Musterklausur Analysis II*

1. Aufgabe (7 Punkte) (i) Was ist eine Metrik?
(ii) Es seien σ und ρ zwei äquivalente Metriken auf $\mathbb{R}$, und die Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ sei offen bzgl. σ. Beweisen Sie, dass M dann auch offen bzgl. ρ ist.

2. Aufgabe (7 Punkte) (i) Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt?
(ii) Beweisen Sie, dass die Vereinigung zweier kompakter Mengen wieder kompakt ist.

3. Aufgabe (4 Punkte) Überprüfen Sie, ob die unten angegebenen Funktionen $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert für $(x, y) \to (0, 0)$ besitzen, und berechnen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls:

$$\text{(i) } f(x,y) := \frac{x}{y}\sin y, \quad \text{(ii) } f(x,y) := \frac{x}{y}\sin x.$$

4. Aufgabe (3 Punkte) Wann nennt man eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar?

5. Aufgabe (4 Punkte) Besitzt das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch

$$v(x, y, z) := (e^y \sin z, xe^y \sin z + z, xe^y \cos z + y + 2z),$$

ein Potential? Wenn ja, so berechnen Sie ein solches Potential.

6. Aufgabe (5 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := e^x \sin y \cos z$. Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0, 0, 0)$.

7. Aufgabe (5 Punkte) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch $f(x, y, z) := 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$. Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

8. Aufgabe (5 Punkte) Berechnen Sie die maximale Lösung, insbesondere auch deren Definitionsbereich, des Anfangswertproblems

$$x' = \frac{tx(x-2)}{t^2-1}, \ x(0) = 1.$$

Für die Klausur sind 120 Minuten Arbeitszeit vorgesehen. Als Hilfsmittel sind Taschenrechner sowie ein Blatt mit persönlichen Notizen zugelassen.