Musterlösungen zur 10. Serie

1. Aufgabe Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: & f(x,y):=2x^4+y^4-2x^2-2y^2, \\ \text{(b)} & f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: & f(x,y):=3x^2y-x^3-y^4, \\ \text{(c)} & f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: & f(x,y,z):=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2. \end{array}$$

Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

Lösung für (a) Es ist

$$\nabla f(x,y)=\left(8x^3-4x,\ 4y^3-4y\right).$$

Ein lokales Extremum erfüllt die notwendige Bedingung $\nabla f(x,y)=0$, daher kommen nur die Punkte $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0)$ und $(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm1)$ als lokale Extrema in Frage. Die Hesse-Matrix für f ist

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 24x^2-4 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{bmatrix}.$$

Wegen

$$\det H_f(0,\pm1)=\det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}<0 \text{ und } \det H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)=\det\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}<0$$

sind die Punkte $(0,\pm1)$ und $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},0\right)$ Sattelpunkte und folglich keine lokalen Extrema. Wegen

$$\det H_f(0,0)=\det\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}>0 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-4<0$$

ist der Punkt $(0,0)$ ein lokales Maximum. Und schließlich ist sind die Punkte $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm1\right)$ lokale Minima wegen

$$\det H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm1\right)=\det\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}>0 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}},\pm1\right)=8>0.$$

Lösung für (b) Es ist

$$\nabla f(x,y)=\left(6xy-3x^2,\ 3x^2-4y^3\right)$$

und

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix} 6(y-x) & 6x \\ 6x & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y)=0$ und damit die potentiallen lokalen Extrema sind $x=y=0$ und $x=6, y=3$. Der Punkt $(6,3)$ ist ein lokales Maximum wegen

$$\det H_f(6,3))=\det\begin{bmatrix} -18 & 36 \\ 36 & -108 \end{bmatrix}>0 \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,3)=-18<0.$$

Wegen $\det H_f(0,0) = 0$ arbeitet das Sylvester-Kriterium für den Punkt $(0,0)$ nicht. Aber z.B. die Reduktion $f(x,0) = -x^3$ von f auf die x-Achse zeigt, dass beliebig nahe an dem Punkt $(0,0)$ Punkte mit positiven f-Werten und andere mit negativen f-Werten existieren, d.h. dass $(0,0)$ kein lokales Extremum ist.

Lösung für (c) Es ist

$$\nabla f(x,y,z) = \big(4x - y + 2z,\ 3y^2 - x - 1,\ 2(x+z)\big)$$

und

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen der Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$ und damit die potentiallen lokalen Extrema sind

$$x = \frac{1}{3},\ y = \frac{2}{3},\ z = -\frac{1}{3}$$

und

$$x = -\frac{1}{4},\ y = -\frac{1}{2},\ z = \frac{1}{4}.$$

Der erste Punkt ist ein lokales Minimum weil die drei Hauptminore der Matrix

$$H_f(1/3, 2/3, -1/3)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

positiv sind:

$$4 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = 15 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 > 0.$$

Der zweite Punkt ist ein kein lokales Extremum weil die Matrix

$$H_f(-1/4, -1/2, 1/4)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

indefinit ist:

$$4 > 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = -13 < 0,\ \det \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -14 < 0.$$

2. Aufgabe Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$\left.\begin{array}{l} f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R} : \\ f(x,y) := 2x + 3y - \ln(xy) \end{array}\right\}$$

einen größten oder einen kleinsten Funktionswert besitzt, und berechnen Sie gegebenenfalls diese extremen Funktionswerte sowie die Punkte, in denen sie angenommen werden.

Lösung Offenbar besitzt f keinen größten Funktionswert, denn

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \infty.$$

Wenn f einen kleinsten Funktionswert $f(x_0, y_0)$ besitzt, so gilt

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(2 - \frac{1}{x}, 3 - \frac{1}{y}\right) = 0,$$

also

$$x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = \frac{1}{3},\ f(x_0, y_0) = 2 + \ln 6.$$

Dieser Funktionswert ist ein strenges lokales Minimum von f, weil

$$H_f(x,y)|_{x=1/2,y=1/3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=1/2,y=1/3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

positiv definit ist. Dieser Funktionswert ist sogar strenges globales Minimum von f, weil nach der Taylor-Formel gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\langle H_f(\lambda x + (1-\lambda)x_0, \lambda y + (1-\lambda)y_0)(x - x_0, y - y_0), x - x_0, y - y_0\rangle = \\ &= 2 + \ln 6 + \frac{1}{2}\left\langle \begin{bmatrix} (\lambda x + (1-\lambda)/2)^{-2} & 0 \\ 0 & \lambda(y + (1-\lambda)/3)^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1/2 \\ y - 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x - 1/2 \\ y - 1/3 \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= 2 + \ln 6 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(\lambda x + \frac{1-\lambda}{2}\right)^2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\left(\lambda y + \frac{1-\lambda}{3}\right)^2}\left(y - \frac{1}{3}\right)^2\right) > \\ &> 2 + \ln 6 \text{ für alle } x, y > 0 \text{ mit } (x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Anderer Beweis, dass $f(1/2, 1/3) = 2 + \ln 6$ der kleinste Funktionswert ist:

Es sei $(x_n, y_n) \in]0,\infty[\times]0,\infty$ eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} 3x_n - \ln x_n + 2y_n - \ln y_n = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in]0,\infty[\times]0,\infty\} =: c.$$

Wenn die Folge (x_n) unbeschränkt ist, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$. Weil aber $2y_{n_k} - \ln y_{n_k}$ nicht gegen $-\infty$ streben kann, folgt dann $c = \infty$, also ein Widerspruch, also ist (x_n) beschränkt. Analog zeigt man, dass (y_n) beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Folgen konvergieren:

$$x_n \to \xi,\ y_n \to \eta \text{ mit } \xi \geq 0,\ \eta \geq 0.$$

Es gilt $\xi > 0$ und $\eta > 0$, weil andernfalls wieder $c = \infty$ wäre. Also ist (ξ, η) das globale Minimum der Funktion f, also $\nabla f(\xi, \eta) = 0$, also $\xi = 1/2$ und $\eta = 1/3$.

3. Aufgabe Auf der Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\| = 1\}$ seien im Punkt $x_1 = (1,0,0)$ die Masse $m_1 = 1$, im Punkt $x_2 = (0,1,0)$ die Masse $m_2 = 2$ und im Punkt $x_3 = (0,0,1)$ die Masse $m_3 = 3$ konzentriert. Wie muß man den Punkt $x \in S$ wählen, damit das Trägheitsmoment

$$\sum_{j=1}^{3} m_j \|x - x_j\|^2$$

des Massepunkte-Systems x_1, x_2, x_3 bzgl. x minimal wird?

Lösung Gesucht ist der kleinste Funktionswert der Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2 + 2\left(x^2 + (y-1)^2 + z^2\right) + 3\left(x^2 + y^2 + (z-1)^2\right) &= \\ = 6\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + 2x + 4y + 6z + 6 & \end{aligned}$$

auf der Menge

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Solche Funktionswerte existieren, weil f stetig und weil M abgeschlossen und beschränkt ist. Die Methode der Langrange-Multiplikatoren führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 12x + 2 + 2\lambda x &= 0, \\ 12y + 4 + 2\lambda y &= 0, \\ 12z + 6 + 2\lambda z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Das System besitzt genau zwei Lösungen, nämlich

$$\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$$

Wegen

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) > f\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

folgt, dass das Trägheitsmoment in $(-1/\sqrt{14}, -2/\sqrt{14}, -1/\sqrt{14})$ minimal ist.

4. Aufgabe Finden Sie auf dem Ellipsoid

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8\}$$

Punkte, deren Abstände von dem Punkt $(0,0,3)$ minimal bzw. maximal sind. Wie groß sind diese extremalen Abstände?

Lösung Gesucht ist der kleinste Funktionswert der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

auf dem Ellipsoid

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8\}.$$

Solche Funktionswerte existieren, weil f stetig und weil M abgeschlossen und beschränkt ist. Die Methode der Langrange-Multiplikatoren führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x &= 0, \\ 2y + 4\lambda y &= 0, \\ 2(z-3) + 8\lambda z &= 0, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 &= 8. \end{aligned}$$

Das System besitzt genau vier Lösungen, nämlich

$$(0, 0, \pm\sqrt{2}) \text{ und } (\pm 2, 0, -1).$$

Wegen

$$f(0,0,\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-3)^2 < f(0,0,-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}-3)^2 < f(\pm 2, 0, -1) = 20f$$

folgt, dass $(\sqrt{2}-3)^2$ der minimale Abstand ist und 20 der maximale.

***Aufgabe** Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz,$$

bzgl. der Nebenbedingung

$$2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17 \tag{1}$$

im Punkt $(1,1,1)$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beiden?

Lösung Es sei

$$g(x,y,z) := 2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 17.$$

Dann gilt

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x^2y^2z + 8x \\ 4x^3yz + 10y \\ 2x^3y^2 + 12z \end{bmatrix}.$$

Also müssen alle lokalen Extrema von f bzgl. (1) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y+z &= \lambda(6x^2y^2z + 8x) \\ x+z &= \lambda(4x^3yz + 10y) \\ x+y &= \lambda(2x^3y^2 + 12z) \\ 17 &= 2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2. \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$x = y = z = 1, \lambda = \frac{1}{7}$$

eine Lösung diesen Gleichungssystems. Die Hesse-Matrizen sind

$$H_f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; H_g(1,1,1) = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 12 & 14 & 4 \\ 6 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$H_f(1,1,1) - \frac{1}{7}H_g(1,1,1) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -20 & -5 & 1 \\ -5 & -14 & 3 \\ 1 & 3 & -12 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ferner gilt

$$(\operatorname{span}\{\nabla g(1,1,1)\})^{\perp} = \operatorname{span}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}. \tag{3}$$

Wir zeigen nun, dass die Matrix (2) negativ definit auf dem Unterraum (3) ist (und damit, dass $(1,1,1)$ ein lokales Minimum von f bzgl. (1) ist): Es gilt

$$\begin{bmatrix} -20 & -5 & 1 \\ -5 & -14 & 3 \\ 1 & 3 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -20 & -5 & 1 \\ -5 & -14 & 3 \\ 1 & 3 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -8 \\ 13 \end{bmatrix},$$

also

$$\left\langle \begin{bmatrix} -20 & -5 & 1 \\ -5 & -14 & 3 \\ 1 & 3 & -12 \end{bmatrix}\left(\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right), \left(\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right\rangle =$$

$$= -24\alpha^2 - 26\alpha\beta - 34\beta^2 = \left\langle \begin{bmatrix} -24 & -13 \\ -13 & -34 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}\right\rangle < 0 \text{ für } \alpha^2+\beta^2 < 0.$$

weil die Matrix

$$\begin{bmatrix} -24 & -13 \\ -13 & -34 \end{bmatrix}$$

nach dem Sylvester-Kriterium negativ definit ist.