Musterlösungen zur 1. Serie

1. Aufgabe Die Menge X bestehe aus allen nichtnegativen reellen Zahlen und dem Symbol ∞. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\rho : X \times X \to [0, \infty[$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned}
&\rho(x,y) := \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \text{ für } x, y \in [0, \infty[, \\
&\rho(x,\infty) = \rho(\infty, x) := 1 - \frac{x}{1+x} \text{ für } x \in [0, \infty[, \\
&\rho(\infty, \infty) := 0,
\end{aligned}$$

eine Metrik auf X ist. Konvergiert die Folge $1, 2, 3, \ldots$ bzgl. dieser Metrik?

Lösung Offenbar sind das Definitheits-Axiom ($\rho(x,y) = 0$ ganau dann, wenn $x = y$) und das Symmetrie-Axiom ($\rho(x,y) = \rho(y,x)$) erfüllt. Zu beweisen bleibt die Dreiecksungleichung. Für $x, y, z \in [o, \infty[$ folgt diese aus der Dreiecksungleichung für die Betragsfunktion:

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) + \rho(y,z) &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| + \left| \frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z} \right| \geq \\
&\geq \left| \left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right) + \left(\frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z} \right) \right| = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{z}{1+z} \right| = \rho(x,z).
\end{aligned}$$

Für $x, y \in [0, \infty[$ und $z = \infty$ gilt analog

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) + \rho(y,z) &= \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| + 1 - \frac{z}{1+z} \geq \\
&\geq \left| \left(\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right) + \left(1 - \frac{z}{1+z} \right) \right| = \left| 1 - \frac{x}{1+x} \right| = \rho(x,z).
\end{aligned}$$

Die Folge $1, 2, 3, \ldots$ konvergiert bzgl. dieser Metrik gegen ∞ wegen

$$\rho(n, \infty) = 1 - \frac{n}{1+n} = \frac{1}{1+n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\| \cdot \| : X \to [0, \infty[$ Normen sind:
(a) $X = \mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2)\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_1|} \right)^2$,
(b) $X = \mathbb{R}^3$, $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2}$,
(c) $X = \{x \in C([0,1]) : x \text{ ist stetig differenzierbar und } x(0) = 0\}$, $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x'(t)|$.

Lösung für (a) Es liegt keine Norm vor, weil die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist: Z.B. für $x = (1, 0)$ und $y = (0, 1)$ gilt

$$\|x + y\| = \|(1,1)\| = \left(\sqrt{1} + \sqrt{1} \right)^2 = 4 \text{ und } \|x\| + \|y\| = \left(\sqrt{1} \right)^2 + \left(\sqrt{1} \right)^2 = 2.$$

Lösung für (b) Es liegt eine Norm vor, weil gilt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^3$$

mit

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 \tag{1}$$

und weil durch (1) ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ definiert ist. In der Tat, es gilt

$$\langle x, x\rangle := x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \text{ genau dann, wenn } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Ferner gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ die Symmetrie $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ und

$$\begin{aligned}\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = (\lambda x_1 + \mu y_1)z_1 + 2(\lambda x_2 + \mu y_2)z_2 + 3(\lambda x_3 + \mu y_3)z_3 = \\ \lambda(x_1z_1 + 2x_2z_2 + x_3z_3) + \mu(y_1z_1 + 2y_2z_2 + y_3z_3) = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle.\end{aligned}$$

Lösung für (c) Es sei $x \in X$ gegeben mit

$$\|x\| = \max_{0\le t\le 1} |x(t)| = 0, \text{ also } x(t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Dann ist x eine konstante Funktion, und wegen $x(0) = 0$ folgt $x = 0$, also das Definitheits-Axiom ist erfüllt. Ferner gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$

$$\|\lambda x\| = \max_{0\le t\le 1} |\lambda x'(t)| = |\lambda| \max_{0\le t\le 1} |x'(t)| = |\lambda|\|x\|.$$

Die Dreiecksungleichung ist ebenfalls erfüllt:

$$\begin{aligned}\|x + y\| = \max_{0\le t\le 1} |x'(t) + y'(t)| \le \max_{0\le t\le 1} (|x'(t)| + |y'(t)|) \le \\ \le \max_{0\le t\le 1} |x'(t)| + \max_{0\le t\le 1} |y'(t)| = \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$

Also handelt es sich um eine Norm.

3. Aufgabe (i) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen $x_1, x_2, \ldots \in C([0, 1])$ punktweise konvergieren und/oder bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergieren und/oder bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergieren:

$$\begin{aligned}&\text{(a)} \quad x_n(t) = \sqrt{n}\sin nt,\\ &\text{(b)} \quad x_n(t) = \sqrt{n}\sin\frac{t}{n},\\ &\text{(c)} \quad x_n(t) = t^n \sin\frac{1}{n},\\ &\text{(d)} \quad x_n(t) = t^n - t.\end{aligned}$$

(ii) Konstruieren Sie eine solche Funktionenfolge, die punktweise konvergiert, aber nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und nicht bzgl. $\|\cdot\|_1$.

Lösung für (i)(a) Die Funktionenfolge konvergiert nicht punktweise, denn z.B.für $t = \pi/4$ gilt

$$x_n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{n}\sin\frac{n\pi}{4},$$

und diese Folge konvergiert nicht (sie springt zwischen den Zahlen $\pm\sqrt{2}/2$, ± 1 und Null hin und her). Damit konvergiert die Funktionenfolge auch nicht gleichmäßig, d.h. sie konvergiert nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Die Funktionenfolge konvergiert ebenfalls nicht bzgl. $\|\cdot\|_1$, denn sie ist unbeschränkt bzgl. $\|\cdot\|_1$:

$$\|x_n\|_1 = \int_0^1 \left|\sqrt{n}\sin nt\right| dt = \sqrt{n}\int_0^n |\sin s|\frac{ds}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{k_n\pi} |\sin s| ds = \frac{k_n}{\sqrt{n}}\int_0^\pi \sin s ds.$$

Dabei ist $k_n := \max\{k \in \mathbb{Z} : \, k\pi \leq n < (k+1)\pi\}$, und es gilt

$$k_n\pi \leq n < (k_n+1)\pi \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ also } \frac{n}{k_n\pi} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \text{ also } \frac{k_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Lösung für (i)(b) Die Funktionenfolge konvergiert gegen Null bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (und damit auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ und punktweise):

$$\|x_n\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}\left|\sqrt{n}\sin\frac{t}{n}\right| \leq \sqrt{n}\max_{0\leq t\leq 1}\frac{t}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Lösung für (i)(c) Die Funktionenfolge konvergiert gegen Null bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (und damit auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ und punktweise):

$$\|x_n\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}\left|t^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sin\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Lösung für (i)(d) Die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Funktion $x_0(t) := t$:

$$\begin{aligned}&|x_n(t) - x_0(t)| = t^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ für } 0 \leq t < 1,\\ &x_n(1) - x_0(1) = 0.\end{aligned}$$

Sie konvergiert auch bzgl. $\|\cdot\|_1$ gegen x_0:

$$\|x_n - x_0\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Sie konvergiert aber nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$: Wenn sie gleichmäßig konvergieren würde, so wäre ihr gleichmäßiger Grenzwert gleich ihren punktweisen Grenzwert, also x_0. Es gilt aber

$$\|x_n - x_0\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}|t^n| = 1.$$

Lösung für (ii) Wir definieren

$$x_n(t) := \begin{cases} n^3 t & \text{für } 0 \leq t < 1/n,\\ 2n^2 - n^3 t & \text{für } 1/n \leq t < 2/n,\\ 0 & \text{für } 2/n \leq t \leq 1.\end{cases}$$

Diese Funtion ist stetig, ihr Graph besteht aus dem Dreieck mit den Punkten $(0,0)$, $(1/n, n^2)$ und $(2/n, 0)$ und der Stecke $(x, 0)$ mit $2/n \leq x \leq 1$. Folglich ist

$$\|x_n\|_1 = \int_0^1 x_n(t)dt = \text{ Volumen des Dreiecks } = n,$$

also konvergiert die Funktionenfolge nicht bzgl. $\|\cdot\|_1$. Die Funktionenfolge konvergiert aber punktweise, denn es gilt

$$x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ für alle } t \in [0,1].$$

Die Funktionenfolge konvergiert auch nicht bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, denn

$$\|x_n\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |x_n(t)| = n^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

***Aufgabe** Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden beiden Behauptungen:

(i) Wenn ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in X existiert mit

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \text{ für alle } x \in X, \tag{2}$$

so gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \text{ für alle } x, y \in X. \tag{3}$$

(ii) Wenn (3) gilt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in X mit (2), nämlich

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{4}$$

Lösung für (i) Es gilt nach den Rechenregeln des Skalarprodukts (binomische Formel)

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

und

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2.$$

Daraus folgt (3).

Lösung für (ii) Zu zeigen ist, dass, wenn (3) gilt, durch (4) ein Skalarprodukt auf X erzeugt wird. Das Definitheits- und das Symmetrie-Axion sind offenbar erfüllt. Zu zeigen bleibt deshalb, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $x, y, z \in X$ gilt

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \tag{5}$$

und

$$\langle \lambda x, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle. \tag{6}$$

Wir zeigen zunächst (5): Wegen (4) gilt

$$\langle x+y, z\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right)$$

und
$$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2\right).$$
Folglich ist für (5) zu zeigen
$$f(x,y,z)=0 \tag{7}$$
mit
$$f(x,y,z):=\|x+y+z\|^2-\|x+y-z\|^2-\|x+z\|^2+\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \tag{8}$$
Wegen (3) gilt
$$\|x+y\pm z\|^2=2\left(\|x\pm z\|^2+\|y\|^2\right)-\|x-y\pm z\|^2.$$
Dies in (8) eingesetzt ergibt
$$f(x,y,z)=-\|x-y+z\|^2+\|x-y-z\|^2+\|x+z\|^2-\|x-z\|^2-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2. \tag{9}$$
Wir addieren die Hälfte von (8) und die Hälfte von (9) und erhalten
$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=\frac{1}{2}\left(\|x+y+z\|^2+\|-x+y+z\|^2\right)\\&-\frac{1}{2}\left(\|x+y-z\|^2+\|-x+y-z\|^2\right)-\|y+z\|^2+\|y-z\|^2.\end{aligned}$$
Wegen (3) ist der erste Summand gleich $\|x\|^2+\|y+z\|^2$, und der zweite Summand ist gleich $-\|x\|^2-\|y+z\|^2$, also (7) ist bewiesen.

Schließlich beweisen wir (6): Wegen (5) gilt
$$\langle nx,y\rangle=\langle x+\ldots+x,y\rangle=n\langle x,y\rangle \text{ für alle } n\in\mathbb{N}.$$
Daraus folgt
$$\left\langle\frac{n}{m}x,y\right\rangle=n\left\langle\frac{x}{m},y\right\rangle=\frac{n}{m}m\left\langle\frac{x}{m},y\right\rangle=\frac{n}{m}\langle x,y\rangle \text{ für alle } m,n\in\mathbb{N}.$$
Wegen (4) gilt
$$\langle 0,y\rangle=0 \text{ und } \langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle.$$
Also gilt (6) für alle rationalen λ. Damit ist die Funktion
$$\lambda\in\mathbb{R}\mapsto\langle\lambda x,y\rangle-\lambda\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|\lambda x+y\|^2-\|\lambda x-y\|^2-\lambda\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\right)\in\mathbb{R}$$
gleich Null für alle $\lambda\in\mathbb{Q}$. Weil diese Funktion aber stetig ist, so ist sie gleich Null sogar für alle $\lambda\in\mathbb{R}$. Die Stetigkeit folgt aus der Dreiecksungleichung nach unten:
$$\big|\|\lambda x\pm y\|-\|\mu x\pm y\|\big|\le\|(\lambda x\pm y)-(\mu x\pm y)\|=|\lambda-\mu|\|x\|\xrightarrow{\mu\to\lambda}0.$$