente zusammengefaßt seien (vgl. Abbildung 3.2). Die Begründung erfolgt wieder mit dem Satz von Stokes (vgl. Theorem 2.6.4) und mit der Homotopieinvarianz des Wegintegrals (vgl. Satz 2.6.7).

3. Falls $\beta \in \Omega^2_{C^0}\mathbb{R}^d$ nur stetig ist, muß zusätzlich gefordert werden, daß eine 1-Form $\tilde{\alpha} \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\tilde{\alpha} = \beta$ existiert (vgl. Abschnitt 2.7).

Das folgende Lemma zeigt, daß die Flußbedingung ein sinnvolles Kriterium für die Bedingung $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) = 0$ ist. In gewisser Weise ist dieses Lemma die Umkehrung von Theorem 3.7.3:

3.7.6 Lemma. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar. Falls zur 2-Form $\beta \in \Omega^2_{C^0}\mathbb{R}^d$ eine 1-Form $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\alpha = \beta$ und $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) = 0$ existiert, so folgt die Flußbedingung $\int_D \beta = 0$ für alle Flächen D mit $\partial D \subset U := \mathring{M}$.*

Beweis. Falls $\int_D \beta \neq 0$ für eine Fläche D gelten sollte, so folgt mit dem Satz von Stokes $\int_{\partial D} \alpha \neq 0$. Somit existiert ein $x \in \partial D \subset U$ mit $\alpha(x) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von α gibt es eine offene Umgebung V von x, die ohne Einschränkung der Allgemeinheit ganz in $U \subset M$ liegt und in der α ebenfalls von 0 verschiedene Werte annimmt. Damit folgt $V \subset M \setminus M_\alpha$ und $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) > 0$. □

Kapitel 4

Der Fortsetzungssatz von Whitney

In diesem Kapitel wird der Fortsetzungssatz von WHITNEY (Abschnitt 4.4) verwendet, um das im letzten Abschnitt gestellte Fortsetzungsproblem für Funktionen der Klasse C^k zu lösen. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 verschiedene Möglichkeiten diskutiert, mit denen Abschätzungen, wie sie beim TAYLOR-Restterm auftreten, formuliert werden können. Im nächsten Abschnitt wird kurz auf die TAYLOR-Entwicklung einer differenzierbaren Funktion eingegangen. Anschließend kann in Abschnitt 4.3 eine Definition von „Funktionen" der Klasse C^k auf *beliebigen* Mengen angegeben werden, die im Falle von offenen Mengen mit der gewöhnlichen übereinstimmt. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von WHITNEY kann eine solche differenzierbare „Funktion" auf einer abgeschlossenen Menge auf den ganzen Raum $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt werden. Um diese von WHITNEY bereits 1934 gefundene Aussage auf das Problem der Fortsetzbarkeit von Funktionen der Klasse C^k auf einer offenen Menge anwenden zu können, werden in Abschnitt 4.5 geometrische Eigenschaften des Randes einer offenen Menge diskutiert, unter denen das Fortsetzungsproblem in Abschnitt 4.6 gelöst werden kann.

Der hier gewählte Zugang zur Differentialrechnung, wie er beispielsweise in [DIEUDONNÉ] oder in [LANG2] zu finden ist, mag auf den ersten Blick etwas abstrakt erscheinen. Er hat allerdings mehrere Vorteile: Zum einen lassen sich sämtliche Resultate der Differentialrechnung sofort auf BANACH-Räume übertragen, sofern sie keine Koordinaten bzw. andere spezielle Eigenschaften endlichdimensionaler normierter Räume benutzen, zum anderen reduzieren sich viele Beweise in koordinatenfreier Darstellung auf das Wesentliche. Ableitungen werden als multilineare Abbildungen gedeutet, was eine kompaktere Schreibweise auch für höhere Ableitungen ermöglicht. Dabei nimmt natürlich die Komplexität mit jeder Ableitung zu; dennoch wurde hier der abstraktere Weg genommen.

Im weiteren Verlauf des Kapitels seien stets E und F zwei reelle BANACH-Räume, sofern nichts Gegenteiliges behauptet wird. Später wird zwar nur der Fall $E = \mathbb{R}^d$ und $F = \mathbb{R}$ benötigt, die Beweise vereinfachen sich dadurch jedoch nicht.

Es macht auch Sinn, gleich von vektorwertigen Funktionen auszugehen, da schon die erste Ableitung einer reellwertigen Funktion als Werte lineare Abbildungen hat. Der Fortsetzungssatz von WHITNEY kann aber nur für den Fall $E = \mathbb{R}^d$ bewiesen werden.

4.1 Stetigkeitsmoduln

Seien E und F zwei BANACH-Räume. In den folgenden Abschnitten treten häufig Abschätzungen des TAYLOR-Restterms auf. Es erweist sich in dieser Arbeit als nützlich, zwischen den verschiedenen Arten der Abschätzungen zu unterscheiden (vgl. Definition 4.1.3). Stetigkeitsmodule erlauben es, die Abschätzungen elegant zu formulieren und einfach mit ihnen zu rechnen. Ihr Zusammenspiel mit den Abschätzungen wird besonders in Abschnitt 4.6 genutzt.

4.1.1 Definition. Ein *Stetigkeitsmodul* ist eine monoton wachsende Abbildung $\alpha\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$, für die $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = \alpha(0) = 0$ gilt und die in jedem Punkt rechtsseitig stetig ist.

4.1.2 Bemerkung. Die rechtsseitige Stetigkeit wird erst im Abschnitt 4.6 benötigt; sie ist entscheidend für die Übertragung von Abschätzungen in einer offenen Menge auf ihren Abschluß. Auf die manchmal geforderte Konkavität von α (vgl. [GLAESER], [MALGRANGE] oder [TOUGERON]) soll hier verzichtet werden.

4.1.3 Definition. Seien $D \subseteq E \times E$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $R\colon D \longrightarrow F$, $(x,y) \longmapsto R_y(x)$.

1. Die Abbildung R ist *gleichmäßig von der Ordnung k*, in Zeichen
$$R_y(x) = o(\|x-y\|_E^k) \quad \text{für} \quad (x,y) \in D,$$
falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|R_y(x)\|_F \le \varepsilon \|x-y\|_E^k$ für alle $(x,y) \in D$ mit $\|x-y\|_E < \delta$ gilt.

2. Die Abbildung R ist *lokal gleichmäßig von der Ordnung k in $x_0 \in E$*, in Zeichen
$$R_y(x) = o_{x_0}(\|x-y\|_E^k) \quad \text{für} \quad (x,y) \in D,$$
falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{x_0} > 0$ gibt, so daß $\|R_y(x)\|_F \le \varepsilon \|x-y\|_E^k$ für alle $(x,y) \in D$ mit $\|x-x_0\|_E < \delta_{x_0}$ und $\|y-x_0\|_E < \delta_{x_0}$ gilt.

3. Die Abbildung R ist *lokal von der Ordnung k in $x_0 \in E$*, in Zeichen
$$R_{x_0}(x) = o_{x_0}(\|x-x_0\|_E^k) \quad \text{für} \quad x \in E \text{ mit } (x,x_0) \in D,$$
falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{x_0} > 0$ gibt, so daß $\|R_{x_0}(x)\|_F \le \varepsilon \|x-x_0\|_E^k$ für alle $(x,x_0) \in D$ mit $\|x-x_0\|_E < \delta_{x_0}$ gilt.

4.1.4 Bemerkungen.

1. Die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) sind trivial, die Umkehrungen gelten i. allg. jedoch nicht (vgl. aber Satz 4.1.5).

2. Seien $k = 0$, $f\colon U \longrightarrow F$, $D := U \times U$. Dann ist $f(x) - f(y) = o(1)$ für alle $x, y \in U$ äquivalent zur gleichmäßigen Stetigkeit von f. Sei $x_0 \in U$. Die lokale Abschätzung $f(x) - f(x_0) = o_{x_0}(1)$ für alle $x \in U$ ist äquivalent zur Stetigkeit von f in x_0.

3. Der Name „lokal gleichmäßig" ist gerechtfertigt, denn die lokal gleichmäßige Abschätzung der Ordnung k in x_0 von R bedeutet tatsächlich nichts anderes, als daß es eine Umgebung V von x_0 gibt, in der $R{\restriction}_{D\cap V\times V}$ gleichmäßig von der Ordnung k ist.

4.1.5 Satz. *Seien $K \subset E$ kompakt, $k \in \mathbb{N}_0$ und $R\colon K \times K \longrightarrow F$. Dann folgt aus der lokal gleichmäßigen Abschätzung $R_y(x) = o_{x_0}(\|x-y\|_E^k)$ für alle $x_0 \in K$ die gleichmäßige Abschätzung $R_y(x) = o(\|x-y\|_E^k)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $x_0 \in K$ ein $\delta_{x_0} > 0$, so daß $\|R_y(x)\|_F \leq \varepsilon\,\|x-y\|_E^k$ für alle $x, y \in K$ mit $\|x - x_0\|_E < \delta_{x_0}$ und $\|y - x_0\|_E < \delta_{x_0}$ gilt. Die Kugeln $B_E(x_0, \frac{1}{2}\delta_{x_0})$ bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge K. Es existieren also endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in K$, deren Kugeln schon die Menge K überdecken. Man setze $\delta := \min_{\nu=1,\dots,n} \frac{1}{2}\delta_{x_\nu}$. Seien nun $x, y \in K$ mit $\|x-y\|_E < \delta$. Dann existiert ein $\nu \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|x - x_\nu\|_E < \frac{1}{2}\delta_{x_\nu} < \delta_{x_\nu}$. Weiter gilt $\|y - x_\nu\|_E \leq \|y - x\|_E + \|x - x_\nu\|_E < \delta + \frac{1}{2}\delta_{x_\nu} \leq \delta_{x_\nu}$, also nach Voraussetzung $\|R_y(x)\|_F \leq \varepsilon\,\|x-y\|_E^k$. $\square$

4.1.6 Satz. *Seien $D \subseteq E \times E$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $R\colon D \longrightarrow F$, $(x,y) \longmapsto R_y(x)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abschätzung $R_y(x) = o(\|x-y\|_E^k)$ gilt für alle $(x,y) \in D$.*

2. *Es existiert ein Stetigkeitsmodul α mit $\|R_y(x)\|_F \leq \alpha(\|x-y\|_E)\,\|x-y\|_E^k$ für alle $(x,y) \in D$.*

Beweis. Für die Richtung (1) $\Rightarrow$ (2) sei

$$\alpha(t) := \sup\left\{ \frac{\|R_y(x)\|_F}{\|x-y\|_E^k} \,\middle|\, (x,y) \in D,\ x \neq y,\ \|x-y\|_E \leq t \right\} \quad \text{für} \quad t > 0$$

und $\alpha(0) := 0$. (Es sei ausdrücklich erwähnt, daß $\alpha(t) = \infty$ für $t \in (0,\infty)$ eintreten kann.) Die Monotonie von α ist trivialerweise erfüllt. Die Stetigkeit von α in $t = 0$ folgt aus der Voraussetzung (1). Sollte α nicht rechtsseitig stetig sein, so modifiziere man α zu $\widetilde{\alpha}$. Man setze dazu $\widetilde{\alpha}(t) := \alpha(t)$ an allen Stellen $t \in [0,\infty)$, an denen α stetig ist, und $\widetilde{\alpha}(t) := \lim_{s\to t, s>t} \alpha(s)$ an den (höchstens abzählbar vielen) Unstetigkeitsstellen t von α. Die so konstruierte Abbildung $\widetilde{\alpha}$ ist ein Stetigkeitsmodul. Wegen der Monotonie von α gilt $\alpha \leq \widetilde{\alpha}$, also insbesondere auch die behauptete Ungleichung in (2).

Die Richtung (2) $\Rightarrow$ (1) folgt sofort aus der Stetigkeit von α in 0. □

4.1.7 Bemerkungen.

1. Entsprechende Aussagen können auch für die lokal gleichmäßige und die lokale Abschätzung gemacht werden. Die so konstruierten Stetigkeitsmoduln hängen dann natürlich von der Stelle $x_0 \in U$ ab.

2. Dieser Satz erklärt den Begriff „Stetigkeitsmodul“ aus Definition 4.1.1, denn eine Abbildung $f: U \longrightarrow F$ ist genau dann gleichmäßig stetig, falls es einen Stetigkeitsmodul α gibt, so daß $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \alpha(\|x - y\|_E)$ für alle $x, y \in U$ gilt. Dieser Stetigkeitsmodul wird auch *der zu f gehörende Stetigkeitsmodul* genannt. Entsprechend ist f genau dann in $x_0 \in U$ stetig, falls es einen Stetigkeitsmodul α_{x_0} gibt, so daß $\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \alpha_{x_0}(\|x - x_0\|_E)$ für alle $x \in U$ gilt.

4.2 Taylor-Entwicklung und Resttermabschätzungen

Zunächst wird kurz der abstrakte Zugang zur Differenzialrechnung dargestellt. Das anschließend behandelte Problem der Resttermabschätzung der TAYLOR-Entwicklung erlaubt im nächsten Abschnitt die Verallgemeinerung des Begriffs der differenzierbaren Funktion.

4.2.1 Differentialrechnung in Banach-Räumen

Wie üblich seien E und F zwei BANACH-Räume. Sei U eine offene Menge in E. In diesem Kontext heißt eine Funktion $f: U \longrightarrow F$ *an der Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar*, falls eine stetige, lineare Abbildung $D_{x_0}f \in \mathbf{L}(E, F)$ zwischen E und F existiert, die

$$f(x) - f(x_0) - D_{x_0}f \cdot (x - x_0) = o_{x_0}(\|x - x_0\|_E) \quad \text{für} \quad x \in U \tag{4.1}$$

erfüllt. Die Ableitung $D_{x_0}f$ ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt. Die Abbildung f heißt *stetig differenzierbar* auf U, falls f für alle $x_0 \in U$ differenzierbar und $Df: U \longrightarrow \mathbf{L}(E, F)$, $x \longmapsto D_x f$ stetig ist. Bildet man entsprechend die zweite Ableitung, also die Ableitung von Df, so entsteht zunächst eine Abbildung $D(Df)$ von U in den Raum $\mathbf{L}(E, \mathbf{L}(E, F))$. Dieser BANACH-Raum ist aber normisomorph zum Raum der (stetigen) bilinearen Abbilungen von $E \times E$ nach F, kurz $\mathbf{L}_2(E, F)$ (vgl. (2.1)). Die entsprechende Ableitung im Punkt x sei mit $D_x^2 f$ bezeichnet. Analog sind höhere Ableitungen $D^k f$ als Abbildungen von U in $\mathbf{L}_k(E, F)$, dem Raum der stetigen k-fach multilinearen Abbildungen, zu interpretieren. Sämtliche k-ten Ableitungen sind als multilineare Abbildungen symmetrisch, was für $E = \mathbb{R}^d$ nichts anderes bedeutet, als daß die partiellen Ableitungen vertauscht werden dürfen.

Der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von U nach F werde mit $C^k(U, F)$ bezeichnet. Wie üblich setzt man $D^0 f := f$ und $\mathbf{L}_0(E, F) := F$, und $C^0(U, F)$ sei der Raum der stetigen Funktionen auf U.

Polynome sind beliebig oft stetig differenzierbar, und es gelten die gewöhnlichen Ableitungsregeln für ein Polynom $p(x) := A \cdot (x - x_0)^k$ mit $A \in \mathbf{S}_k(E, F)$:

$$D_x^i p = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} A \cdot (x - x_0)^{k-i} \cdot (\cdot)^i & \text{falls } i \le k, \\ 0 & \text{falls } i > k. \end{cases} \tag{4.2}$$

4.2.2 Taylor-Entwicklung und Resttermabschätzungen

Seien $U \subseteq E$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Die gewöhnliche TAYLOR-Formel für $f \in C^k(U, F)$ lautet

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} D_{x_0}^i f \cdot (x - x_0)^i + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} D^k_{x_0 + t(x - x_0)} f \cdot (x - x_0)^k \, dt$$

für alle $x, x_0 \in U$, für die das *Segment* $[x, x_0] := \{x + t(x_0 - x) \in E \mid t \in [0, 1]\}$ ganz in U liegt (vgl. [DIEUDONNÉ] Abschnitt VIII. 14). Zur Definition und zu einfachen Aussagen über vektorwertige Integrale sei auf [DIEUDONNÉ], Abschnitt VIII. 7, oder auf [LANG2], Kapitel X, verwiesen. Man setzt zur Abkürzung (auch für $k = 0$)

$$\begin{aligned} T_{x_0}^k f(x) &:= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} D_{x_0}^i f \cdot (x - x_0)^i \\ R_{x_0}^k f(x) &:= f(x) - T_{x_0}^k f(x) \end{aligned} \qquad \text{für } x, x_0 \in U. \tag{4.3}$$

Beachtet man $\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{(k-1)!} \, dt = \frac{1}{k!}$ für $k > 0$, so erhält man für den Restterm

$$R_{x_0}^k f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(D^k_{x_0 + t(x - x_0)} f - D^k_{x_0} f \right) \cdot (x - x_0)^k \, dt. \tag{4.4}$$

Die höchste Ableitung $D^k f \colon U \longrightarrow \mathbf{L}_k(E, F)$ ist stetig in $x_0 \in U$. Außerdem gilt sowohl $\left\| A \cdot x^k \right\|_F \le \|A\|_{\mathbf{L}_k(E,F)} \|x\|_E^k$ für multilineare, stetige Abbildungen A als auch $\left\| \int_0^1 g(t) \, dt \right\|_F \le \int_0^1 \|g(t)\|_F \, dt$ für stetige Abbildungen $g \colon [0, 1] \longrightarrow F$. Deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_{x_0} > 0$, so daß der Restterm abgeschätzt werden kann mit $\left\| R_{x_0}^k f(x) \right\|_F \le \varepsilon \|x - x_0\|_E^k$ für $\|x - x_0\|_E < \delta_{x_0}$, nach Definition 4.1.3(3) also

$$R_{x_0}^k f(x) = o_{x_0}(\|x - x_0\|_E^k) \quad \text{für } x \in U. \tag{4.5}$$

Man beachte, daß die Bedingung $[x_0, x] \subset U$ für genügend kleine $\delta_{x_0} > 0$ immer erfüllt werden kann, da U offen ist. Das so gewählte δ_{x_0} ist natürlich abhängig von $x_0 \in U$.

Ist $D^k f$ sogar gleichmäßig stetig in U, so kann δ unabhängig von x_0 gewählt werden. I. allg. darf man aber nicht auf die Bedingung $[x_0, x] \subset U$ verzichten. Nach Definition 4.1.3(1) wird dieser Sachverhalt durch

$$R^k_{x_0} f(x) = o(\|x - x_0\|^k_E) \quad \text{für } (x, x_0) \in D := \bigl\{(x, y) \in U \times U \bigm| [x, y] \subset U\bigr\} \tag{4.6}$$

beschrieben. Nach Satz 4.1.6 existiert also ein Stetigkeitsmodul α, so daß

$$\bigl\|R^k_{x_0} f(x)\bigr\|_F \leq \alpha(\|x - x_0\|_E)\, \|x - x_0\|^k_E \quad \text{für } (x, x_0) \in D \tag{4.7}$$

gilt. Wie man anhand der expliziten Resttermdarstellung (4.4) sieht, kann für α das Stetigkeitsmodul der Abbildung $D^k f$ gewählt werden. Aussagen über die Resttermabschätzung sind somit von derselben Güte wie die höchste Ableitung.

Um später den Fortsetzungssatz von Whitney anwenden zu können, ist eine gleichmäßige Abschätzung des Restterms für alle $x_0, x \in U$ nötig. Wünschenswert ist es daher, die Einschränkung $[x_0, x] \subset U$ durch allgemeinere geometrische Eigenschaften von U auszudrücken. Üblicherweise betrachtet man hier konvexe Mengen, was aber eine zu starke Einschränkung darstellt. Deshalb wird in Abschnitt 4.5 eine allgemeinere Klasse von Mengen zugelassen, für die man eine derartige Abschätzung erhält.

Für $E = \mathbb{R}^d$ gilt i. allg. nicht die gleichmäßige, zumindest aber die lokal gleichmäßige Abschätzung:

4.2.3 Lemma. *Sei U eine offene Menge in $E = \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in U$. Weiterhin sei $f \in C^k(U, F)$ und $R^k f\colon U \times U \longrightarrow F$, $(x, y) \longmapsto R^k_y f(x)$ der k-te* Taylor-*Restterm aus (4.3). Dann gilt für $R^k f$ sogar die lokal gleichmäßige Abschätzung*

$$R^k_y f(x) = o_{x_0}(\|x - y\|^k_E) \quad \textit{für } x, y \in U.$$

Beweis. Sei K eine kompakte, konvexe Umgebung von x_0, die ganz in U liegt. Die Einschränkung $D^k f\restriction_K$ ist gleichmäßig stetig. Mit der Abschätzung (4.6) für die Funktion $f\restriction_{\mathring{K}}$ folgt

$$R^k_y \left(f\restriction_{\mathring{K}}\right)(x) = o(\|x - y\|^k_E) \quad \text{für } x, y \in \mathring{K}.$$

Die so gefundene Abschätzung ist nichts anderes als die behauptete lokal gleichmäßige Abschätzung für den Restterm $R^k f$ (vgl. Bemerkung 4.1.4(3)). $\square$

4.3 Differenzierbare Funktionen im Sinne von Whitney

Seien E und F zwei BANACH-Räume und $k \in \mathbb{N}_0$. In diesem Abschnitt soll neben dem Raum $C^k(U,F)$ für offene U in E eine entsprechende Definition für den Raum $\boldsymbol{C}^k(M,F)$ für beliebige Definitionsbereiche $M \subseteq E$ gefunden werden. Da sich in diesem Fall die Ableitungen i. allg. nicht mehr eindeutig definieren lassen (man denke etwa an endliche Mengen M), wird ihre Information einfach in die Struktur aufgenommen. Diese Struktur $\boldsymbol{f}$, genannt *Jet*, besteht aus $k+1$ Komponentenfunktionen $f^{(j)}\colon U \longrightarrow \mathbf{S}_j(E,F)$, die die Rolle der Funktion (für $j=0$) und der Ableitungen (für $j=1,\dots,k$) übernehmen werden.

Die Resttermabschätzung der TAYLOR-Entwicklung gibt eine Möglichkeit, die üblichen Funktionen der Klasse C^k im Raum der Jets auf U wiederzuerkennen, und ermöglicht die gewünschte Definition 4.3.8.

4.3.1 Definition. Sei $M \subseteq E$ eine beliebige Menge. Ein *Jet der Ordnung k auf M mit Werten in F* ist eine Abbildung

$$\boldsymbol{f}\colon M \longrightarrow \bigoplus_{j=0}^{k} \mathbf{S}_j(E,F).$$

Ein Jet $\boldsymbol{f}$ besteht also aus $k+1$ Komponentenfunktionen $f^{(j)}\colon U \longrightarrow \mathbf{S}_j(E,F)$ für $j=0,\dots,k$, kurz $\boldsymbol{f} = \left(f^{(j)}\right)_{j=0,\dots,k}$. Der Vektorraum aller solcher Jets sei mit $J^k(M,F)$ bezeichnet. Als *Funktionswert eines Jets* $\boldsymbol{f}$ wird der Funktionswert der Komponentenfunktion $f^{(0)}$ genommen, also $\boldsymbol{f}(x) := f^{(0)}(x)$ für $x \in M$.

Dies ist ein kleiner Mißbrauch der Symbole, denn die Zuordnung $x \longmapsto \boldsymbol{f}(x)$ ist nichts anderes als die Komponentenfunktion $f^{(0)}$, während $\boldsymbol{f}$ aus allen $k+1$ Komponentenfunktionen besteht. Diese Schreibweise soll jedoch an „gewöhnliche" Funktionen erinnern.

4.3.2 Beispiel. Sei U eine offene Umgebung von M und $f \in C^k(U,F)$. Dann wird durch $\boldsymbol{f} := (D^j f\restriction_M)_{j=0,\dots,k}$ ein Jet der Ordnung k auf M mit Werten in F definiert. Die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} J^k\colon C^k(U,F) & \longrightarrow & J^k(M,F) \\ f & \longmapsto & \boldsymbol{f} \end{array}$$

ist im Fall $M = U$ injektiv. Ganz analog erhält man für $i=0,\dots,k$ Abbildungen

$$J^{k-i}\colon C^{k-i}(U,\mathbf{S}_i(E,F)) \quad\longrightarrow\quad J^{k-i}(M,\mathbf{S}_i(E,F)),$$

die eine Rolle spielen werden, wenn der Jet der Ableitung $D^i f$ gebildet werden soll (vgl. Lemma 4.3.4).

4.3.3 Definition. Sei $M \subseteq E$. Analog zum Ableitungsoperator

$$D^i \colon C^k(U, F) \longrightarrow C^{k-i}(U, \mathbf{S}_i(E, F))$$

für offene Mengen $U \subseteq E$ kann ein Operator

$$\boldsymbol{D}^i \colon J^k(M, F) \longrightarrow J^{k-i}(M, \mathbf{S}_i(E, F))$$

definiert werden. Sei $\boldsymbol{f} \in J^k(M, F)$. Man setze $\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f} := \left(f^{(i+j)}\right)_{j=0,\dots,k-i}$. Dieser Jet heißt die *$i$-te Ableitung* von $\boldsymbol{f}$. Für den Funktionswert an der Stelle $x \in M$ soll auch $\boldsymbol{D}^i_x\boldsymbol{f} := \boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = f^{(i)}(x)$ geschrieben werden. Die Abbildung $x \longmapsto \boldsymbol{D}^i_x\boldsymbol{f}$ ist also nichts anderes als die i-te Komponentenfunktion von $\boldsymbol{f}$.

Das einmalige Ableiten eines Jets bewirkt quasi ein „Verschieben“: Die ursprünglich erste Ableitung rückt ganz nach vorn, die zweite an erste Stelle usw. Dabei geht wie bei gewöhnlichen Ableitungen ein Teil der Information über die Funktion verloren.

Die Abbildung $\boldsymbol{D}^i$ ist wegen der Identifizierung (2.1) und der Einbettung von $\mathbf{S}_{i+j}(E, F)$ in $\mathbf{S}_j(E, \mathbf{S}_i(E, F))$ sinnvoll definiert, was nichts anderes bedeutet, als daß $\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f} \in \bigoplus_{j=0}^{k-i} \mathbf{S}_j(E, \mathbf{S}_i(E, F))$ gilt.

4.3.4 Lemma. *Sei U eine offene Umgebung von M und $i \in \{0, \dots, k\}$. Dann gilt*

$$\boldsymbol{D}^i(J^k f) = J^{k-i}(D^i f) \quad \textit{für} \quad f \in C^k(U, F),$$

mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
C^k(U, F) & \xrightarrow{J^k} & J^k(M, F) \\
{\scriptstyle D^i}\big\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{D}^i}\big\downarrow \\
C^{k-i}(U, \mathbf{S}_i(E, F)) & \xrightarrow{J^{k-i}} & J^{k-i}(M, \mathbf{S}_i(E, F))
\end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. $\boldsymbol{D}^i\left(J^k f\right) = \boldsymbol{D}^i\left((D^j f)_{j=0,\dots k}\right) = (D^{j+i}f)_{j=0,\dots,k-i} = J^{k-i}\left(D^i f\right).$ □

Ähnlich wie in diesem Lemma lassen sich viele Beziehungen zwischen differenzierbaren Funktionen mit den Jetabbildungen J^k auf Jets übertragen. Anstelle der Ableitung D^i können auch die Operatoren $T^k_{x_0}$ bzw. $R^k_{x_0}$ aus (4.3) und ihre Jet-Entsprechungen stehen (s. auch die folgende Definition), da sie sich aus den Ableitungen in linearer Weise zusammensetzen.

4.3.5 Definition. Sei $M \subseteq E$. Analog zum TAYLOR-Polynom $T^k_{x_0} f$ für gewöhnliche Funktionen $f \in C^k(U,F)$ wird das TAYLOR-*Polynom* $\boldsymbol{T}^k_{x_0}\boldsymbol{f}$ für $\boldsymbol{f} \in J^k(M,F)$ definiert durch

$$\boldsymbol{T}^k_{x_0}\boldsymbol{f}(x) := \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\,\boldsymbol{D}^j_{x_0}\boldsymbol{f}\cdot(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\, f^{(j)}(x_0)\cdot(x-x_0)^j.$$

In der Tat ist $\boldsymbol{T}^k_{x_0}\boldsymbol{f}$ ebenso wie $T^k_{x_0} f$ ein Element von $P_k(E,F)$ (vgl. Korollar 2.1.3).

Der *Restterm* $\boldsymbol{R}^k_{x_0}\boldsymbol{f} = \left(r^{(j)}_{x_0}\right)_{j=0,\ldots,k}$ eines Jets $\boldsymbol{f} \in J^k(M,F)$ ist definiert durch

$$r^{(i)}_{x_0}(x) = f^{(i)}(x) - \sum_{j=0}^{k-i} \frac{1}{j!}\, f^{(i+j)}(x_0)\cdot(x-x_0)^j\cdot(\cdot)^i.$$

Der Restterm $\boldsymbol{R}^k_{x_0}\boldsymbol{f}$ ist selber ein Jet der Ordnung k, dessen i-te Komponente $x \longmapsto \boldsymbol{D}^i_x\big(\boldsymbol{R}^k_{x_0}\boldsymbol{f}\big) = r^{(i)}_{x_0}(x)$ dem Restterm der TAYLOR-Entwicklung der i-ten Ableitung $\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}$ entspricht, wie das folgende Lemma zeigt (vgl. (4.9)).

4.3.6 Lemma. *Seien $\boldsymbol{f} \in J^k(M,F)$, $x_0 \in M$ und $i \in \{0,\ldots,k\}$. Dann gilt*

$$D^i\boldsymbol{T}^k_{x_0}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}^{k-i}_{x_0}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f} \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{R}^k_{x_0}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{R}^{k-i}_{x_0}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f} \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{R}^k_{x_0}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} - J^k\left(\boldsymbol{T}^k_{x_0}\boldsymbol{f}\right). \tag{4.10}$$

Die ersten beiden Beziehungen lassen sich in einem kommutativen Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccccc}
P_k(E,F) & \xleftarrow{\boldsymbol{T}^k_{x_0}} & J^k(M,F) & \xrightarrow{\boldsymbol{R}^k_{x_0}} & J^k(M,F) \\
{\scriptstyle D^i}\big\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{D}^i}\big\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{D}^i}\big\downarrow \\
P_{k-i}(E,\mathbf{S}_i(E,F)) & \xleftarrow{\boldsymbol{T}^{k-i}_{x_0}} & J^{k-i}(M,\mathbf{S}_i(E,F)) & \xrightarrow{\boldsymbol{R}^{k-i}_{x_0}} & J^{k-i}(M,\mathbf{S}_i(E,F))
\end{array}$$

Beweis. Die Beweise beschränken sich auf einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung der Ableitungsregeln (4.2) für verallgemeinerte Polynome. □

Analoge Aussagen gelten selbstverständlich auch für differenzierbare Funktionen im gewöhnlichen Sinn.

4.3.7 Lemma. *Sei $M = U$ eine offene Menge in E und $\boldsymbol{f} \in J^k(U,F)$ ein Jet.*

1. *Es gilt $\boldsymbol{f} \in$* bild J^k *(d. h. es existiert ein $f \in C^k(U,F)$ mit $J^k f = \boldsymbol{f}$) genau dann, wenn die* lokale *Abschätzung*

$$\boldsymbol{R}^{k-i}_{x_0}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = o_{x_0}(\|x-x_0\|^{k-i}_E)$$

für alle $i \in \{0,\ldots,k\}$ und alle $x, x_0 \in U$ erfüllt ist.

2. *Gilt zusätzlich* $E = \mathbb{R}^d$, *dann ist* $\boldsymbol{f} \in \operatorname{bild} J^k$ *sogar äquivalent zur* lokal gleichmäßigen *Abschätzung*

$$\boldsymbol{R}_y^{k-i}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = o_{x_0}(\|x-y\|_E^{k-i})$$

für alle $i \in \{0,\dots,k\}$ *und alle* $x, y, x_0 \in U$.

Beweis. Wegen Lemma 4.2.3 genügt es, Teil 1 zu zeigen. Sei zunächst $\boldsymbol{f} = J^k f$ mit $f \in C^k(U,F)$. Dann ist $D^i f \in C^{k-i}(U, \mathbf{S}_i(E,F))$ für $i = 0,\dots,k$. Die TAYLORsche Formel (4.5) liefert die gewünschte lokale Abschätzung, wenn man (4.10) und die nach Lemma 4.3.4 angedeutete Übertragung auf Jets beachtet.

Gelte umgekehrt die lokale Abschätzung und sei $f(x) := \boldsymbol{f}(x)$. Es bleibt $f \in C^k(U,F)$ und $J^k(f) = \boldsymbol{f}$ zu zeigen und damit die Gültigkeit von $D_x^i f = \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f}$ für alle $i = 0,\dots,k$ und $x \in U$.

Aus der Voraussetzung folgt mit (4.10) die Abschätzung

$$\boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_{x_0}^{k-i}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = o_{x_0}(\|x-x_0\|_E^{k-i}).$$

Hieraus folgert man leicht

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}_{x_0}^i\boldsymbol{f} &= o_{x_0}(1) \quad \text{für } i = 0,\dots,k \text{ und} \qquad (4.11)\\ \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}_{x_0}^i\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}_{x_0}^{i+1}\boldsymbol{f}\cdot(x-x_0) &= o_{x_0}(\|x-x_0\|_E) \quad \text{für } i = 1,\dots,k-1. \end{aligned}$$

Gezeigt wurde damit, daß die Komponentenfunktionen $x \longmapsto \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f}$ des Jets $\boldsymbol{f}$ stetig und differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$ sind mit Ableitung $x \longmapsto \boldsymbol{D}_x^{i+1}\boldsymbol{f}$ (vgl. (4.1)). Mittels vollständiger Induktion zeigt man, daß $D_x^i f = \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f}$ gilt. ☐

4.3.8 Definition. Ein Jet $\boldsymbol{f} \in J^k(M,F)$ heißt *k-mal stetig differenzierbar* (im Sinne von WHITNEY), falls die lokal gleichmäßige Abschätzung

$$\boldsymbol{R}_y^{k-i}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = o_{x_0}(\|x-y\|_E^{k-i})$$

für alle $i \in \{0,\dots,k\}$ und alle $x, y \in M$ in allen $x_0 \in M$ gilt. Der Vektorraum der k-mal stetig differenzierbaren Jets sei mit $\boldsymbol{C}^k(M,F)$ bezeichnet.

4.3.9 Bemerkungen.

1. Sei $\boldsymbol{f} = \left(f^{(j)}\right)_{j=0,\dots,k}$ ein Jet aus $J^k(M,F)$. Dann ist $\boldsymbol{f}$ genau dann differenzierbar im Sinne von WHITNEY, falls

$$f^{(i)}(x) - \sum_{j=0}^{k-i}\frac{1}{j!}f^{(i+j)}(x_0)\cdot(x-x_0)^j\cdot(\cdot)^i = o_{x_0}(\|x-y\|_E^{k-i})$$

für alle $i \in \{0,\dots,k\}$ und alle $x, y, x_0 \in M$ gilt.

2. Sei $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^k(U,F)$ ein differenzierbarer Jet. Dann sind die Komponentenfunktionen $x \mapsto \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f} \colon M \longrightarrow \mathbf{S}_i(E,F)$ von $\boldsymbol{f}$ stetig auf M (Beweis wie in (4.11)).

3. Sei $M = U$ eine offene Menge in $E = \mathbb{R}^d$. Wegen Lemma 4.3.7(2) ist die Jetabbildung
$$J^k\colon C^k(U,F) \longrightarrow \boldsymbol{C}^k(U,F)$$
aus Beispiel 4.3.2 ein Isomorphismus, d. h. die Definition von „differenzierbar" im Sinne von Whitney verallgemeinert die übliche Definition im Fall $E = \mathbb{R}^d$. Die Umkehrabbildung $(J^k)^{-1}$ ordnet jedem Jet $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^k(U,F)$ seine erste Komponentenfunktion $x \longmapsto \boldsymbol{f}(x)$ zu.

4. Der Grund, warum in Definition 4.3.8 die lokal gleichmäßige Abschätzung und nicht die lokale gewählt wurde, liegt darin, daß der Fortsetzungssatz von Whitney sich nur für diesen Fall beweisen läßt. Da im Fortsetzungssatz außerdem $E = \mathbb{R}^d$ gilt, ist diese Unterscheidung wegen Lemma 4.3.7(2) nicht von Bedeutung.

Das folgende Lemma wird entscheidend sein beim Abschätzen der Restterme im Beweis des Fortsetzungssatzes von Whitney:

4.3.10 Lemma. *Seien $\boldsymbol{f} \in J^k(M,F)$, $x_0, y_0 \in M$, $x \in E$ und $i \in \{0,\dots,k\}$. Dann gilt*
$$D_x^i\left(\boldsymbol{T}_{x_0}^k\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_{y_0}^k\boldsymbol{f}\right) = \sum_{j=0}^{k-i}\frac{1}{j!}\left(\boldsymbol{R}_{y_0}^{k-(i+j)}\boldsymbol{D}^{i+j}\boldsymbol{f}\right)(x_0)\cdot(x-x_0)^j\cdot(\cdot)^i.$$

Beweis. Sei zunächst $i = 0$. Wie man sich mittels (4.2) und Lemma 2.1.2 überzeugen kann, ist die k-te Taylor-Entwicklung eines Polynoms mit maximalem Grad k das Polynom selber, somit gilt:
$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{T}_{x_0}^k\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_{y_0}^k\boldsymbol{f}\right)(x) &= T_{x_0}^k\left(\boldsymbol{T}_{x_0}^k\boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}_{y_0}^k\boldsymbol{f}\right)(x) \\
&= \boldsymbol{T}_{x_0}^k\left(\boldsymbol{R}_{y_0}^k\boldsymbol{f} - \boldsymbol{R}_{x_0}^k\boldsymbol{f}\right)(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\left(\boldsymbol{D}_{x_0}^j\boldsymbol{R}_{y_0}^k\boldsymbol{f} - \boldsymbol{D}_{x_0}^j\boldsymbol{R}_{x_0}^k\boldsymbol{f}\right)\cdot(x-x_0)^j
\end{aligned}$$
Wegen (4.9) und der Beobachtung, daß der Restterm an seiner Entwicklungsstelle x_0 den Wert 0 hat, verschwindet der zweite Term in der Summe, und die Behauptung ist bewiesen. Für $i \in \{1,\dots,k\}$ folgt die Behauptung sofort aus dem Fall $i = 0$ für den Jet $\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}$ unter Beachtung von (4.8). □

4.4 Der Fortsetzungssatz von Whitney

In diesem Abschnitt sei $E = \mathbb{R}^d$ und F ein beliebiger Banach-Raum. Der Beweis des Fortsetzungssatzes von Whitney (vgl. Theorem 4.4.6) richtet sich im wesentlichen nach [MALGRANGE] bzw. [TOUGERON]. Bei ihnen wird auch der Begriff „Jet“ eingeführt. Beide Autoren rechnen im Gegensatz zu dieser Arbeit in Koordinaten mit partiellen Ableitungen und Multi-Indizes, wie dies auch WHITNEY in seiner 1934 erschienenen Originalarbeit getan hat (vgl. [WHITNEY1]). Der Originalbeweis ist jedoch stellenweise sehr technisch; eine Vereinfachung des Beweises findet man in [GLAESER], wo u. a. mit Stetigkeitsmoduln gerechnet wird. Die wichtigsten Hilfsmittel für den Fortsetzungssatz — die Zerlegung einer offenen Menge in Würfel (vgl. Satz 4.4.2) und die Zerlegung der Eins von WHITNEY (vgl. Satz 4.4.4) — werden hier explizit formuliert, da sie ein nützliches Werkzeug in vielen Bereichen der Analysis darstellen. In [STEIN] findet man einige Beispiele. Dort wird u. a. eine Version des Fortsetzungssatzes von WHITNEY für differenzierbare Funktionenräume (genauer: „Jet“-Räume) bewiesen, bei denen die Restterme gleichmäßig mit einem festen Stetigkeitsmodul abgeschätzt werden können. Der Beweis verläuft in weiten Teilen analog — eine solche Aussage wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch nicht benötigt und würde nur eine Einschränkung an die fortzusetzende Funktion stellen.

4.4.1 Lemma. *Seien $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^d$ drei Mengen. Dann gilt*

$$\operatorname{dist}(A, C) - \operatorname{diam} B \leq \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C).$$

Wie üblich wurde $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\left\{ \|a - b\| \;\middle|\; a \in A, b \in B \right\}$ für den Abstand der beiden Mengen A und B und $\operatorname{diam} B := \sup\left\{ \|b - b'\| \;\middle|\; b, b' \in B \right\}$ für den Durchmesser von B gesetzt.

Beweis. Für $a \in A$, $b, b' \in B$ und $c \in C$ gilt

$$\begin{aligned} \|a - c\| &\leq \|a - b\| + \|b - b'\| + \|b' - c\| \quad \text{und damit} \\ \|a - c\| &- \|b - b'\| \leq \|a - b\| + \|b' - c\| . \end{aligned}$$

Durch Bildung des Infimums auf beiden Seiten für alle vier Variablen ergibt sich die Behauptung; dabei ist $\inf -(\dots) = -\sup(\dots)$ zu beachten. □

Im folgenden Satz wird zu einer offenen Menge eine Überdeckung aus Würfeln konstruiert, deren Größe proportional zum Abstand vom Rand ist. Die Anzahl der Nachbarn eines Würfels ist nach oben durch eine Konstante beschränkt, die nur von der Dimension d abhängt.

4.4.2 Satz. (Whitney-Zerlegung einer offenen Menge in Würfel)
Seien Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{M}_n$ die Menge aller abgeschlossenen Würfel[1] *mit Seitenlänge 2^{-n}, deren Ecken auf dem Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}^d$ liegen. Dann existiert eine Menge von Würfeln $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{W}_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Es gilt $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, und je zwei Würfel aus $\mathcal{W}$ sind entweder disjunkt oder schneiden sich nur in Randpunkten.*

[1] Genaugenommen betrachtet man d-dimensionale „Hyperwürfel“.

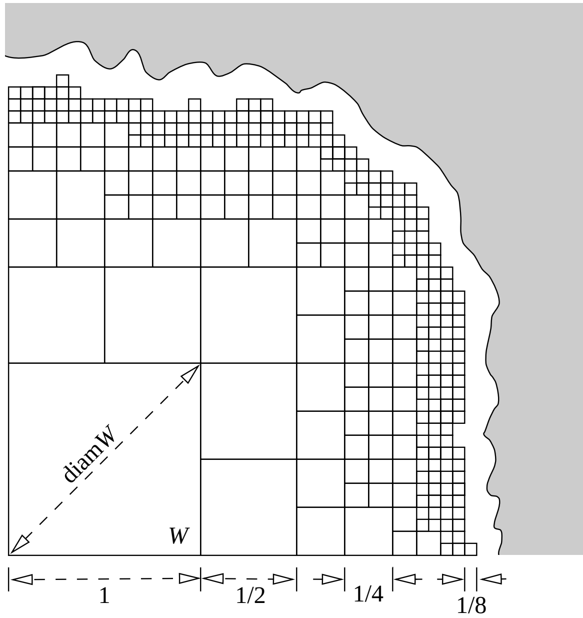

Abbildung 4.1: WHITNEY-Zerlegung einer offenen Menge Ω in Würfel. Das Komplement von Ω ist grau gezeichnet.

2. *Die Würfel $W \in \mathcal{W}$ überdecken Ω, d. h. $\Omega = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$.*

3. *Der Abstand der Würfel zum Rand hat die Größenordung des Durchmessers der Würfel, genauer gilt* $\operatorname{diam} W \leq \operatorname{dist}(W, \Omega^c)$ *für alle* $W \in \mathcal{W}_0$ *und* $\operatorname{diam} W \leq \operatorname{dist}(W, \Omega^c) \leq 4 \operatorname{diam} W$ *für alle* $W \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_n$.

4. *Jeder Würfel $W \in \mathcal{W}$ hat höchstens 12^d Nachbarn aus $\mathcal{W}$, d. h. Würfel, deren Schnitt mit W nicht leer ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{W}_0$ die Menge aller Würfel aus $\mathcal{M}_0$, die $\sqrt{d} \leq \operatorname{dist}(W, \Omega^c)$ erfüllen. Die Menge $\mathcal{W}_n$ wird rekursiv definiert: $\mathcal{W}_n$ sei die Menge aller Würfel aus $\mathcal{M}_n$, die nicht bereits in Würfeln aus $\mathcal{W}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{W}_{n-1}$ enthalten sind und für die

$$2^{-n}\sqrt{d} \leq \operatorname{dist}(W, \Omega^c) \leq 4 \cdot 2^{-n}\sqrt{d}$$

gelten (vgl. Abbildung 4.1).

(1) und (3) sind trivialerweise erfüllt[2]. In (2) ist die Inklusion „$\supseteq$“ klar, denn aus $0 < \operatorname{dist}(W, \Omega^c)$ folgt $W \subseteq \Omega$. Um die andere Inklusion zu beweisen, sei $x \in \Omega$. Zu zeigen ist, daß ein Würfel $W \in \mathcal{W}$ mit $x \in W$ existiert.

[2]Man beachte, daß hier die EUKLIDische Norm $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ in $\mathbb{R}^d$ gewählt wurde. Ein Würfel $W \in \mathcal{M}_n$ mit Kantenlänge 2^{-n} hat in diesem Fall den Durchmesser $\operatorname{diam} W = 2^{-n}\sqrt{d}$.

Falls $\operatorname{dist}(x, \Omega^c) > 4\sqrt{d}$ erfüllt ist, gilt für jeden Würfel $W \in \mathcal{M}_0$ mit $x \in W$

$$\operatorname{dist}(W, \Omega^c) = \overbrace{\operatorname{dist}(x, W)}^{=0} + \operatorname{dist}(W, \Omega^c) \geq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) - \operatorname{diam} W > 3\sqrt{d} \geq \sqrt{d}$$

nach Lemma 4.4.1, also gilt $W \in \mathcal{W}_0$.

Sonst sei $n \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, daß $2 \cdot 2^{-n}\sqrt{d} \leq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq 4 \cdot 2^{-n}\sqrt{d}$ gilt. Dabei ist zu beachten, daß wegen der Offenheit von Ω die Zahl $\operatorname{dist}(x, \Omega^c)$ echt positiv ist. Sei $W \in \mathcal{M}_n$ ein Würfel, der x enthält. Dann gilt

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2^{-n}\sqrt{d} \geq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) &\geq \operatorname{dist}(W, \Omega^c) + \overbrace{\operatorname{dist}(x, W)}^{=0} \\ &\geq \operatorname{dist}(x, \Omega^c) - \operatorname{diam} W \\ &\geq 2^{-n}\sqrt{d}. \end{aligned}$$

Damit gibt es entweder einen Würfel $W' \in \mathcal{W}_0 \cup \dots \cup \mathcal{W}_{n-1}$ mit $x \in W \subset W'$, oder es gilt $W \in \mathcal{W}_n$. Damit ist auch (2) bewiesen.

Falls ein Würfel $W \in \mathcal{W}_n$ kleinere Nachbarn hat, so stammen sie notwendigerweise aus $\mathcal{W}_n \cup \mathcal{W}_{n+1} \cup \mathcal{W}_{n+2}$, denn sonst gäbe es einen Nachbarn $W' \in \mathcal{W}_{n'}$, $n' \geq n + 3$, mit

$$\operatorname{dist}(W, \Omega^c) \leq \overbrace{\operatorname{dist}(W, W')}^{=0} + \operatorname{diam} W' + \operatorname{dist}(W', \Omega^c) \leq 5 \cdot 2^{-n'}\sqrt{d} < 2^{-n}\sqrt{d}$$

im Widerspruch zu $W \in \mathcal{W}_n$.

Jeder Würfel $W \in \mathcal{M}_n$ hat 3^d Nachbarn aus $\mathcal{M}_n$ (er selber mitgerechnet), also höchstens 3^d Nachbarn, die größer oder gleich groß sind wie W. Jeder dieser gleichgroßen Nachbarn enthält maximal 4^d Würfel aus $\mathcal{W}_n \cup \mathcal{W}_{n+1} \cup \mathcal{W}_{n+2}$, damit hat W maximal 12^d Nachbarn. □

4.4.3 Definition. Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$. Eine Familie $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aus glatten Funktionen (d. h. Funktionen aus $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$) ist eine *lokal endliche Familie*, falls jeder Punkt $x \in \Omega$ eine offene Umgebung V_x besitzt, so daß bis auf endlich viele Ausnahmen $\theta_\lambda \restriction_{V_x} = 0$ für $\lambda \in \Lambda$ gilt.

Eine *(glatte) Zerlegung der Eins* von Ω ist eine lokal endliche Familie $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ aus glatten Funktionen, falls $0 \leq \theta_\lambda \leq 1$ für jedes $\lambda \in \Lambda$ und $\sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda = 1$ gilt.

Es sei angemerkt, daß bei lokal endliche Familien aus glatten Funktionen in der Summe $\sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda : x \longmapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} \theta_\lambda(x)$ lokal stets nur endlich viele Summanden auftreten, weshalb die Summe ebenfalls eine glatte Funktion ist.

Mit Hilfe der Whitney-Zerlegung einer offenen Menge in Würfel kann eine Zerlegung der Eins mit zusätzlichen quantitativen Bedingungen konstruiert werden. Erstens liegt jeder Punkt nur in einer durch die Dimension beschränkten Zahl von Trägermengen der Zerlegung, und zweitens ist die Größe einer Trägermenge beschränkt durch ihren Abstand vom Rand. Diese beiden Eigenschaften werden beim Fortsetzungssatz von Whitney ganz entscheidend genutzt.

4.4.4 Satz. (Zerlegung der Eins von Whitney)
Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{R}^d$. Dann gibt es eine glatte Zerlegung der Eins $(\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes $x \in \Omega$ ist die Zahl der $\lambda \in \Lambda$ mit $\theta_\lambda(x) > 0$ durch 12^d beschränkt, d. h. es gilt $\operatorname{card}\Lambda_x \leq 12^d$ mit $\Lambda_x := \{\lambda \in \Lambda \mid x \in \operatorname{supp}\theta_\lambda\}$.*

2. *Für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\theta_\lambda \leq 2\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\theta_\lambda, \Omega^c)$.*

3. *Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $C_k > 0$, so daß*
$$\left\|D^k_x\theta_\lambda\right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq C_k\left(1 + \operatorname{dist}(x, \Omega^c)^{-k}\right)$$
für alle $x \in \Omega$ und $\lambda \in \Lambda$ gilt.

Beweis. Sei $\Lambda := \mathcal{W}$, wobei $\mathcal{W}$ die Zerlegung von Ω in Würfel aus 4.4.2 ist. Weiterhin sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ eine Funktion mit $0 \leq \psi \leq 1$, die auf dem Würfel mit Seitenlänge 1 und Mittelpunkt 0 den Wert 1 hat und deren Träger im Würfel mit Seitenlänge $1+\varepsilon$ und Mittelpunkt 0 enthalten ist, wobei ε mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ gewählt werden kann. Man setze $\psi_W(x) := \psi\left(\frac{x-c_W}{l_W}\right)$ für $x \in \Omega$, wobei c_W den Mittelpunkt und l_W die Kantenlänge des Würfels W bezeichnet. Der Träger von ψ_W liegt damit im Würfel mit Durchmesser $(1+\varepsilon)\, l_W\sqrt{d} = (1+\varepsilon)\operatorname{diam}W$.

Für den Abstand von $\operatorname{supp}\psi_W$ zu Ω^c gilt
$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\psi_W, \Omega^c) \geq \operatorname{dist}(W, \Omega^c) - \varepsilon\operatorname{diam}W \geq (1-\varepsilon)\operatorname{diam}W \geq \frac{1}{2}\operatorname{diam}W > 0 \tag{4.12}$$
nach Satz 4.4.2(3). Insbesondere gilt $\operatorname{supp}\psi_W \subset \Omega$ und $\psi_W \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Durch die Wahl von ε wurde erreicht, daß jedes $x \in W$ nur in den Trägern der unmittelbaren Nachbarn W' liegt, und da W nur maximal 12^d Nachbarn hat, liegt jeder Punkt aus W nur in höchstens 12^d Mengen $\operatorname{supp}\psi_{W'}$. Außerdem gilt $\psi_W(x) = 1$ für $x \in W$. Damit ist $(\psi_W)_{W\in\mathcal{W}}$ eine lokal endliche Familie mit
$$1 \leq \theta(x) := \sum_{W\in\mathcal{W}} \psi_W(x) \leq 12^d \tag{4.13}$$
für $x \in \Omega$. Man setze $\theta_W := \psi_W/\theta$. Somit ist $(\theta_W)_{W\in\mathcal{W}}$ eine glatte Zerlegung der Eins, die (1) und (2) erfüllt (dabei ist $\operatorname{supp}\theta_W = \operatorname{supp}\psi_W$ und (4.12) zu beachten).

Um (3) zu zeigen, beachte man, daß
$$\left\|D^k_x\psi_W\right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} = \frac{1}{l_W^k}\left\|D^k\psi\left(\tfrac{x-c_W}{l_W}\right)\right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq \frac{C''_k}{l_W^k} \tag{4.14}$$

gilt, wobei C''_W nur von ψ und k abhängt. Hieraus und mit (4.13) folgt

$$\left\| D_x^k \theta \right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq 12^d \frac{C''_W}{l_W^k}. \tag{4.15}$$

Ferner gilt nach wiederholter Anwendung der Quotientenregel

$$D_x^k \left(\frac{\psi_W}{\theta} \right) \cdot (\cdot)^k = \frac{\sum\limits_{i_1 i_2 + j_1 j_2 = k} \alpha_{i_1 i_2 j_1 j_2 k} \left(D_x^{i_1} \psi_W \cdot (\cdot) \right)^{i_2} \left(D_x^{j_1} \theta \cdot (\cdot) \right)^{j_2}}{(\theta(x))^{k+1}} \tag{4.16}$$

mit Konstanten, die nur von den angegebenen Größen abhängen. Aus (4.13) bis (4.16) folgt die Existenz einer nur von k (und ψ) abhängigen Konstanten $C'_k > 0$ mit

$$\left\| D_x^k \theta_W \right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq \frac{C'_k}{l_W^k}$$

für $x \in \Omega$.

Falls $W \in \mathcal{W}_0$ gilt (d. h. $l_W = 1$), so folgert man

$$\left\| D_x^k \theta_W \right\|_{\mathbf{L}_k(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \leq C'_k.$$

Für $W \in \mathcal{W}_n$ mit $n \geq 1$ und $x \in \operatorname{supp} \theta_W$ gilt wegen Lemma 4.4.1 und Satz 4.4.2(3)

$$\operatorname{dist}(x, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(x, W) + \operatorname{diam} W + \operatorname{dist}(W, \Omega^c) \leq (\varepsilon + 5) \operatorname{diam} W \leq 6\sqrt{d}\, l_W.$$

Insgesamt gilt die Behauptung mit $C_k := \left(6\sqrt{d}\right)^k C'_k$. □

Das folgende Lemma konstruiert zu jeder Trägermenge der Zerlegung der Eins von Ω ein Element aus dem Komplement $K := \Omega^c$, das bei der Fortsetzung eines Jets auf K eine wichtige Rolle spielt.

4.4.5 Lemma. *Sei K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^d$ und $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ die Zerlegung der Eins zur offenen Menge $\Omega = K^c$ aus Satz 4.4.4. Dann existiert zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein Punkt $x_\lambda \in K$, so daß*

$$\begin{aligned} \|x - x_\lambda\| \leq 4 \operatorname{dist}(x, K) &\leq 4 \|x - x_0\| \\ \|x_0 - x_\lambda\| &\leq 4 \|x - x_0\| \\ \|y_0 - x_\lambda\| &\leq 4 \operatorname{dist}(x, K) \end{aligned}$$

für alle $x \in \operatorname{supp} \theta_\lambda$ und alle $x_0 \in K$ gilt, wobei $y_0 \in K$ den Abstand $\operatorname{dist}(x, K) = \operatorname{dist}(x, y_0)$ *minimiert.*

Beweis. Da K kompakt ist, existiert ein $x_\lambda \in K$ mit $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\theta_\lambda, K) = \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\theta_\lambda, x_\lambda)$. Sei $x \in \operatorname{supp}\theta_\lambda$ und $x_0 \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x - x_\lambda\| &\leq \inf_{y\in\operatorname{supp}\theta_\lambda} \|x-y\| + \inf_{y\in\operatorname{supp}\theta_\lambda} \|y - x_\lambda\| \\
&\leq \operatorname{diam}\operatorname{supp}\theta_\lambda + \operatorname{dist}(\operatorname{supp}\theta_\lambda, K) \\
&\leq 3\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\theta_\lambda, K) \\
&\leq 3\operatorname{dist}(x, K) \\
&= 3\,\|x - x_0\|\,,
\end{aligned}$$

wobei in der mittleren Ungleichung Satz 4.4.4(2) angewandt wurde. Die zweite Behauptung folgt sofort aus $\|x_0 - x_\lambda\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - x_\lambda\|$. Der minimierende Punkt $y_0 \in K$ existiert, da K kompakt ist. Die dritte Behauptung folgt genauso aus der ersten Ungleichung. $\square$

Die 4 anstelle der 3 in der ersten Ungleichung wurde gewählt, um später nur auf eine Größe zurückgreifen zu müssen. Im Prinzip ist der Wert der Konstanten egal; wichtig ist nur, daß sie unabhängig von den anderen Größen ist.

Im Fortsetzungssatz von Whitney wird zu einem Jet der Klasse C^k auf der kompakten Menge K eine Fortsetzung auf $\mathbb{R}^d$ wie folgt konstruiert: Zu jedem Punkt x aus K^c bestimmt man einen Hilfspunkt x_λ aus K gemäß Lemma 4.4.5. Das Taylor-Polynom in diesem Punkt bildet lokal die Fortsetzung, die global mit Hilfe der Zerlegung der Eins von Whitney auf K^c gegeben ist. Die quantitativen Aussagen über die Hilfspunkte stellen sicher, daß die Fortsetzung tatsächlich von der Klasse C^k ist.

4.4.6 Theorem. (Fortsetzungssatz von Whitney für kompakte Mengen) *Sei $k \in \mathbb{N}$, K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^d$ und F ein beliebiger* Banach*-Raum. Dann existiert zu jedem Jet $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^k(K, F)$ eine Funktion $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$, so daß $\tilde{f}(x) = \boldsymbol{f}(x)$ bzw. $D_x^i \tilde{f} = \boldsymbol{D}_x^i \boldsymbol{f}$ für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$ und $x \in K$ gilt.*

4.4.7 Bemerkungen.

1. Nach Bemerkung 4.3.9(3) ist es egal, ob die Fortsetzung ein Jet aus $\boldsymbol{C}^k(\mathbb{R}^d, F)$ oder eine Funktion aus $C^k(\mathbb{R}^d, F)$ ist, da beide Räume in kanonischer Weise isomorph zueinander sind.

2. Der Fortsetzungsoperator $\tilde{\ }: \boldsymbol{C}^k(K, F) \longrightarrow C^k(\mathbb{R}^d, F)$ ist linear und sogar stetig bei Wahl geeigneter Topologien bzw. Normen auf (Teil-)Räumen der differenzierbaren Jets bzw. Funktionen. Darauf soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

3. Ein entsprechender Satz kann auch für Jets der Klasse C^∞ bewiesen werden (vgl. [Tougeron], Abschnitt IV.3).

Beweis von Theorem 4.4.6. Wie oben schon angedeutet setzt man

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{f}(x) & \text{für } x \in K \text{ und} \\ \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \theta_\lambda(x) \boldsymbol{T}^k_{x_\lambda} \boldsymbol{f}(x) & \text{für } x \in K^c, \end{cases}$$

wobei $(\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ die Zerlegung der Eins aus Satz 4.4.4 zu $\Omega := K^c$ ist und $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ wie in Lemma 4.4.5 gesetzt wurde. Der Jet $\tilde{\boldsymbol{f}} \in J^k(\mathbb{R}^d, F)$ sei definiert durch die Komponentenfunktionen $\tilde{f}^{(i)}$ für $i \in \{0, \ldots, k\}$ mit

$$\tilde{f}^{(i)}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{D}^i_x \boldsymbol{f} & \text{für } x \in K \text{ und} \\ D^i_x \tilde{f} & \text{für } x \in K^c. \end{cases}$$

Wenn gezeigt werden kann, daß die Funktion $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^d$ k-mal stetig differenzierbar ist mit Ableitungen $\tilde{f}^{(i)}$, so ist das Theorem bewiesen, denn die Fortsetzungseigenschaften ergeben sich aus der Definition von $\tilde{\boldsymbol{f}}$.

Die Abbildung $\tilde{f}\restriction_{K^c}$ ist glatt; nach Lemma 4.3.7(1) gilt die lokale Abschätzung

$$\boldsymbol{R}^{k-i}_{x_0} \boldsymbol{D}^i \tilde{\boldsymbol{f}}(x) = o_{x_0}(\|x - x_0\|^{k-i}) \tag{4.17}$$

in $x_0 \in K^c$ für alle $x \in K^c$ und $i \in \{0, \ldots, k\}$, denn nach Definition des Jets $\tilde{\boldsymbol{f}}$ stimmt $J^k\left(\tilde{f}\restriction_{K^c}\right)$ mit $\tilde{\boldsymbol{f}}$ auf K^c überein.

Sei $x_0 \in K$. Wenn gezeigt werden kann, daß ein Stetigkeitsmodul $\widetilde{\alpha}$ existiert, so daß

$$\left\|\boldsymbol{R}^{k-i}_{x_0} \boldsymbol{D}^i \tilde{\boldsymbol{f}}(x)\right\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d, F)} \le \widetilde{\alpha}(\|x - x_0\|)\, \|x - x_0\|^{k-i} \tag{4.18}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{0, \ldots, k\}$ gilt, folgt hieraus die (4.17) entsprechende lokale Abschätzung in $x_0 \in K$ (vgl. Bemerkung 4.1.7(1)). Insgesamt schließt man auf die Behauptung $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$ und $D^i\tilde{f} = \tilde{f}^{(i)}$, indem man Lemma 4.3.7(1) diesmal in der anderen Richtung anwendet.

Nach Voraussetzung an den Jet $\boldsymbol{f}$ erfüllen seine Restterme die lokal gleichmäßige Abschätzung auf der kompakten Menge K, nach Satz 4.1.5 und Satz 4.1.6 existiert also für jedes $i \in \{0, \ldots, k\}$ ein Stetigkeitsmodul α_i mit

$$\left\|\boldsymbol{R}^{k-i}_{y} \boldsymbol{D}^i \boldsymbol{f}(x)\right\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d, F)} \le \alpha_i(\|x - y\|)\, \|x - y\|^{k-i} \tag{4.19}$$

für alle $x, y \in K$. Der durch $\alpha(t) := \max_{i\in\{0,\ldots,k\}} \alpha_i(t)$ definierte Stetigkeitsmodul α erfüllt alle Ungleichungen simultan. Die Abschätzung (4.18) ist für $x \in K$ erfüllt, sofern nur $\alpha \le \tilde{\alpha}$ gilt, denn der Jet $\tilde{\boldsymbol{f}}$ stimmt auf K mit $\boldsymbol{f}$ per definitionem überein.

Ziel des Restes des Beweises wird es sein, einen solchen Stetigkeitsmodul $\tilde{\alpha}$ zu konstruieren, der zudem noch (4.18) für alle $x \in K^c$ erfüllt. Dazu sei $x \in K^c$. Dann gilt

$$\boldsymbol{R}^k_{x_0} \tilde{\boldsymbol{f}}(x) = \tilde{f}(x) - \boldsymbol{T}^k_{x_0} \boldsymbol{f}(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_x} \theta_\lambda(x) \left(\boldsymbol{T}^k_{x_\lambda} \boldsymbol{f} - \boldsymbol{T}^k_{x_0} \boldsymbol{f}\right)(x).$$

Aus der LEIBNIZschen Regel und (4.9) folgt

$$\boldsymbol{R}_{x_0}^{k-i}\boldsymbol{D}^i\tilde{\boldsymbol{f}}(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda_x}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D_x^h\theta_\lambda\cdot(\cdot)^h\, D_x^{i-h}\left(\boldsymbol{T}_{x_\lambda}^k\boldsymbol{f}-\boldsymbol{T}_{x_0}^k\boldsymbol{f}\right)\cdot(\cdot)^{i-h}.$$

Der Summand für $h=0$ läßt sich mit Lemma 4.3.10 in der Norm abschätzen zu

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_x}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{1}{j!}\left\|\boldsymbol{R}_{x_0}^{k-(i+j)}\boldsymbol{D}^{i+j}\boldsymbol{f}(x_\lambda)\cdot(x-x_\lambda)^j\cdot(\cdot)^i\right\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d,F)}.$$

Dieser Term kann unter Berücksichtigung von (4.19), Satz 4.4.4(1) und Lemma 4.4.5 weiter abgeschätzt werden:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_x}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{1}{j!}\,\alpha(\|x_0-x_\lambda\|)\,\|x_0-x_\lambda\|^{k-(i+j)}\,\|x-x_\lambda\|^j \le$$
$$\le 12^d\,4^{k-i}\,e\,\alpha(4\,\|x-x_0\|)\,\|x-x_0\|^{k-i}.$$

Ein Summand für $h\in\{1,\dots,k\}$ ist gegeben durch

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_x}\sum_{h=0}^{i}\binom{i}{h}D_x^h\theta_\lambda\cdot(\cdot)^h\,D_x^{i-h}\left(\boldsymbol{T}_{x_\lambda}^k\boldsymbol{f}-\boldsymbol{T}_{y_0}^k\boldsymbol{f}\right)\cdot(\cdot)^{i-h}$$

für beliebige $y_0\in K$, denn der von λ unabhängige Teil der Summe verschwindet wegen $\sum_{\lambda\in\Lambda}D^h\theta_\lambda=0$. Man wähle $y_0\in K$, so daß $\|x-y_0\|=\operatorname{dist}(x,K)\le\|x-x_0\|$ gilt. Dann läßt sich der Summand wie oben und mit Satz 4.4.4(3) abschätzen zu

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_x}\sum_{j=0}^{k-(i-h)}\frac{1}{j!}\binom{i}{h}C_h\bigl(1+\operatorname{dist}(x,K)^{-h}\bigr)\cdot$$
$$\cdot\left\|\boldsymbol{R}_{y_0}^{k-(i-h+j)}\boldsymbol{D}^{i-h+j}\boldsymbol{f}(x_\lambda)\cdot(x-x_\lambda)^j\cdot(\cdot)^{i-h}\right\|_{\mathbf{L}_{i-h}(\mathbb{R}^d,F)}.$$

Wieder mit (4.19), Satz 4.4.4(1) und Lemma 4.4.5 ist dieser Term nach oben beschränkt durch

$$12^d\,e\binom{i}{h}C_h\left(1+\operatorname{dist}(x,K)^{-h}\right)\alpha\bigl(4\operatorname{dist}(x,K)\bigr)\bigl(4\operatorname{dist}(x,K)\bigr)^{k-(i-h)}\le$$
$$\le 12^d\,4^{k-(i-h)}\,e\binom{i}{h}C_h\,\alpha\bigl(4\,\|x-x_0\|\,\bigr)\bigl(\,\|x-x_0\|^h+1\bigr)\,\|x-x_0\|^{k-i}.$$

Insgesamt wähle man den Stetigkeitsmodul

$$\widetilde{\alpha}(t):=\max\Bigl\{\alpha(t),\sum_{h=0}^{k}\bigl(12^d\,4^{k-(i-h)}\,e\binom{i}{h}C_h\bigr)\alpha(4t)(t^h+1)\Bigr\},$$

der (4.18) erfüllt. □

Die Kompaktheit stellt keine wesentliche Einschränkung dar; wie im folgenden Theorem bewiesen wird, können Jets auf beliebigen abgeschlossenen Mengen fortgesetzt werden.

4.4.8 Theorem. (Fortsetzungssatz von Whitney für abgeschl. Mengen) *Seien $k \in \mathbb{N}$, M eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ und F ein beliebiger* BANACH-*Raum. Dann existiert zu jedem Jet $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C}^k(M,F)$ eine Funktion $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d,F)$, so daß $\tilde{f}(x) = \boldsymbol{f}(x)$ bzw. $D_x^i \tilde{f} = \boldsymbol{D}_x^i \boldsymbol{f}$ für alle $i \in \{0,\dots,k\}$ und $x \in M$ gilt.*

Beweis. Sei $(\theta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige glatte Zerlegung der Eins der offenen Menge $\mathbb{R}^d$ mit der einzigen Einschränkung, daß $\operatorname{supp}\theta_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ kompakt ist. Sei $\boldsymbol{f}_\lambda$ der auf die kompakte Menge $\operatorname{supp}\theta_\lambda \cap M$ komponentenweise eingeschränkte Jet $\boldsymbol{f}$. Nach Theorem 4.4.6 existiert eine Funktion $\tilde{f}_\lambda \in C^k(\mathbb{R}^d,F)$ mit $D_x^i\tilde{f} = \boldsymbol{D}_x^i\boldsymbol{f}$ für alle $x \in \operatorname{supp}\theta_\lambda \cap M$ und $i \in \{0,\dots,k\}$. Sei

$$\tilde{f}(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \theta_\lambda(x)\tilde{f}_\lambda(x).$$

Damit ist klar, daß $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d,F)$ gilt. Aus der LEIBNIZschen Regel folgt

$$D_x^i\tilde{f} = \sum_{h=0}^{i}\sum_{\lambda\in\Lambda}\binom{i}{h} D_x^h\theta_\lambda \cdot (\cdot)^h\, D_x^{i-h}\tilde{f}_\lambda \cdot (\cdot)^{i-h}.$$

Für $x \in M$ ist entweder $D_x^h\theta_\lambda = 0$ oder $x \in \operatorname{supp} D^h\theta_\lambda \subseteq \operatorname{supp}\theta_\lambda$ mit $D_x^{i-h}\tilde{f} = \boldsymbol{D}_x^{i-h}\boldsymbol{f}$. Von der Summe bleibt in diesem Fall aber wegen $\sum_{\lambda\in\Lambda} D^h\theta_\lambda = 0$ für $h > 0$ nur der Summand für $h = 0$ übrig, woraus die Behauptung folgt. □

Die Notwendigkeit einer lokal gleichmäßigen Abschätzung der Restterme im Fortsetzungssatz zeigt folgendes Gegenbeispiel (vgl. [WHITNEY1]):

4.4.9 Gegenbeispiel. Sei $K := \{0\} \cup \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2^{-n} + 2^{-2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist K kompakt. Der Jet $\boldsymbol{f}$ der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ sei durch seine Komponentenfunktionen $f^{(0)}(x) := 0$ für $x = 0$ und $x = 2^{-n}$ bzw. $f^{(0)}(x) := 2^{-2nk}$ für $x = 2^{-n} + 2^{-2n}$ und $f^{(i)} = 0$ für $i \in \{1,\dots,k\}$ definiert (vgl. Abbildung 4.2). Für die Restterme gilt dann

$$\boldsymbol{R}_y^k\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{f}(x) = \begin{cases} f^{(0)}(x) - f^{(0)}(y) & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{für } i > 0. \end{cases}$$

Der Jet $\boldsymbol{f}$ erfüllt alle lokalen Abschätzungen auf K, wobei nur die Abschätzung für $i = 0$ in $x_0 = 0$ zu zeigen ist:

$$\frac{|\boldsymbol{R}_0^k\boldsymbol{f}(x)|}{|x|^k} \le \frac{2^{-2nk}}{(2^{-n}+2^{-2n})^k} = \left(\frac{2^{-n}}{1+2^{-n}}\right)^k \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \to \infty \text{ und } x \to 0.$$

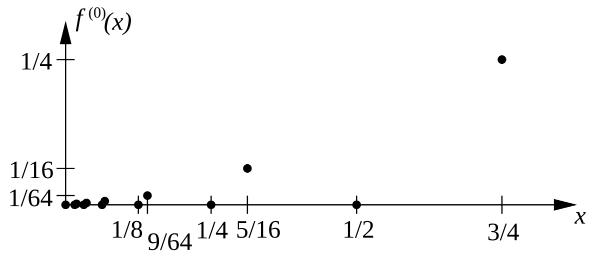

Abbildung 4.2: Der Graph der Komponentenfunktion $f^{(0)}$ von $\boldsymbol{f}$ für $k = 1$.

Die lokal gleichmäßige Abschätzung ist aber in $x_0 = 0$ nicht gegeben. Sei dazu $x_n := 2^{-n} + 2^{-2n}$ und $y_n := 2^{-n}$. Dann gilt für die Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\frac{|\boldsymbol{R}^k_{y_n}\boldsymbol{f}(x_n)|}{|x_n - y_n|^k} = \frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|^k} = \frac{2^{-2nk}}{2^{-2nk}} = 1 \neq 0.$$

Würde eine Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ existieren, so müßte nach Lemma 4.2.3 die lokal gleichmäßige Abschätzung auch in $x_0 = 0$ gelten.

4.5 Geometrische Eigenschaften

Wie üblich sei E ein Banach-Raum. Ziel des folgenden Abschnittes ist es, geometrische Bedingungen an den Rand einer offenen Menge U zu stellen, unter denen ein Fortsetzungssatz für gewöhnlich differenzierbare Funktionen formuliert werden kann (vgl. Definition 4.5.5). Diese Bedingung verallgemeinert den Begriff „konvex“ in dem Sinne, daß anstelle des Segments zweier Punkte ein Weg zwischen diesen Punkten existiert, dessen Weglänge durch ein konstantes Vielfaches des Abstands der Punkte beschränkt ist. Eine elegante Möglichkeit, dies zu formulieren, wird durch die Definition des „geodätischen Abstandes“ (Definition 4.5.3) gegeben. Dazu muß zunächst die Länge eines Weges definiert werden:

4.5.1 Definition. Seien $U \subseteq E$ und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ein *rektifizierbarer Weg in U* ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$, für die das Supremum von

$$\sum_{\nu=1}^{n} \|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\|_E$$

über alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ endlich ist. In diesem Fall wird das Supremum die *Länge* des Weges γ genannt und mit $\|\gamma\|_E$ bezeichnet.

Seien $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls, $\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \longrightarrow U$ ein Weg in U und $x_\nu := \widetilde{\gamma}(t_\nu)$ für $\nu = 0, \ldots, n$. Der Weg $\widetilde{\gamma}$ heißt *Polygonzug in U*

mit Eckpunkten $x_0, \dots, x_n$, falls $\widetilde{\gamma}(t_{\nu-1} + \tau(t_\nu - t_{\nu-1})) = x_{\nu-1} + \tau(x_\nu - x_{\nu-1})$ für $\tau \in [0,1]$ und $\nu = 1, \dots, n$ gilt. Die Punkte $x_0, \dots, x_n$ bestimmen den Polygonzug $\widetilde{\gamma}$ eindeutig.

Grob gesprochen ist $\widetilde{\gamma}$ der stückweise affine Weg, der die Punkte $x_0, \dots, x_n$ verbindet. Es ist leicht einzusehen, daß jeder Polygonzug rektifizierbar ist und die Länge $\|\widetilde{\gamma}\|_E = \sum_{\nu=1}^n \|x_\nu - x_{\nu-1}\|_E$ besitzt.

4.5.2 Lemma. *Sei $U \subseteq E$ offen und $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$ ein Weg in U. Dann gibt es einen Polygonzug $\widetilde{\gamma}$ mit denselben Anfangs- und Endpunkten wie γ. Ist zusätzlich γ rektifizierbar, so kann zu jedem $\varepsilon > 0$ der Polygonzug $\widetilde{\gamma}$ mit $\|\widetilde{\gamma}\|_E \le \|\gamma\|_E \le \|\widetilde{\gamma}\|_E + \varepsilon$ gewählt werden.*

Beweis. Mit einem einfachen Kompaktheitsargument zeigt man, daß es eine Folge von offenen Bällen $B_\nu \subseteq U, \nu = 0, \dots, n-1$ gibt, die das Bild $\gamma([a,b])$ der stetigen Abbildung γ überdecken. Durch eine geeignete Umnumerierung und durch eventuelle Hinzunahme endlich vieler weiterer offener Bälle kann erreicht werden, daß es eine monoton wachsende Folge $(t_\nu)_{\nu\in\{0,\dots,n\}}$ in $[a,b]$ gibt mit $t_0 = a$ end $t_n = b$, so daß der Wegabschnitt $\gamma\restriction_{[t_{\nu-1},t_\nu]}$ ganz in der konvexen Menge B_ν, $\nu = 1, \dots, n-1$ liegt. Damit verläuft auch jeder Polygonzug, der seine Eckpunkte auf diesem Wegabschnitt hat, ganz in $B_{\nu-1}$ und somit in U. Insbesondere gilt $[x_{\nu-1}, x_\nu] \subset U$.

Sei $\widetilde{\gamma}$ der Polygonzug zu den Punkten $(x_\nu)_{\nu\in\{0,\dots,n\}}$. Dieser hat die gewünschten Eigenschaften, seine Eckpunkte liegen sogar alle auf dem Weg γ. Ist γ zusätzlich rektifizierbar, so bildet die Folge $(t_\nu)_{\nu\in\{0,\dots,n\}}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Nach Definition der Weglänge gilt also

$$\|\widetilde{\gamma}\|_E = \sum_{\nu=1}^{n} \|\gamma(x_\nu) - \gamma(x_{\nu-1})\|_E \le \|\gamma\|_E\,.$$

Falls die Differenz der beiden Weglängen größer als $\varepsilon > 0$ ist, so wähle man eine feinere Zerlegung als $(t_\nu)_{\nu\in\{0,\dots,n\}}$ und konstruiere den entsprechenden Polygonzug. Dieser verläuft ebenfalls ganz in U, wie oben schon bemerkt wurde. □

4.5.3 Definition. Sei U offen in E. Der *geodätische* oder *interne Abstand in U* zweier Punkte $x, y \in U$ ist definiert als das Infimum der Weglängen über alle rektifizierbaren Wege, die x und y in U verbinden, d. h.

$$\delta_U(x,y) := \inf\left\{\, \|\gamma\|_E \,\middle|\, \gamma \text{ rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } U \,\right\}.$$

4.5.4 Bemerkungen.

1. Die Menge U ist genau dann zusammenhängend, falls $\delta_U(x,y)$ für alle $x, y \in U$ endlich ist. (Dabei wurde $\inf\emptyset := +\infty$ gesetzt.) Dazu sei bemerkt, daß in normierten Vektorräumen jedes Gebiet U (d. h. U offen und

zusammenhängend) sogar wegzusammenhängend ist. Lemma 4.5.2 sichert dann die Existenz rektifizierbarer Wege.

2. Es genügt, das Infimum über alle Polygonzüge zu nehmen:

$$\delta_U(x,y) = \inf\left\{\, \|\widetilde{\gamma}\|_E \;\middle|\; \widetilde{\gamma} \text{ Polygonzug von } x \text{ nach } y \,\right\}.$$

Dabei ist die Ungleichung „$\leq$“ klar, die andere folgt mit Lemma 4.5.2.

3. Für ein *Gebiet* U ist δ_U eine Metrik, wie man sich leicht überzeugen kann. Es gilt $\|x-y\|_E \leq \delta_U(x,y)$, d. h. die Identität $id_U\colon (U,\delta_U) \longrightarrow (U,\|\cdot\|_E)$ ist Lipschitz-stetig. Allgemeiner ausgedrückt ist δ_U monoton fallend in U, d. h. aus $U \subseteq V$ folgt $\delta_V(x,y) \leq \delta_U(x,y)$ für alle $x,y \in U$.

   Die Umkehrabbildung $id_U\colon (U,\|\cdot\|_E) \longrightarrow (U,\delta_U)$ ist stetig, denn für jeden Punkt $x_0 \in U$ existiert eine konvexe Umgebung, die ganz in U liegt. In dieser Umgebung stimmen Normabstand und geodätischer Abstand überein, da die direkte Verbindung von x_0 zu einem beliebigen Punkt in dieser Umgebung ganz in derselben liegt.

   Die von δ_U und $\|\cdot\|_E$ erzeugten Topologien stimmen also überein. Die Umkehrabbildung wird aber i. allg. nicht gleichmäßig oder gar Lipschitz-stetig sein. Diese besondere Eigenschaft führt zur folgenden Definition:

4.5.5 Definition.

1. Eine offene Menge U heißt *(global) regulär*, falls es ein $C > 0$ gibt, so daß $\delta_U(x,y) \leq C\,\|x-y\|_E$ für alle $x,y \in U$ gilt. Mit anderen Worten: Die Identität $id_U\colon (U,\delta_U) \longrightarrow (U,\|\cdot\|_E)$ und ihre Umkehrabbildung sind Lipschitz-stetig.

2. Eine offene Menge U heißt *gleichmäßig regulär*, falls es ein $C > 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\delta_U(x,y) \leq C\,\|x-y\|_E$ für alle $x,y \in U$ mit $\|x-y\|_E < \delta$ gilt.

3. Eine offene Menge U heißt *lokal regulär*, falls es zu jedem $x_0 \in \partial U$ eine Umgebung V um x_0 gibt, so daß $U \cap V$ (global) regulär ist.

4.5.6 Bemerkungen.

1. Es ist klar, daß (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) gilt. Bei *beschränkten Gebieten* in $\mathbb{R}^d$ gilt sogar die Umkehrung (3) $\Rightarrow$ (1).

   Da $\overline{U}$ kompakt ist, läßt sich U von endlich vielen Umgebungen $(V_i)_{i\in I}$ überdecken, so daß $U \cap V_i$ global regulär ist (im Innern von U wähle man eine konvexe Umgebung, in Randpunkten wähle man eine Umgebung wie in Definition 4.5.5(3), anschließend bilde man eine endliche Teilüberdeckung). Zu dieser Überdeckung existiert eine Lebesgue-Zahl $\delta > 0$, d. h. zu jedem

$x \in U$ existiert ein $i \in I$ mit $B(x, \delta) \subseteq V_i$. Falls $y \in U$ ein weiterer Punkt mit $\|x - y\| < \delta$ ist, so gilt

$$\delta_U(x, y) \leq \delta_{U \cap V_i}(x, y) \leq C_i \|x - y\| \leq C \|x - y\| \tag{4.20}$$

nach Voraussetzung, wobei C das Maximum der Konstanten C_i aus der Definition der Regularität von $U \cap V_i$ ist. Damit ist U zunächst gleichmäßig regulär.

Aus der Kompaktheit von $\overline{U}$ folgt weiter, daß sich U von maximal $N \in \mathbb{N}$ Kugeln mit Radius $\delta > 0$ überdecken läßt. Seien $x, y \in U$. Falls $\|x - y\| < \delta$ ist, so gilt $\delta_U(x, y) \leq C \|x - y\|$ wegen (4.20). Sonst wähle man eine Folge von n Punkten x_ν mit $x_1 = x$, $x_n = y$ aus, so daß zwei aufeinanderfolgende Punkte in einer der N Kugeln liegt (U ist zusammenhängend!). Hierzu sind maximal $N + 1$ Punkte notwendig. In jeder dieser Kugel gilt nach Voraussetzung $\delta_U(x_\nu, x_{\nu+1}) \leq C \|x_\nu - x_{\nu+1}\|$, insgesamt also

$$\delta_U(x, y) \leq \sum_{\nu=1}^{n-1} \delta_U(x_\nu, x_{\nu+1}) \leq \sum_{\nu=1}^{n-1} C\, 2\delta \leq 2NC\delta \leq 2NC \|x - y\| .$$

2. Das Wort „lokal“ ist hier nicht wörtlich zu nehmen, denn um jeden *inneren* Punkt $x_0 \in U$ existiert immer eine global reguläre Umgebung (sofern man nur eine konvexe Umgebung wählt, vgl. Bemerkung 4.5.4(3)).

3. Schon Whitney hat die Eigenschaft „global regulär“ als bedeutend erkannt und bewiesen, daß wie bei konvexen Mengen mit U auch der Abschluß $\overline{U}$ diese Eigenschaft hat (vgl. [Whitney2]). Der Name „regulär“ wurde aber erst in [Glaeser] oder [Tougeron] benutzt, hier allerdings für abgeschlossene, rektifizierbar-wegzusammenhängende Mengen. In allen drei Arbeiten wird diese Eigenschaft jedoch nicht für die Fortsetzung gewöhnlich differenzierbarer Funktionen genutzt, wie das hier in Abschnitt 4.6 geschehen soll.

4. Jede dieser drei Definitionen schließt aus, daß U auf beiden Seiten seines Randes liegt.

5. (Global) reguläre Mengen sind zusammenhängend (klar wegen Bemerkung 4.5.4(1)). *Beschränkte* gleichmäßig bzw. lokal reguläre Mengen U in $\mathbb{R}^d$ haben höchstens endlich viele Zusammenhangskomponenten (mit echt positivem Abstand zueinander), die jeweils gleichmäßig bzw. lokal regulär sind:

   Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es unendlich viele Zusammenhangskomponenten und einen Randpunkt $x_0 \in \partial U$, so daß für jede Umgebung V von x_0 die Menge $U \cap V$ unzusammenhängend ist. Wären die Zusammenhangskomponenten nicht gleichmäßig bzw. lokal regulär, so hätte U diese Eigenschaft auch nicht.

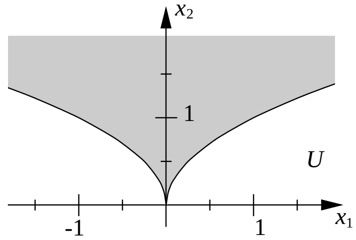

Abbildung 4.3: Die Menge U mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ aus Beispiel 4.5.7(4), die nicht lokal regulär ist. Das Komplement von U ist grau gezeichnet.

4.5.7 Beispiele.

1. Konvexe offene Mengen U sind global regulär, hier gilt sogar $\delta_U(x,y) = \|x-y\|_E$.

2. Uniforme Gebiete (vgl. [JONES]) sind gleichmäßig regulär, da diese Bedingung Teil der Definition eines uniformen Gebietes ist. Als Beispiel für ein uniformes Gebiet sei die KOCHsche Schneeflocke genannt (vgl. Abbildung 5.1, Seite 70).

3. Eine offene Menge, dessen Rand sich lokal als Graph einer LIPSCHITZ-stetigen Funktion darstellen läßt, ist lokal regulär.

4. Das Gebiet $U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < |x_1|^\varepsilon\}$ im $\mathbb{R}^2$ ist für $0 < \varepsilon < 1$ kein lokal reguläres Gebiet (vgl. Abbildung 4.3), denn um den Nullpunkt findet man keine Schranke $C > 0$ derart, daß $\delta_U(x,y) \le C\,\|x-y\|$ für $x,y \in U$ auf einer Umgebung von 0 gilt: Sei $x_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$ und $y_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$. Dann folgt
$$\frac{\delta_U(x_n,y_n)}{\|x_n-y_n\|} = \frac{2\left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\frac{1}{n^\varepsilon}\right)\right\|}{\frac{2}{n}} = \left\|\left(1, \tfrac{1}{2}n^{1-\varepsilon}\right)\right\| \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

4.6 Ein Fortsetzungssatz für differenzierbare Funktionen

Seien E und F zwei BANACH-Räume. In diesem Abschnitt wird ein Fortsetzungsoperator für Funktionen aus $C^k(\overline{U}, F)$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen) konstruiert. Genaugenommen reicht es, wenn nur die höchste Ableitung stetig auf den Rand fortsetzbar ist. Dabei sind gewisse Bedingungen an den Rand von U notwendig. Obwohl WHITNEY schon 1934 implizit den Begriff der Regularität einer Menge verwandte (vgl. [WHITNEY2]) und den Fortsetzungssatz für Jets bewies (vgl. [WHITNEY1]), scheint es bisher noch keine Fortsetzungssätze für gewöhnlich differenzierbare Funktionen zu geben, wie sie hier bewiesen werden (vgl.

Theorem 4.6.8 und Theorem 4.6.9). Dies ist um so erstaunlicher, da eine solche Fragestellung naheliegend erscheint.

4.6.1 Satz. *Sei U eine offene Menge in E, $f \in C^1(U,F)$ und γ ein Polygonzug von x_0 nach x in U. Dann gilt*

$$\|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \sup_{y\in\gamma} \|D_y f\|_{\mathbf{L}(E,F)} \|\gamma\|_E .$$

Beweis. Seien $x_0, \ldots, x_n = x$ die Eckpunkte des Polygonzuges $\gamma\colon I \longrightarrow U$ mit $I = [a,b]$. Für $\nu \in \{1,\ldots,n\}$ gilt $[x_{\nu-1}, x_\nu] \subset U$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes (bzw. der Taylor-Entwicklung der Ordnung 1, vgl. Abschnitt 4.2.2) erhält man

$$\|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})\|_F \leq \sup_{y\in[x_{\nu-1},x_\nu]} \|D_y f\|_{\mathbf{L}(E,F)} \|x_\nu - x_{\nu-1}\|_E ,$$

insgesamt also

$$\|f(x_n) - f(x_0)\|_F \leq \sup_{y\in\gamma(I)} \|D_y f\|_{\mathbf{L}(E,F)} \sum_{\nu=1}^{n} \|x_\nu - x_{\nu-1}\|_E .$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

4.6.2 Definition. Sei U offen in E und $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion $g \in C^k(U,F)$ heißt *k-flach in $x_0 \in U$*, falls $D^i_{x_0} g = 0$ für alle $i = 0,\ldots,k$ gilt.

Mit Hilfe dieser Definition kann der Satz 4.6.1 verallgemeinert werden. Die Idee entstammt dem Buch von Tougeron sie wird dort jedoch für andere Zwecke verwandt (vgl. [Tougeron], Remarque IV.2.5).

4.6.3 Satz. *Seien U offen in E und $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $g \in C^k(U,F)$ eine $(k-1)$-flache Funktion in $x_0 \in U$. Dann gilt für einen Polygonzug $\gamma\colon I \longrightarrow U$ von x_0 nach x in U*

$$\|g(x)\|_F \leq \sup_{y\in\gamma(I)} \left\|D^k_y g\right\|_{\mathbf{L}(E,F)} \|\gamma\|^k_E .$$

Beweis. (Vollständige Induktion über k) Für $k = 1$ ist dies nichts anderes als Satz 4.6.1 unter Beachtung von $g(x_0) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung bereits für den Teilweg $\gamma_y\colon I_y \longrightarrow U$ von x_0 nach $y \in \gamma(I)$ für die Funktion $Dg \in C^{k-1}(U, \mathbf{L}(E,F))$, die $(k-2)$-flach in $x_0 \in U$ ist, also

$$\begin{aligned} \|D_y g\|_{\mathbf{L}(E,F)} &\leq \sup_{z\in\gamma_y(I_y)} \left\|D^k_z g\right\|_{\mathbf{L}_k(E,F)} \|\gamma_y\|^{k-1}_E \\ &\leq \sup_{z\in\gamma(I)} \left\|D^k_z g\right\|_{\mathbf{L}_k(E,F)} \|\gamma\|^{k-1}_E . \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Weglänge des Teilweges γ_y natürlich kleiner ist als die Gesamtweglänge von γ. Durch Anwenden von Satz 4.6.1 auf die Funktion g mit $g(x_0) = 0$ folgt schließlich die Behauptung. □

Analog zur gleichmäßigen Abschätzung des TAYLOR-Restes in (4.7) kann diesmal eine Abschätzung ohne geometrische Einschränkungen gegeben werden:

4.6.4 Satz. *Sei U eine offene Menge in E und $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $f \in C^k(U, F)$ mit gleichmäßig stetiger höchster Ableitung $D^k f$, die das Stetigkeitsmodul α besitze (vgl. Bemerkung 4.1.7(2)). Dann gilt für $x, y \in U$ aus einer Zusammenhangskomponente die Abschätzung*

$$\left\| R_y^k f(x) \right\|_F \leq \alpha\big(\delta_U(x,y)\big)\delta_U(x,y)^k,$$

wobei δ_U den internen Abstand aus Definition 4.5.3 und $R_y^k f$ den TAYLOR-Restterm aus (4.3) bezeichnet.

Beweis. Nach Lemma 4.3.6 bzw. der nachfolgenden Bemerkung gilt $D_x^i R_y^k f = R_y^{k-i} D^i f(x)$ für $x, y \in U$ und $i = 0, \ldots, k$. Für $x = y$ folgt hieraus $D_y^i R_y^k f = 0$, und für $i = k$ gilt $D_x^k R_y^k f = D_x^k f - D_y^k f$. Insbesondere folgt die $(k-1)$-Flachheit des Restterms $(x, y) \mapsto R_y^k f(x)$ in y. Sei $\gamma \colon I \longrightarrow U$ ein beliebiger Polygonzug von x nach y. Nach Satz 4.6.3 und wegen der Monotonie von α gilt

$$\begin{aligned} \left\| R_y^k f(x) \right\|_F &\leq \sup_{z \in \gamma(I)} \left\| D_x^k f - D_z^k f \right\|_{\mathbf{L}_k(E,F)} \|\gamma\|_E^k \\ &\leq \sup_{z \in \gamma(I)} \alpha(\|x - z\|_E) \, \|\gamma\|_E^k \\ &\leq \alpha(\|\gamma\|_E) \, \|\gamma\|_E^k . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Bemerkung 4.5.4(2) existiert ein Polygonzug γ von x nach y mit $\|\gamma\|_E \leq \delta_U(x,y) + \varepsilon$. Die Abbildung $t \mapsto \alpha(t)t^k$ ist monoton, und mit Abschätzung (4.21) erhält man

$$\left\| R_y^k f(x) \right\|_F \leq \alpha\big(\delta_U(x,y) + \varepsilon\big)\big(\delta_U(x,y) + \varepsilon\big)^k.$$

Die Behauptung folgt mit $\varepsilon \to 0$, da α rechtsseitig stetig ist. □

4.6.5 Definition. Seien U eine offene Menge in E und $k \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnet $C^k(\overline{U}, F)$ den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen von U nach F, so daß sich alle Ableitungen $D^i f$ für $i = 0, \ldots, k$ stetig auf $\overline{U}$ fortsetzen lassen.

4.6.6 Bemerkung. Der Raum $C^k(\overline{U}, F)$ ist i. allg. nicht (in kanonischer Weise) isomorph zum Raum der Jets $\boldsymbol{C}^k(\overline{U}, F)$. Dieser Raum der Jets läßt sich aber injektiv auf einen Unterraum von $C^k(\overline{U}, F)$ abbilden, indem jedem Jet $\boldsymbol{f}$ die Funktion $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)$ zugeordnet wird.

Die Abbildung ist im Fall $E = \mathbb{R}^d$ genau dann surjektiv, wenn die lokal gleichmäßige Abschätzung der Restterme (vgl. Definition 4.3.8) auch in allen Randpunkten $x_0 \in \partial U$ gilt. Die Surjektivität kann für beliebige offene Mengen U nicht erwartet werden, wie man an den Gegenbeispielen 4.6.11 sehen kann. Unter gewissen geometrischen Bedingungen an den Rand von U kann sie aber gezeigt werden:

4.6.7 Theorem. *Ist U offen und lokal regulär in $\mathbb{R}^d$, so ist die Jetabbildung*

$$\begin{aligned} J^k \colon C^k(\overline{U}, F) &\longrightarrow \boldsymbol{C}^k(\overline{U}, F) \\ f &\longmapsto \big(D^i f\big)_{i \in \{0,\dots,k\}} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $f \in C^k(\overline{U}, F)$. Zu zeigen bleibt $J^k(f) \in \boldsymbol{C}^k(\overline{U}, F)$, was nichts anderes als die lokal gleichmäßige Abschätzung

$$R_y^{k-i} D^i f(x) = o_{x_0}(\|x-y\|^{k-i}) \quad \text{für alle } x, y \in \overline{U} \text{ und } i = 0, \dots, k$$

in allen Punkten $x_0 \in \overline{U}$ bedeutet.

In einem Punkt $x_0 \in U$ ist diese Abschätzung klar nach Lemma 4.2.3. Da mit x_0 noch eine ganze Umgebung in U liegt, ist es egal, ob $x, y \in U$ oder $x, y \in \overline{U}$ in der Abschätzung verlangt wird.

Seien $x_0 \in \partial U$ und $i \in \{0, \dots, k\}$. Nach Voraussetzung existiert eine (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) offene, beschränkte Umgebung V von x_0 und ein $C > 0$, so daß $\delta_{U \cap V}(x, y) \leq C\,\|x - y\|$ für alle $x, y \in U \cap V$ gilt. Weiterhin ist $\overline{U \cap V} \subseteq \overline{U}, \overline{V}$ erfüllt, insbesondere ist $\overline{U \cap V}$ kompakt und $D^k f{\restriction}_{\overline{U \cap V}}$ gleichmäßig stetig mit Stetigkeitsmodul α (vgl. Bemerkung 4.1.7(2)). Nach Satz 4.6.4 gilt dann

$$\begin{aligned} \big\|R_y^{k-i} D^i f(x)\big\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d, F)} &\leq \alpha\big(\delta_{U\cap V}(x,y)\big)\delta_{U\cap V}(x,y)^{k-i} \\ &\leq C^{k-i}\alpha(C\,\|x-y\|)\,\|x-y\|^{k-i} \quad \text{für} \quad x, y \in U \cap V. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung überträgt sich auf $\overline{U \cap V}$, da $(x, y) \mapsto R_y^{k-i} D^i f(x)$ stetig auf $\overline{U} \times \overline{U}$ ist ($D^i f$ ist stetig auf $\overline{U}$), und da $\lim_{t \to t_0} \alpha(t) \leq \alpha(t_0)$ wegen der Monotonie und der rechtsseitigen Stetigkeit von α gilt.

Nach Satz 4.1.6 erfüllen diese Restterme die gleichmäßige Abschätzung auf $\overline{U} \cap V \subseteq \overline{U \cap V}$ (V ist offen!) für die Umgebung V von x_0, also insgesamt die lokal gleichmäßige Abschätzung in x_0. $\square$

Damit gilt der folgende Fortsetzungssatz für gewöhnlich differenzierbare Funktionen:

4.6.8 Theorem. *Seien U offen und lokal regulär in $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^k(\overline{U}, F)$. Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$ von f, d. h. es gilt $\tilde{f}{\restriction}_{\overline{U}} = f$ (und damit auch $D^i \tilde{f}{\restriction}_{\overline{U}} = D^i f$ für $i = 0, \dots, k$).*

Beweis. Folgt sofort aus Theorem 4.6.7 und dem Fortsetzungssatz von WHITNEY (Theorem 4.4.8) durch Hintereinanderschalten der Abbildungen $\tilde{}$ und J^k. □

Ein entsprechender Satz kann auch für Funktionen aus $C^\infty(\overline{U}, F)$ bewiesen werden (vgl. Bemerkung 4.4.7(3)). Die Voraussetzungen an f für die Fortsetzbarkeit lassen sich noch ein wenig abschwächen:

4.6.9 Theorem. *Seien U offen und lokal regulär in $\mathbb{R}^d$, $f \in C^k(U, F)$ und $D^k f$ stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar. Dann gilt $f \in C^k(\overline{U}, F)$, und es existiert eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$ von f.*

Mit anderen Worten: Offene und lokal reguläre Mengen erlauben einen Fortsetzungsoperator der Klasse C^k für $k \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Definition 3.7.1).

Beweis. Zu zeigen bleibt, daß $D^i f$ auf $\overline{U}$ für $i = 0, \ldots, k$ stetig fortsetzbar ist.

Der Beweis wird induktiv durchgeführt. Für $i = k$ ist die Behauptung klar nach Voraussetzung. Sei bereits $D^{i+1} f$ auf $\overline{U}$ stetig fortsetzbar. Zu zeigen ist, daß diese Eigenschaft auch auf $D^i f$ zutrifft.

Nach Voraussetzung existieren zu jedem $x_0 \in \partial U$ eine offene, beschränkte Umgebung V von x_0 und ein $C > 0$, so daß $\delta_{U\cap V}(x, y) \leq C \|x - y\|$ für alle $x, y \in U \cap V$ gilt. Aus der Kompaktheit der Menge $\overline{U \cap V} \subseteq \overline{U}, \overline{V}$ folgt, daß $D^{i+1} f\restriction_{\overline{U\cap V}}$ in der Norm durch eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ beschränkt ist. Nach Satz 4.6.1 gilt

$$\left\| D^i_x f - D^i_y f \right\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d, F)} \leq M \|\gamma\|$$

für einen beliebigen Polygonzug γ von x nach y in $U \cap V$, also insbesondere

$$\left\| D^i_x f - D^i_y f \right\|_{\mathbf{L}_i(\mathbb{R}^d, F)} \leq M \delta_{U\cap V}(x, y) \leq MC \|x - y\| \quad \text{für} \quad x, y \in U \cap V.$$

Damit ist $D^i f$ gleichmäßig stetig auf $U \cap V$, also stetig auf $\overline{U \cap V}$ fortsetzbar. Sei $\tilde{f}^{(i)}_V$ die stetige Fortsetzung auf $\overline{U} \cap V \subseteq \overline{U \cap V}$ (V ist offen!). Es bleibt zu zeigen, daß zwei Fortsetzungen $\tilde{f}^{(i)}_{V_1}$ und $\tilde{f}^{(i)}_{V_2}$ mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Sei $x \in \overline{U} \cap V_1 \cap V_2 \subseteq \overline{U \cap V_1 \cap V_2}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $U \cap V_1 \cap V_2$, die gegen x konvergiert. Auf $U \cap V_1 \cap V_2$ stimmen die stetigen Fortsetzungen mit $D^i f\restriction_{U\cap V_1\cap V_2}$ überein, also gilt

$$\tilde{f}^{(i)}_{V_1}(x) = \lim_{n\to\infty} D^i_{x_n} f = \tilde{f}^{(i)}_{V_2}(x).$$

Insgesamt läßt sich so eine Fortsetzung $\tilde{f}^{(i)}$ von $D^i f$ auf $\overline{U}$ definieren. Da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, folgt die Stetigkeit der Fortsetzung. □

4.6.10 Bemerkung. Beim Fortsetzungsoperator von WHITNEY für $\boldsymbol{C}^k(M, F)$ wurden keine geometrischen Bedingungen an die abgeschlossene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^d$ gestellt. Es ist nicht sofort klar, ob nicht vielleicht ein Fortsetzungsoperator von

$C^k(\overline{U}, F)$ auch für beliebige offene Mengen U existiert. Die folgenden Gegenbeispiele zeigen, daß es durchaus beschränkte Gebiete U geben kann, bei denen die Isomorphie in Theorem 4.6.7 nicht gilt und für die auch kein Fortsetzungsoperator wie in Theorem 4.6.8 existiert.

Im Fall $E = \mathbb{R}^d$ ist die lokal gleichmäßige Abschätzung der Restterme in jedem Randpunkt eine hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit einer Funktion (vgl. Theorem 4.6.7 und Theorem 4.4.8). In diesem Fall ist sie aber auch notwendig; denn hat man eine Fortsetzung $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$ gefunden, so erfüllt $\tilde{f}$ wegen Lemma 4.2.3 automatisch die lokal gleichmäßige Abschätzung in jedem Punkt. In jedem Fall erfüllen die Restterme überall die lokale Abschätzung, wie mit Lemma 4.3.7(1) folgt.

Um Funktionen $f \in C^k(\overline{U}, F)$ auf offenen Mengen U zu finden, die sich nicht zu Funktionen der Klasse C^k fortsetzen lassen, genügt es also, zu zeigen, daß die lokale Abschätzung

$$R^k_{x_0} f(x) = o_{x_0}(\|x - x_0\|^k_E) \quad \text{für} \quad x \in \overline{U}$$

für ein $x_0 \in \partial U$ *nicht* erfüllt ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\overline{U}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert, für die aber die Folge

$$\left(\frac{R^k_{x_0} f(x_n)}{\|x_n - x_0\|^k_E}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

nicht gegen 0 konvergiert. Die so gefundenen offenen Mengen U sind auch gleichzeitig Beispiele, in denen die Isomorphie aus Theorem 4.6.7 *nicht* gilt, denn die lokal gleichmäßige Abschätzung kann dann natürlich auch nicht gelten.

4.6.11 Gegenbeispiele.

1. Seien $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (2^{-(2n+1)}, 2^{-2n})$. Die Abbildung $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ sei durch $g(x) := 2^{-(2n+1)k}$ für $x \in (2^{-(2n+1)}, 2^{-2n})$ definiert. Die Funktion g ist glatt mit Ableitung $g' = 0$, und wegen $0 \le g(x) \le x^k$ ist g stetig auf $\overline{V}$ fortsetzbar. Insbesondere gilt $g \in C^k(\overline{V}, \mathbb{R})$.

   Andererseits gilt aber für die Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := 2^{-(2n+1)} \in \overline{V}$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{R^k_0 g(x_n)}{x_n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)}{x_n^k} = 1,$$

   so daß die lokale Abschätzung in 0 nicht erfüllt ist.

2. Im Fall $E = \mathbb{R}^d$ und $F = \mathbb{R}$ für $d > 1$ kann sogar ein beschränktes *Gebiet* U gefunden werden, für das kein Fortsetzungsoperator existiert. Der Einfachheit halber sei $d = 2$.

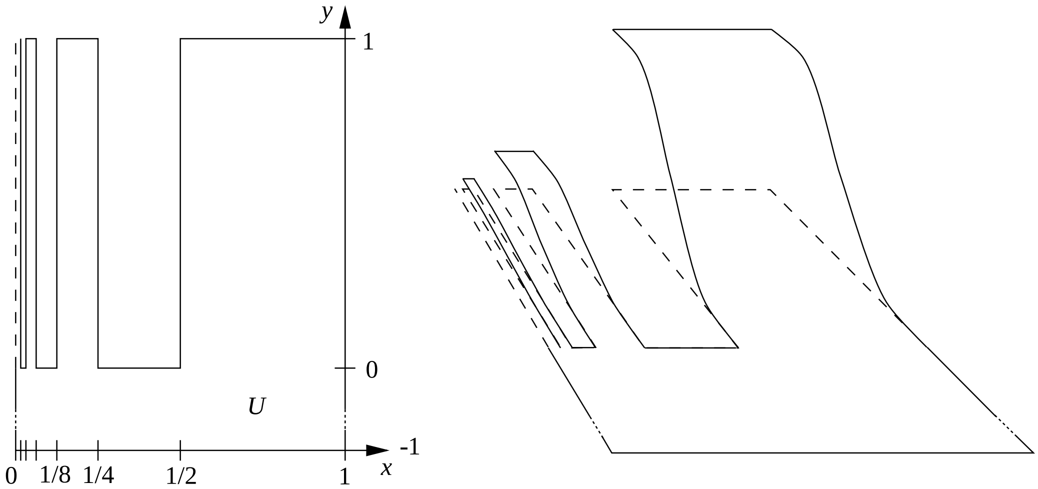

Abbildung 4.4: Das Gebiet U in $\mathbb{R}^2$ mit der Funktion $f \in C^1(\overline{U}, \mathbb{R})$, die sich nicht zu einer Funktion der Klasse C^1 auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen läßt.

Sei $U := \big(V \times (-1,1)\big) \cup \big((0,1) \times (-1,0)\big)$, wobei V wie in Gegenbeispiel 1 gewählt wurde. Weiter sei $h \in C^\infty((-1,1), \mathbb{R})$ mit $h(y) = 1$ für $y \geq 3/4$ und $h(y) = 0$ für $y \leq 1/4$. Die Funktion f sei wie folgt definiert (mit g wie in Gegenbeispiel 1, vgl. auch Abbildung 4.4):

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x)h(y) & \text{für } (x,y) \in V \times (-1,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Die partiellen Ableitungen in x-Richtung verschwinden, in y-Richtung gilt für $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^i f}{\partial y^i}(x,y) = \begin{cases} g(x)\frac{\partial^i h}{\partial y^i}(y) & \text{für } (x,y) \in V \times (-1,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere sind alle partiellen Ableitungen von f stetig auf $\overline{U}$ fortsetzbar. Für die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n := (2^{-(2n+1)}, 1) \in \overline{V}$ gilt wie oben

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R^k_{(0,1)} f(z_n)}{\|z_n - (0,1)\|^k} = \lim_{n \to \infty} \frac{g(x_n)}{x_n^k} = 1,$$

und f ist damit nicht fortsetzbar.

3. Das Gegenbeispiel 4.4.9 kann leicht zu einem Beispiel für eine Funktion aus $C^k(\overline{V}, \mathbb{R})$ abgeändert werden, die auf $\overline{V} \subset \mathbb{R}$ die lokale Abschätzung erfüllt,

aber trotzdem nicht fortsetzbar ist. Sei V eine offene Umgebung der Menge $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2^{-n} + 2^{-2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ derart, daß um jeden Punkt ein kleines Intervall gelegt wird und benachbarte Intervalle noch positiven Abstand haben.

Man setze $g(x) := 0$ auf den Intervallen um die Punkte 2^{-n} und $g(x) := 2^{-2nk}$ auf den Intervallen um $2^{-n} + 2^{-2n}$. Sind die Lücken zwischen den Intervallen groß genug gewählt, so zeigt man wie im Fall der Jets die lokale Abschätzung auf $\overline{V}$ (auch hier ist nur die Abschätzung $R_0^k g(x) = o_0\big(|x|^k\big)$ zu zeigen). Die lokal gleichmäßige Abschätzung gilt auch hier nicht im Punkt 0, weshalb die Funktion nicht fortsetzbar sein kann (vgl. Lemma 4.2.3).

4. Analog wie in Gegenbeispiel 2 kann man aus der offenen Menge V aus Gegenbeispiel 3 ein *Gebiet* U in $\mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f \in C^k(\overline{U}, \mathbb{R})$ konstruieren, für die sogar die lokale Abschätzung auf $\overline{U}$ gilt, die aber nicht zu einer Funktion $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ fortsetzbar ist.

5. Interessant ist die Frage, ob auch zu Gebieten $U \subseteq \mathbb{R}^d$ wie in Beispiel 4.5.7(4) (vgl. Abbildung 4.3, Seite 61) Funktionen aus $C^k(\overline{U}, \mathbb{R})$ existieren, die sich nicht zu Funktionen der Klasse C^k auf $\mathbb{R}^d$ fortsetzen lassen.

4.6.12 Bemerkung. Um Funktionen $f \in C^k(\overline{U}, F)$ wie in Theorem 4.6.8 zu Funktionen $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^d, F)$ fortzusetzen, genügt folgende Voraussetzung an die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^d$, die schwächer als die lokale Regularität ist.

Zu jedem Punkt aus ∂U existiert eine Umgebung V, so daß folgende Regularitätsbedingung an $U \cap V$ erfüllt ist: Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß je zwei Punkte $x, y \in U \cap V$ durch einen Weg γ verbunden werden können, der ∂U in höchstens einem Punkt z treffen darf, aber ansonsten ganz in $U \cap V$ verläuft, und für den $\|\gamma\| \leq C \, \|x - y\|$ gilt.

Der Beweis verläuft entsprechend der Argumentation im Beweis von Theorem 4.6.7. Dabei ist zu beachten, daß der Restterm durch

$$R_x^k f(y) = R_z^k f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} R_z^{k-j} D^j f(y) \cdot (x-y)^j$$

ausgedrückt werden kann. Bildet man die Norm auf beiden Seiten, so lassen sich die auftretenden Größen $\big\|R_z^k f(x)\big\|_F$ bzw. $\big\|R_z^{k-j} D^j f(y)\big\|_{\mathbf{L}_j(\mathbb{R}^d, F)}$ wie im Beweis von Satz 4.6.4 durch $\alpha(\|\gamma\|) \, \|\gamma\|^{k-j}$ nach oben abschätzen, wobei α ein Stetigkeitsmodul der (auf $U \cap V$) gleichmäßig stetigen Abbildung $D^j f$ ist.

Da aber im Rahmen dieser Arbeit die stetige Fortsetzbarkeit einer Funktion $f \in C^k(U, F)$ auf $\overline{U}$ nicht gegeben ist, soll auf diese Abschwächung der Voraussetzung nicht weiter eingegangen werden.

Kapitel 5

Zusammenfassung und weitere Ergebnisse

Zunächst werden die Ergebnisse aus Kapitel 4 auf das in Kapitel 3 gestellte Problem der Konvergenz von magnetischen SCHRÖDINGER-Operatoren angewandt. Abschließend soll noch eine weitere Möglichkeit skizziert werden, die die gesuchte Konvergenz sicherstellt. Diese Möglichkeit beruht ebenfalls auf dem Fortsetzungssatz von WHITNEY, fordert aber Voraussetzungen, die in gewisser Weise komplementär zu den Voraussetzungen der ersten Methode sind.

5.1 Zusammenfassung

Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von WHITNEY kann nun die Konvergenz des SCHRÖDINGER-Operators unter folgenden Voraussetzungen gezeigt werden:

5.1.1 Theorem. *Sei* $\beta \in \Omega^2_{C^1}\mathbb{R}^d$ *mit* $d \geq 2$ *eine geschlossene 2-Form (d. h.* $d\beta = 0$*),* $M := \beta^{-1}\{0\}$ *und* $U := \mathring{M}$*. Außerdem seien folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gelte die Flußbedingung* $\int_D \beta = 0$ *für alle Flächen* D *mit Rand* $\partial D \subset U$.
2. *Es gelte* $\operatorname{meas}(\partial M) = 0$ *bzw. die schwächere Forderung* $\operatorname{meas}(M \setminus U) = 0$.
3. *Die offene Menge* U *sei lokal regulär, d. h. zu jedem Punkt* $x_0 \in \partial U$ *existiere eine offene Umgebung* V *von* x_0 *und eine Konstante* $C > 0$*, so daß es zu je zwei Punkten* $x, y \in U \cap V$ *einen rektifizierbaren Weg* γ *von* x *nach* y *gebe, dessen Länge mit* $\|\gamma\| \leq C\,\|x - y\|$ *beschränkt werden kann.*

Dann existiert ein magnetisches Vektorpotential $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ *mit* $d\alpha = \beta$*, so daß die starke Resolventenkonvergenz*

$$H_{\lambda\alpha} \overset{s.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_M \quad \text{für } \lambda \longrightarrow \infty$$

gilt.

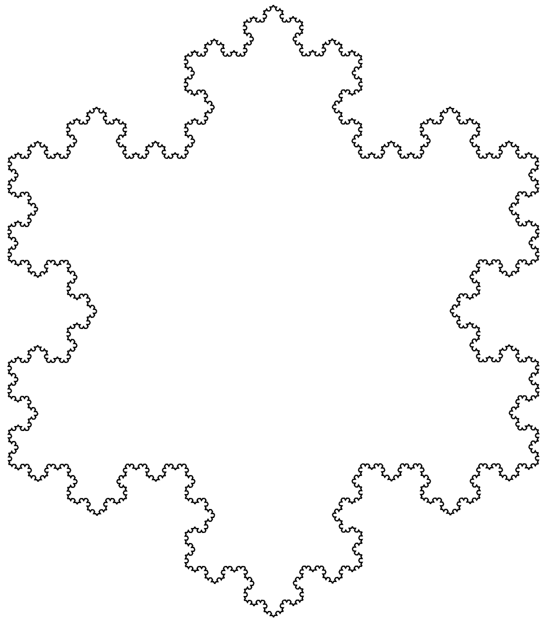

Abbildung 5.1: Falls der magnetfeldfreie Raum im Innern der KOCHschen Schneeflocke liegt, so konvergiert der magnetische SCHRÖDINGER-Operator im starken Resolventensinn (vgl. Beispiel 5.1.2(2)).

Sei zusätzlich der Träger des Magnetfeldes $\operatorname{supp}\beta = U^c$ *kompakt, oder sei das Magnetfeld* β *eine* $\mathbb{Z}^d$*-periodische Funktion (d. h.* $\beta(n+x) = \beta(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $n \in \mathbb{Z}^d$*). Dann folgt sogar die Normresolventenkonvergenz*

$$H_{\lambda\alpha} \overset{n.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_M \quad \textit{für } \lambda \longrightarrow \infty.$$

Beweis. (vgl. Theorem 3.7.3, Theorem 3.6.1 und Theorem 4.6.9) □

Einige Beispiele sollen verdeutlichen, welche Fälle mit dieser Methode behandelt werden können. Um aber auch die Grenzen dieser Methode zu sehen, sei auf Beispiel 5.2.10 verwiesen. In den dort gegebenen Situationen gilt Theorem 5.1.1 nicht mehr.

5.1.2 Beispiele.

1. Falls der Rand ∂M von $M = \beta^{-1}\{0\}$ lokal Graph einer LIPSCHITZ-stetigen Funktion ist, so folgen Voraussetzung (2) und (3) aus Theorem 5.1.1.

2. Verschwindet das Feld β im Fall $d = 2$ in einem Bereich, der durch die sogenannte KOCHsche Schneeflocke gegeben ist (vgl. Abbildung 5.1), so kann die starke Resolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators gezeigt werden. Wie schon in Beispiel 4.5.7(2) bemerkt wurde, ist die KOCHsche Schneeflocke ein global reguläres Gebiet. Die Flußbedingung wird hier nicht benötig, da die KOCHsche Schneeflocke ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist (vgl. Bemerkung 3.7.5).

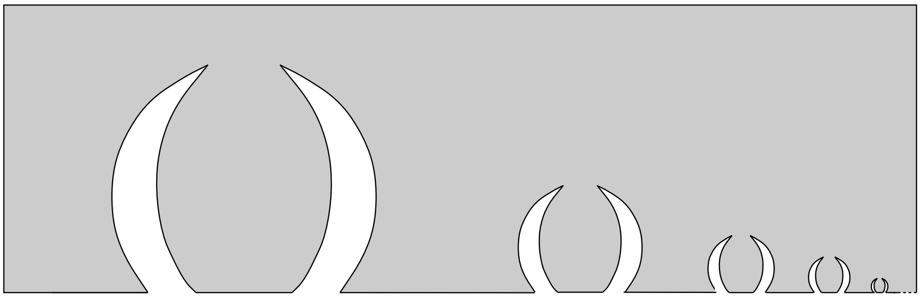

Abbildung 5.2: Der Träger Ω des Magnetfeldes (grau), der von einer Folge immer kleiner werdender Zangen eingeschnitten wird.

3. Falls die Trägermenge $\operatorname{supp} \beta$ im Fall $d = 2$ wie in Abbildung 5.2 durch eine Folge immer kleiner werdender „Zangen“ eingeschnitten wird, kann ebenfalls Theorem 5.1.1 angewandt werden, denn das Komplement $U = (\operatorname{supp} \beta)^c$ ist eine global reguläres Gebiet, sofern das Verhältnis des Abstandes der „Zangenspitze“ zur Einschnittiefe jeder Zange eine positive untere Schranke hat.

   In diesem Fall muß die Flußbedingung gefordert werden, was aber hier nichts anderes bedeutet, als daß der Gesamtfluß $\int_{\mathbb{R}^2} \beta$ verschwindet. Da $\operatorname{supp} \beta$ kompakt ist, folgt die Normresolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators.

5.2 Approximation des Magnetfeldträgers von außen

Die zugrundeliegende Idee in diesem Abschnitt ist die Approximation der Menge $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \beta(x) \neq 0\}$ von außen durch offene Mengen Ω_n, die so „regulär“ sind, daß jeweils die Komplemente ihrer Abschlüsse einen Fortsetzungsoperator der Klasse C^2 erlauben. Auf diese Mengen können die bisherigen Ergebnisse angewandt werden. Durch geeignete Abschätzungen der auftretenden Differenzterme kann auch in diesem Fall die starke bzw. die Normresolventenkonvergenz unter gewissen Voraussetzungen gezeigt werden (vgl. Theorem 5.2.3).

Interessanterweise sind die Voraussetzungen an den Träger des Feldes β in folgender Art komplementär: Die bisherige Methode (vgl. Theorem 5.1.1) stellt Bedingungen an das Komplement des Trägers $\operatorname{supp} \beta$, während das Resultat dieses Abschnittes Bedingungen an den Träger selbst stellt (vgl. Theorem 5.2.3 und Satz 5.2.9(1)).

Zunächst ist es bequem, folgende Sprechweisen einzuführen.

5.2.1 Definition.

1. Seien Ω eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$. Die *ε-Umgebung von* Ω ist definiert durch $\Omega_{(\varepsilon)} := \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \operatorname{dist}(\Omega, x) < \varepsilon\}$.

2. Sei $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ mit $\Omega_n \supseteq \Omega$. Die Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *approximiert* Ω (in Zeichen $\Omega_n \searrow \Omega$), falls es eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Omega_n \subseteq \Omega_{(\varepsilon_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt und falls $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *approximierende Folge von* Ω.

3. Eine offene Menge Ω heißt *von außen regulär approximierbar*, falls es eine approximierende Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Omega_n \searrow \Omega$ gibt, so daß $\partial\Omega_n$ lokal Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist.

5.2.2 Satz. *Jede offene Menge Ω in $\mathbb{R}^d$ ist von außen regulär approximierbar.*

Beweis. Wie in Satz 4.4.2 sei $\mathcal{M}_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller abgeschlossenen Würfel in $\mathbb{R}^d$ mit Kantenlänge 2^{-n}, deren Ecken auf dem Gitter $2^{-n}\mathbb{Z}^d$ liegen. Weiter sei W_n die Vereinigung aller Würfel $W \in \mathcal{M}_n$ mit $W \cap \Omega \neq \emptyset$. Sei Ω_n das Innere der Würfelsumme W_n.
Falls $\partial\Omega_n$ nicht (lokal) Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist, d. h. falls sich zwei Würfel nur in Ecken, Kanten oder in bis zu $(d-2)$-dimensionalen Hyperflächen berühren, dann füge man einen Würfel derselben Kantenlänge um eine halbe Kantenlänge verschoben hinzu, wobei die problematische Ecke, Kante usw. symmetrisch im neuen Würfel liegt (vgl. Abbildung 5.3). Auf diese Weise ist $\partial\Omega_n$ stets lokal Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion. Außerdem gilt $\Omega_n \searrow \Omega$ mit der Nullfolge $\varepsilon_n := \frac{3}{2}\sqrt{d}\,2^{-n}$, wobei der Faktor $\frac{3}{2}$ den Fehler, der durch die hinzugefügten Würfel entsteht, korrigiert. $\square$

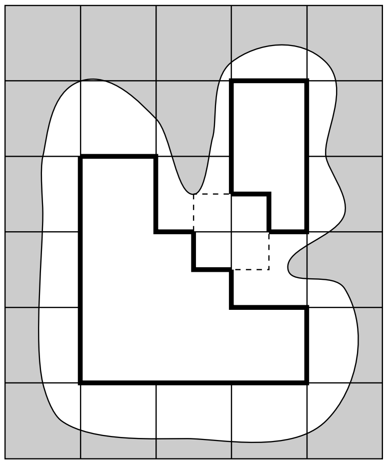

Abbildung 5.3: Die Menge Ω (grau) und die (durch den gestrichelten Würfel korrigierte) Würfelsumme Ω_n (dick umrandet).

Das folgende Theorem gibt eine andere Möglichkeit als Theorem 5.1.1, um die Konvergenz des magnetischen Schrödinger-Operators zu zeigen.

5.2.3 Theorem. *Sei $\beta \in \Omega^2_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ eine geschlossene 2-Form (d. h. $d\beta = 0$), $M := \beta^{-1}\{0\}$ und $U := \mathring{M}$. Ferner seien folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Es gelte die Flußbedingung $\int_D \beta = 0$ für alle Flächen D mit Rand $\partial D \subset U$.*

2. *Die* Sobolev-*Räume $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\tilde{\mathcal{H}}^1(M)$ (vgl. Satz 5.2.9) stimmen überein.*

Dann existiert eine Folge von magnetischen Vektorpotentialen $\alpha_n \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ *mit* $d\alpha_n = \beta$, *so daß die starke Resolventenkonvergenz*

$$H_{\lambda_n \alpha_n} \overset{s.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_M$$

für $n \longrightarrow \infty$ *und alle reellen Folgen* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ *gilt. Falls zusätzlich der Träger des Magnetfeldes* $\operatorname{supp}\beta = U^c$ *kompakt ist, dann folgt sogar die entsprechende Normresolventenkonvergenz.*

Zunächst mag es etwas unbefriedigend erscheinen, daß auch das Vektorpotential α_n von n abhängt. Die Invarianz gegenüber Eichtransformationen (vgl. Lemma 3.4.1) sichert aber die unitäre Äquivalenz der einzelnen Operatoren H_{α_n} und damit die Gleichheit der Spektren von H_{α_n} für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Beweis dieses Theorems verläuft zum Teil identisch mit dem Beweis von Theorem 2.2 in [HemHer] (vgl. auch Theorem 3.6.1). Die nötigen Schritte werden hier noch einmal zitiert, da die Aussagen in [HemHer] nicht ganz in der hier benötigten Form zu finden sind.

5.2.4 Lemma. *Sei* $\alpha \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ *eine* 1*-Form,* $M_\alpha := \alpha^{-1}\{0\}$ *und* M *eine abgeschlossene Menge in* $\mathbb{R}^d$*. Weiter sei* $\operatorname{meas}(M \setminus M_\alpha) = 0$ *und* $\varphi\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine meßbare, positive, beschränkte Funktion mit* $\varphi\restriction_M = 0$*. Dann gilt*

$$\left\|(e^{-t(H_\alpha+\varphi)} - e^{t\Delta_M})u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \left\|(e^{-t(-\Delta+\varphi)} - e^{t\Delta_M})|u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $t > 0$ *und* $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *bzw.*

$$\left\|e^{-t(H_\alpha+\varphi)} - e^{t\Delta_M}\right\|_{\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))} \le \left\|e^{-t(-\Delta+\varphi)} - e^{t\Delta_M}\right\|_{\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))}$$

für alle $t > 0$.

Beweis. (vgl. [HemHer], Lemma 1.3) Im Beweis wird die Feynman-Kac-Itô-Formel verwendet; sie stellt eine Verbindung zwischen Potentialtheorie und stochastischen Prozessen her. In [HemHer] wurde nur der Fall $M = \beta^{-1}\{0\}$ und $\varphi = n\chi_{\widetilde{\Omega}}$ mit offener Menge $\widetilde{\Omega} \subseteq M^c$ bewiesen. Der Beweis der hier gemachten allgemeineren Aussagen verläuft jedoch analog.

Außerdem wurde dieses Lemma in [HemHer] nur für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ bewiesen. Die Aussage folgt aber sofort durch Approximation für jedes $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$, indem man beachtet, daß die Halbgruppenoperatoren (vgl. Bemerkung 3.5.6) und die Abbildung $u \longmapsto |u|$ stetig (bzgl. der Normtopologie auf $L_2(\mathbb{R}^d)$) sind.

Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, indem man

$$\sup_{\substack{u\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 1}} \|A|u|\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\substack{u\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 1,\, u\ge 0}} \|Au\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \sup_{\substack{u\in L_2(\mathbb{R}^d)\\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\le 1}} \|Au\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

für $A \in \mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))$ beachtet, wobei der letzte Ausdruck per definitionem $\|A\|_{\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))}$ ist. □

5.2.5 Lemma. *Sei M eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge meßbarer, positiver, beschränkter Funktionen $\varphi_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_n\restriction_M = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \infty$ für alle $x \in M^c$. Dann gilt die starke Resolventenkonvergenz*

$$-\Delta + \varphi_n \overset{s.\,r.\,s.}{\longrightarrow} -\Delta_M \quad \textit{für } n \longrightarrow \infty.$$

Falls $\overline{M^c}$ kompakt ist, folgt sogar die Normresolventenkonvergenz.

Beweis. Die zu $T_n := -\Delta + \varphi_n$ assoziierten positiven, abgeschlossenen, in $\mathcal{H} := \mathcal{H}_n := L_2(\mathbb{R}^d)$ dicht definierten Sesquilinearformen

$$t_n(u,v) := \sum_{j=1}^{d} \langle \partial_j u, \partial_j v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \langle \varphi_n u, v\rangle_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

haben alle den Definitionsbereich $\mathcal{D}(t_n) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ und bilden eine monoton wachsende Folge (vgl. Definition 3.5.3). Entsprechend sei t_0 die zu $T_0 := -\Delta_M$ assoziierte positive, abgeschlossene (in Abschnitt 3.3 mit t_M bezeichnete) Sesquilinearform mit $\mathcal{D}(t_0) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$. Dabei ist t dicht definiert in einem (i. allg. echten) abgeschlossenen Unterraum von $L_2(\mathbb{R}^d)$. Sei $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} t_n(u,u) < \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n |u|^2 dx < \infty \Leftrightarrow u\restriction_{M^c} = 0 \Leftrightarrow u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(M),$$

also stimmt der Definitionsbereich von t_0 mit dem der Grenzform überein (vgl. Formel (3.8)). Außerdem gilt $t_n(u,v) = t_0(u,v)$ für $u, v \in \mathcal{D}(t_0) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ und $n \in \mathbb{N}$, und damit sind alle Voraussetzungen für den Satz über die monotone Konvergenz quadratischer Formen (vgl. Satz 3.5.4(1)) erfüllt, woraus die behauptete Resolventenkonvergenz folgt.

Die Normresolventenkonvergenz wurde in [HemHer], Proposition 3.2 bewiesen. □

5.2.6 Lemma. *Seien $\beta \in \Omega^2_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ eine geschlossene 2-Form und $M := \beta^{-1}\{0\}$. Dann existiert eine monoton wachsende Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer, positiver, beschränkter Funktionen $\varphi_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi_n\restriction_M = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \infty$ für alle $x \in M^c$, so daß*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{\alpha\in\Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d \\ d\alpha=\beta}} \|R(H_{\lambda_n\alpha}) - R(H_{\lambda_n\alpha} + \varphi_n)\|_{\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))} = 0$$

für beliebige reelle Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$ gilt.

Beweis. Im wesentlichen ist diese Aussage in Lemma 2.4, Lemma 2.3 und im Beweis von Theorem 2.2 in [HemHer] zu finden. Mit den dort definierten Bezeichnungen setze man $\varphi_n := n(\lambda_n)\chi_{\Omega_n(\lambda_n)}$ (es sei darauf hingewiesen, daß die hier gewählte monoton wachsende Folge $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* approximierende Folge von Ω nach Definition 5.2.1(3) bezeichnet).

Um die Gleichmäßigkeit in Bezug auf die Vektorpotentiale zu erhalten, beachte man, daß bei den Abschätzungen im Beweis zu Lemma 2.3 und Lemma 2.4 in [HemHer] nur das Magnetfeld β, nicht aber das Vektorpotential α eingeht. $\square$

Folgendes Lemma sichert die Konvergenz des magnetischen Schrödinger-Operators trotz des eingefügten Terms durch die Approximation von außen.

5.2.7 Lemma. *Gelte $\Omega_n \searrow \Omega$ für offene Mengen $\Omega_n, \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Seien $M_n := \Omega_n^c$ und $M := \Omega^c$. Ferner seien die* Sobolev*-Räume $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ identisch. Dann gilt die starke Resolventenkonvergenz $-\Delta_{M_n} \xrightarrow{s.r.s.} -\Delta_M$ für $n \to \infty$. Falls $\overline{\Omega}$ kompakt ist, kann sogar die Normresolventenkonvergenz gezeigt werden.*

Beweis. Sei t_n die zu $-\Delta_{M_n}$ assoziierte positive, abgeschlossene (in Abschnitt 3.3 mit t_{M_n} bezeichnete) Sesquilinearform mit $\mathcal{D}(t_n) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(M_n)$. Entsprechend sei t_0 die positive, abgeschlossene Sesquilinearform zu $-\Delta_M$. Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M_n) \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}^1(M_{n+1})$ und $t_n(u,v) = t_{n+1}(u,v)$ für $u, v \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(M_n)$ monoton fallend (vgl. Definition 3.5.3). Seien $u, v \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(t_n)$. Dann existiert wegen der Monotonie ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $u, v \in \mathcal{D}(t_{n_0}) \subseteq \mathcal{D}(T_0)$, und es gilt

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_0}} t_n(u,v) = t_{n_0}(u,v) = t_0(u,v).$$

Um den Satz von der monotonen Konvergenz quadratischer Formen (vgl. Satz 3.5.4(2)) anwenden zu können, muß nur noch gezeigt werden, daß die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(t_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{H}}^1(M_n)$ dicht im Hilbert-Raum $\big(\mathcal{D}(t_0), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}(t_0)}\big) = \big(\widetilde{\mathcal{H}}^1(M), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)}\big)$ liegt.

Sei $u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$. Nach Voraussetzung liegt u dann auch in $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und läßt sich durch eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $C_c^\infty(\mathring{M})$ approximieren. Zu zeigen bleibt, daß zu jedem $\nu \in \mathbb{N}$ ein $n_\nu \in \mathbb{N}$ mit $u_{n_\nu} \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(M_{n_\nu})$ existiert, also $K_\nu := \operatorname{supp} u_{n_\nu} \subseteq \mathring{M}_{n_\nu}$ gilt.

Nach Voraussetzung existiert eine Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\Omega_n \subseteq \Omega_{(\varepsilon_n)}$ für $n \in \mathbb{N}$. Da K_ν kompakt ist, gilt $\varepsilon := \operatorname{dist}(K_\nu, \overline{\Omega}) > 0$. Sei $n_\nu \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\varepsilon > \varepsilon_{n_\nu}$ erfüllt ist.

Sei $x \in K_\nu$. Dann gilt $\operatorname{dist}(x, \Omega) \geq \operatorname{dist}(x, \overline{\Omega}) \geq \operatorname{dist}(K_\nu, \overline{\Omega}) = \varepsilon$. Falls x nicht in $\mathring{M}_{n_\nu}$ liegen würde, so folgte $x \in (\mathring{M}_{n_\nu})^c = \overline{\Omega_{n_\nu}} \subseteq \overline{\Omega_{(\varepsilon_{n_\nu})}}$, also $\varepsilon \leq \operatorname{dist}(x, \Omega) \leq \varepsilon_{n_\nu}$ im Widerspruch zur Definition von n_ν.

Um die Normresolventenkonvergenz zu zeigen, genügt es nach [Kato], Theorem VIII.3.5, daß die Folge $K_n := R(-\Delta_M) - R(-\Delta_{M_n})$ eine kompakte, obere

Schranke hat. Aus der Monotonie der Formenfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt die Positivität der Operatoren K_n, und es genügt zu zeigen, daß K_1 ein kompakter Operator in $L_2(\mathbb{R}^d)$ ist. Hierzu reicht die Kompaktheit von $K := R(-\Delta) - R(-\Delta_M)$, denn neben $\overline{\Omega}$ ist auch $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_{(\varepsilon_1)}}$ eine kompakte Menge, und es gilt

$$K_1 = \big(R(-\Delta) - R(-\Delta_{M_1})\big) - \big(R(-\Delta) - R(-\Delta_M)\big).$$

Seien $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit $\phi\restriction_\Omega = 1$ und $\psi = 1 - \phi$, wobei $\operatorname{supp}\psi$ ganz in $\mathring{M}$ liegt. Dann gilt

$$K = (\phi + \psi)K(\phi + \psi) = \phi K \phi + \phi K \psi + \psi K \phi + \psi K \psi, \tag{5.1}$$

wobei mit ϕ bzw. ψ auch die entsprechenden beschränkten Multiplikationsoperatoren bezeichnet werden. Mit Hilfe des Einbettungssatzes von Rellich (vgl. [Werner], Theorem V.2.13) zeigt man, daß ϕK ein kompakter Operator ist. Damit folgt die Kompaktheit der ersten drei Summanden $(\phi K)\phi$, $(\phi K)\psi$ und $\psi K \phi = \psi(\phi K)^*$ der rechten Seite in (5.1). Um den letzten Summanden zu untersuchen, betrachte man

$$(-\Delta + 1)(\psi K \psi) = -(\Delta\psi)K\psi - 2(\nabla\psi)\nabla K\psi + \psi(-\Delta + 1)K\psi, \tag{5.2}$$

wobei der erste Summand der rechten Seite wie zuvor kompakt ist. Es gilt

$$\chi \nabla K v = \chi R(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \nabla R(-\Delta)^{\frac{1}{2}} v - \chi R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}} \nabla R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}} v$$

mit $\chi = -\nabla\psi \in C_c^\infty(\mathring{M}, \mathbb{R}^d)$, $v = \psi u \in C_c^\infty(\mathring{M})$ und $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Vertauschbarkeit von $R(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ und ∇ folgt aus dem Spektralkalkül wegen $R(-\Delta)^{\frac{1}{2}} = (1 + (i\nabla)^2)^{-\frac{1}{2}}$; die Vertauschbarkeit von $R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}}$ und ∇ folgt aus der Tatsache, daß $-\Delta_M$ auf einem geeigneten Funktionenraum dem Differentialoperator $-\Delta$ entspricht[1]. Aus dem Einbettungssatz von Rellich folgt wie zuvor, daß $\chi R(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\chi R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}}$ kompakt sind. Die Operatoren $\nabla R(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\nabla R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}}$ sind als Hintereinanderschaltung der beschränkten Operatoren $R(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ bzw. $R(-\Delta_M)^{\frac{1}{2}} \colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^1(M) \subseteq \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ und $\nabla \colon \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^d)^d$ beschränkt, so daß insgesamt der zweite Summand in (5.2) kompakt ist. Der dritte Summand ist identisch mit

$$\psi v - \psi(-\Delta + 1)R(-\Delta_M)v = 0, \tag{5.3}$$

dabei betrachtet man $w := R(-\Delta_M)v$ als die Lösung der partiellen Differentialgleichung $(-\Delta + 1)w = v$, weil auch hier $-\Delta_M$ der Wirkung nach dem Differentialoperator $-\Delta$ entspricht. Aus der elliptischen Regularitätstheorie folgt

[1] Dabei ist zu beachten, daß die Sobolev-Räume $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ bzw. $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M}_1)$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M_1)$ nach Voraussetzung bzw. — da M_1 einen Lipschitz-stetigen Rand hat — nach Satz 5.2.9 übereinstimmen (vgl. Abschnitt 3.3).

$w \in \mathcal{D}(-\Delta) = \mathcal{H}^2(\mathbb{R}^d)$, so daß die Gleichung (5.3) folgt. Durch Multiplikation der kompakten Operatoren in (5.2) von links mit dem beschränkten Operator $R(-\Delta)$ erhält man wieder einen kompakten Operator, woraus die Kompaktheit von $\psi K \psi$ und damit von K folgt. □

Mit Hilfe dieser Lemmata kann nun die Konvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators unter den gegebenen Voraussetzungen gezeigt werden.

Beweis von Theorem 5.2.3. Nach Satz 5.2.2 existiert eine approximierende Folge offener Mengen $\Omega_n \searrow \Omega := M^c$ mit LIPSCHITZ-stetigem Rand. Insbesondere ist $U_n := \mathring{M}_n$ mit $M_n := \Omega_n^c$ lokal regulär, erlaubt also nach Theorem 4.6.9 einen Fortsetzungsoperator der Klasse C^2, und es gilt $\overline{U}_n = M_n \subseteq \Omega^c$. Aus Theorem 3.7.3 folgt die Existenz einer 1-Form $\alpha_n \in \Omega^1_{C^1}\mathbb{R}^d$ mit $d\alpha = \beta$ und $\operatorname{meas}(M_n \setminus M_{\alpha_n}) = 0$ (mit $M_{\alpha_n} := \alpha_n^{-1}\{0\}$, man beachte $\beta\restriction_{U_n} = 0$).

Nach Satz 3.5.5 ist die starke Resolventenkonverenz äquivalent zur starken Konvergenz der zugehörigen Halbgruppe. Sei also $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $t > 0$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen ∞ konvergierende reelle Folge. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|e^{-tH_{\lambda_n\alpha_n}}u - e^{t\Delta_M}u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\le \left\|e^{-tH_{\lambda_n\alpha_n}}u - e^{-t(H_{\lambda_n\alpha_n}+\varphi_n)}u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \left\|e^{-t(H_{\lambda_n\alpha_n}+\varphi_n)}u - e^{t\Delta_{M_n}}u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \left\|e^{t\Delta_{M_n}}u - e^{t\Delta_M}u\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad (5.4)\end{aligned}$$

wobei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die monoton wachsende Folge aus Lemma 5.2.6 ist. Aus demselben Lemma folgt die Konvergenz des ersten Summanden (gleichmäßig in α_n) gegen 0 sogar in der Normtopologie auf $\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))$.

Der zweite Term läßt sich mit Lemma 5.2.4 abschätzen zu

$$\begin{aligned}&\left\|e^{-t(-\Delta+\varphi_n)}|u| - e^{t\Delta_{M_n}}|u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \\ &\qquad\le \left\|e^{-t(-\Delta+\varphi_n)}|u| - e^{t\Delta_M}|u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \left\|e^{t\Delta_M}|u| - e^{t\Delta_{M_n}}|u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Hier konvergiert der erste Term wegen Lemma 5.2.5 und der Äquivalenz von starker Resolventenkonvergenz und Halbgruppenkonvergenz (vgl. Satz 3.5.5) gegen 0. Der dritte Summand in (5.4) und der zweite Summand in (5.5) konvergieren wegen dieser Äquivalenz und wegen Lemma 5.2.7 gegen 0.

Der Beweis der Normresolventenkonvergenz verläuft analog, wobei man beachte, daß alle verwendeten Konvergenzaussagen auch in der Normtopologie auf $\mathbf{L}(L_2(\mathbb{R}^d))$ gelten. □

Da nicht immer leicht einzusehen ist, ob die SOBOLEV-Räume übereinstimmen, werden zwei geometrische Bedingungen angegeben, aus denen die Isomorphie folgt. Der Beweis von Satz 5.2.9(1) erfordert Kenntnisse aus der Theorie der BROWNschen Bewegung und der stochastischen Prozesse; deshalb werden hier nur die Quellen angegeben, ohne die auftretenden Begriffe näher zu erläutern.

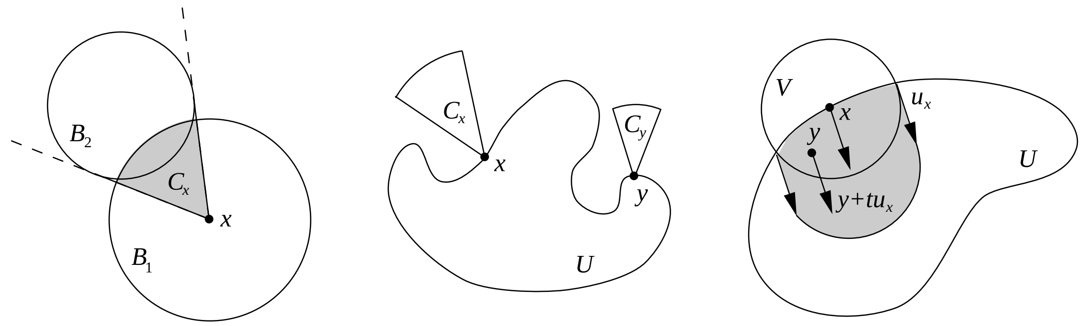

Abbildung 5.4: Links ein endlicher Kegel (grau) mit Spitze in x, in der Mitte eine Menge U, die die lokale, äußere Kegelbedingung in $x, y \in \partial U$ erfüllt und rechts eine Menge U, die die Segmentbedingung erfüllt.

5.2.8 Definition.

1. Sei $x \in \mathbb{R}^d$, B_1 eine Kugel mit Mittelpunkt x und B_2 eine weitere Kugel, die x nicht enthält. Dann heißt die offene Menge

$$C_x := B_1 \cap \{x + \lambda(y - x) \,|\, y \in B_2, \lambda > 0\}$$

ein *endlicher Kegel mit Spitze in* x.

2. Eine offene Menge U in $\mathbb{R}^d$ erfüllt die *lokale, äußere Kegelbedingung in* $x \in \partial U$, falls es einen endlichen Kegel C_x mit Spitze in x gibt, der ganz im Komplement von U liegt (d. h. für den $U \cap C_x = \emptyset$ gilt).

3. Eine offene Menge U in $\mathbb{R}^d$ erfüllt die *Segmentbedingung*, falls es zu jedem Punkt $x \in \partial U$ ein $u_x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und eine offene Umgebung V von x gibt, so daß $y + tu_x \in U$ für alle $y \in \overline{U} \cap V$ und $t \in (0,1)$ gilt (vgl. [Adams], Abschnitt 4.2).

5.2.9 Satz. *Seien $d \geq 2$, M eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^d$ mit* $\operatorname{meas}(\partial M) = 0$ *und $U := \mathring{M}$. Weiter sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Die Menge U erfülle die lokale, äußere Kegelbedingung in allen (bis auf abzählbar vielen) Randpunkten $x \in \partial U$, und* $\operatorname{supp} \beta = U^c$ *sei kompakt.*

2. *Die Menge U erfülle die Segmentbedingung.*

Dann stimmen die Sobolev-*Räume $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ (vgl. Abschnitt 3.2) überein.*

Beweis. Die zweite Aussage ist in [HerZhao], Theorem 2.6 zu finden. Der Beweis der ersten Aussage soll hier nur kurz skizziert werden: Nach Voraussetzung haben alle Punkte $x \in \partial U$ (bis auf abzählbar viele) eine positive untere LEBESGUE-Dichte in U^c, d. h. es gilt

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{meas}\big(U^c \cap B_{\mathbb{R}^d}(x,\varepsilon)\big)}{\operatorname{meas}\,(B_{\mathbb{R}^d}(x,\varepsilon))} > 0.$$

Innere Punkte von U^c haben immer eine positive (untere) LEBESGUE-Dichte in U^c, also haben alle Punkte aus U^c (bis auf abzählbar viele) diese Eigenschaft. Aus Theorem 2 in [STROOCK] folgt, daß dann alle (bis auf abzählbar viele) Punkte von außen stark regulär sind („strongly exterior regular“, vgl. [STROOCK], S. 832). Abzählbar viele Punkte in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$ bilden eine polare Menge (vgl. [PORTSTONE], Abschnitt 2.2), insbesondere ist dann quasi jeder Punkt $x \in U^c$ von außen stark regulär (vgl. [PORTSTONE], S. 174). Nach [STROOCK], S. 842, ist die kompakte Menge U^c also KAC-regulär, und aus Theorem 2.1 in [HERZHAO] folgt $\mathring{\mathcal{H}}^1(U) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(U)$. Wegen $\operatorname{meas}\,(U \triangle M) = 0$ gilt die Behauptung (vgl. Abschnitt 3.2.3). $\square$

Es sei darauf hingewiesen, daß die im Beweis zitierte KAC-Regularität von U^c (und die Bedingung $\operatorname{meas}\,(\partial M) = 0$) ein hinreichendes Kriterium für die Gleichheit von $\mathring{\mathcal{H}}^1(\mathring{M})$ und $\widetilde{\mathcal{H}}^1(M)$ darstellt. Sie ist aber auch notwendig, denn nach Theorem 2.1 in [HERZHAO] gilt $\mathring{\mathcal{H}}^1(U) = \widetilde{\mathcal{H}}^1(U)$ genau dann, falls U^c KAC-regulär ist.

Abschließend wird anhand einiger Beispiele verdeutlicht, daß die hier skizzierte Methode tatsächlich noch in Fällen anwendbar ist, in denen Theorem 5.1.1 nicht mehr gilt.

5.2.10 Beispiele.

1. Falls der Träger des Magnetfeldes im Fall $d = 2$ eine Spitze wie in Beispiel 4.5.7(4) hat und die offene Menge $U = (\operatorname{supp}\beta)^c$ wie dort gewählt wird, erfüllt U die Segmentbedingung (vgl. Abbildung 4.3, Seite 61). Da U einfach zusammenhängend ist, gilt sogar die Flußbedingung (vgl. Bemerkung 3.7.5(1)). Damit gilt die starke Resolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operator wie in Theorem 5.2.3 ohne weitere Voraussetzungen.

2. Ein weiteres einfaches Beispiel eines Magnetfeldes β, für das die Konvergenzaussagen gelten, stellt der Doppelkegel

$$\operatorname{supp}\beta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_{d-1}^2 \geq x_d^2\}$$

dar, wobei der feldfreie Raum im Doppelkegel liegt. Im Fall $d = 2$ ist $U = (\operatorname{supp}\beta)^c$ einfach zusammenhängend (vgl. Definition 2.6.6!). In diesem Fall folgt direkt die starke Resolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators; im Fall $d \geq 3$ muß noch die Flußbedingung wie in Theorem 5.2.3 gefordert werden.

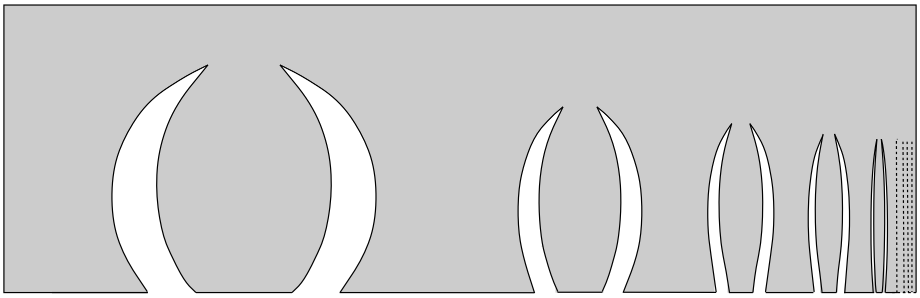

Abbildung 5.5: Der Träger Ω des Magnetfeldes (grau), der von einer Folge immer enger werdender Zangen eingeschnitten wird.

3. Ähnlich wie in Abbildung 5.2 und Beispiel 5.1.2(3) kann die kompakte Trägermenge $\operatorname{supp}\beta$ im Fall $d = 2$ durch eine Folge immer enger werdender „Zangen" eingeschnitten werden (vgl. Abbildung 5.5). In diesem Fall ist das Komplement $U = (\operatorname{supp}\beta)^c$ zwar nicht mehr lokal regulär, aber es erfüllt die lokale, außere Kegelbedingung. Nach Satz 5.2.9 und Theorem 5.2.3 folgt die Normresolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators, sofern die Flußbedingung gefordert wird, was aber hier nichts anderes bedeutet, als daß der Gesamtfluß $\int_{\mathbb{R}^2} \beta$ verschwindet.

4. Falls das Innere des feldfreien Raumes durch die (einfach zusammenhängende) Menge U aus Abbildung 4.4 auf Seite 67 gegeben ist, erfüllt U die lokale, äußere Kegelbedingung, und somit gilt die starke Resolventenkonvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators.

5.3 Offene Probleme

In dieser Arbeit bleibt die Frage offen, ob in Theorem 5.2.3 auch die Normresolventenkonvergenz im Fall eines periodischen Magnetfeldes gezeigt werden kann. Dieses Ergebnis hängt nur von einer entsprechenden Aussage in Lemma 5.2.7 ab, denn die zu Lemma 5.2.5 analoge Behauptung bei periodischen Feldern wurde bereits in [HEMHER], Theorem 3.9 bewiesen.

Die Regularitätsvoraussetzungen an das Magnetfeld, die neben der Flußbedingung für die Konvergenz des magnetischen SCHRÖDINGER-Operators nötig sind, wurden mit Theorem 5.2.3 auf eine sehr schwache Bedingung zurückgeführt. Wie weiter oben bereits erwähnt wurde, genügt es, daß der Magnetfeldträger KAC-regulär ist. Interessant (und vermutlich schwierig) dürfte es sein, Magnetfelder zu konstruieren, die die Flußbedingung erfüllen, bei denen aber *nicht* die starke bzw. die Normresolventenkonvergenz wie in Theorem 5.2.3 gelten. Ein solches Magnetfeld müßte einen Träger haben, der nicht KAC-regulär ist.

Symbolverzeichnis

Allgemeine Symbole

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0, mit 0	
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$	Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,\vert\, x \geq 0\}$	
(a,b), $[a,b]$	offenes, abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$	
$\mathbb{C}$, i	Menge der komplexen Zahlen, imaginäre Einheit	
A^c	Komplement von A	
$A \setminus B$	$A \cap B^c$	
$A \triangle B$	$A \setminus B \cup B \setminus A$	
$\mathring{M}$	Inneres der Menge M	
$\overline{M}$	Abschluß der Menge M	
∂M	topologischer Rand von M	
E, F	BANACH-Räume	
$\Vert\cdot\Vert_E$, $\Vert\cdot\Vert$	Norm von E, EUKLIDische Norm in $\mathbb{R}^d$	
$B_E(x,\varepsilon)$, $\overline{B}_E(x,\varepsilon)$	offene, abgeschlossene Kugel in E um x mit Radius ε	
$B(x,\varepsilon)$, $\overline{B}(x,\varepsilon)$	offene, abgeschlossene Kugel in $\mathbb{R}^d$ um x mit Radius ε	
$\mathcal{H}, \mathcal{H}_n$	HILBERT-Räume	
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$	Skalarprodukt von $\mathcal{H}$ (antilinear im zweiten Argument)	
$\operatorname{diam} A$	Durchmesser von A ($\sup\{\Vert x-y\Vert \,\vert\, x,y \in A\}$)	
$\operatorname{dist}(A,B)$	Abstand von A und B ($\inf\{\Vert x-y\Vert \,\vert\, x \in A, y \in B\}$)	
$\operatorname{meas} A$	d-dim. LEBESGUE-Maß von $A \subseteq \mathbb{R}^d$	
$\operatorname{supp} f$	Träger von f (Abschluß von $\{x \,\vert\, f(x) \neq 0\}$)	

Kapitel 2

$\mathbf{L}_k(E,F)$	Raum der k-multilinearen, stetigen Abbildungen von E nach F	2.1
$\mathbf{L}(E)$	$\mathbf{L}_1(E,E)$	2.1
$\mathbf{S}_k(E,F)$	Symmetrische Abbildungen aus $\mathbf{L}_k(E,F)$	2.1.1
$\mathbf{A}_k(E,F)$	Alternierende Abbildungen aus $\mathbf{L}_k(E,F)$	2.1.4
$\mathbf{A}_k E$	$\mathbf{A}_k(E,\mathbb{R})$	2.1.4
$P_k(E,F)$	Raum der stetigen Polynome von E nach F mit maximalem Grad k	2.1.1
φ^*, $\mathbf{A}_k\varphi$	von $\varphi \in \operatorname{Aut} E$ induzierter Autom. auf $\operatorname{Aut} \mathbf{A}_k E$	2.1.4
$\omega \wedge \eta$	äußeres Produkt von ω und η	2.1.4

$\Omega^k_{C^m} M$	Raum der k-Differentialformen der Klasse C^m auf M	2.3
$d\omega$	äußere Ableitung von ω	2.4
∂M	Rand der Mannigfaltigkeit M	2.6.1
$\int_M \omega$	Integral von ω über Mannigfaltigkeit M	2.6.3
$\int_\gamma \alpha$	Wegintegral von α über γ	2.6.5
α	Vektorpotential	2.7
β	Magnetfeld	2.7
Kapitel 3		
$\mathcal{D}(T)$	Definitionsbereich des Operators T	3.1.1
$T \geq 0$	T positiver Operator	3.1.1
T^*	Adjungierter Operator von T	3.1.1
$\mathcal{D}(t)$	Definitionsbereich der Sesquilinearform t	3.1.2
$L_2(M)$	Raum der LEBESGUE-quadratintb. Fkt. auf M	3.2.1
$C_c^\infty(U)$	Raum der glatten Fkt. mit komp. Träger in U	3.2.1
$\mathcal{H}^k(U)$	Raum der schwach differenzierbaren Funktionen	3.2.2
$\mathring{\mathcal{H}}^k(U)$	Abschluß von $C_c^\infty(U)$ in $\mathcal{H}^k(U)$	3.2.2
$\widetilde{\mathcal{H}}^k(M)$	SOBOLEV-Raum der auf M^c verschwindenden Fkt.	3.2.3
$-\Delta_M$	DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf M	3.3
t_M	Sesquilinearform zu $-\Delta_M$	3.3
$-\Delta$	DIRICHLET-LAPLACE-Operator auf $\mathbb{R}^d$	3.3
H_α	magn. SCHRÖDINGER-Operator zum Vektorpot. α	3.4
h_α	Sesquilinearform zu H_α	3.4
$s \leq t$	Ordnung zwischen Sesquilinearformen	3.5.3
$R(T)$	Resolvente von T	3.5.1
e^{-tT}	Halbgruppe von T	3.5.6
Kapitel 4		
$o(\cdot), o_{x_0}(\cdot)$	Abschätzungen	4.1.3
$D^k_{x_0} f$	k-te Ableitung von f in x_0	4.2.1
$T^k_{x_0} f$	k-tes TAYLOR-Polynom von f in x_0	4.2.2
$R^k_{x_0} f$	k-ter TAYLOR-Rest von f in x_0	4.2.2
$[x, x_0]$	Segment bzw. Strecke zwischen $x, x_0 \in E$	4.2.2
$J^k(M, F)$	Raum der Jets von M nach F	4.3.1
J^k	Jetabbildung	4.3.2
$\boldsymbol{D}^k \boldsymbol{f}$	k-te Ableitung des Jets $\boldsymbol{f}$	4.3.3
$\boldsymbol{T}^k_{x_0} \boldsymbol{f}$	k-tes TAYLOR-Polynom von $\boldsymbol{f}$ in x_0	4.3.5
$\boldsymbol{R}^k_{x_0} \boldsymbol{f}$	k-ter TAYLOR-Rest von $\boldsymbol{f}$ in x_0	4.3.5
$\boldsymbol{C}^k(M, F)$	Raum der k-mal differenzierbaren Jets von M nach F	4.3.8
$\Vert\gamma\Vert_E$	Weglänge von γ	4.5.1
δ_U	geodätischer Abstand in U	4.5.3
$C^k(\overline{U}, F)$	Fkt. der Klasse C^k von U nach F, Abl. stetig auf $\overline{U}$	4.6.5
Kapitel 5		
$\Omega_n \searrow \Omega$	Approximation von Ω von außen	5.2.1

Literaturverzeichnis

[Adams] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[Cartan] H. Cartan, *Formes Différentielles.* Hermann, Paris, 1967.

[Dieudonné] J. Dieudonné, *Éléments d'Analyse 1.* Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[doCarmo] M. P. do Carmo, *Differential Forms and Applications.* Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[GilbTrud] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Glaeser] G. Glaeser, *Étude de quelques Algèbres Tayloriennes.* Journal d'Analyse Mathématique Jerusalem Volume 6, 1958, 1 – 124.

[Godbillon] C. Godbillon, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique.* Hermann, Paris, 1969.

[HemHer] R. Hempel, I. Herbst, *Strong Magnetic Fields, Dirichlet Boundaries, and Spectral Gaps.* Communications in Mathematical Physics 169, 1995, 237 – 260.

[HerZhao] I. Herbst, Z. Zhao, *Sovolev Spaces, Kac-Regularity, and the Feynman-Kac Formula.* Collection: Seminar on Stochastic Processes, 1987, Princeton NJ, 1987, 171 – 191.

[Jones] P. W. Jones, *Quasiconformal Mappings and Extendability of Functions in Sobolev Spaces.* Acta Mathematica 147, 1981, 71 – 88.

[Kato] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New York, 1966.

[Lang1] S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

[LANG2] S. LANG, *Real Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA, 1969.

[LEINFSIM] H. LEINFELDER, C. G. SIMADER, *Schrödinger Operators with Singular Magnetic Vector Potentials.* Mathematische Zeitschrift 176, 1981, 1 – 19.

[MALGRANGE] B. MALGRANGE, *Ideals of Differentiable Functions.* Oxford University Press, London, 1966, Kapitel I.

[PORTSTONE] S. C. PORT, CH. J. STONE, *Brownian Motion and Classical Potential Theory.* Academic Press, New York, 1978.

[REEDSIMON1] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1972.

[REEDSIMON4] M. REED, B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. IV: Analysis of Operators.* Academic Press, New York, 1978.

[ROLFSEN] D. ROLFSEN, *Knots and Links.* Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish, Inc., Wilmington DE, 1976.

[STEIN] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princeton University Press, Princeton, 5. Auflage 1986, Kapitel VI.

[STROOCK] D. W. STROOCK, *The Kac Approach to Potential Theory: Part I.* Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 16, No. 8, 1967, 829 – 852.

[TOUGERON] J. C. TOUGERON, *Idéaux de Fonctions Différentiables.* Springer-Verlag, Berlin, 1972, Kapitel IV.

[WEIDMANN1] J. WEIDMANN, *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* Teubner, Stuttgart, 1976.

[WEIDMANN2] J. WEIDMANN, *Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren vom Gebiet.* Math. Scand. 54, 1984, 51 – 69.

[WERNER] D. WERNER, *Funktionalanalysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[WHITNEY1] H. WHITNEY, *Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 36, 1934, 63 – 89.

[WHITNEY2] H. WHITNEY, *Functions Differentiable on the Boundaries of Regions.* Annals of Mathematics Vol. 35, No. 3, July 1934, 482 – 485.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe.

Braunschweig, den 6. Dezember 1996