Musterlösungen zur 11. Serie

1. Aufgabe Berechnen Sie die maximalen Lösung, insbesondere auch deren Definitionsbereich, des Anfangswertproblems

$$x' = \frac{tx(x-2)}{t^2-1},\ x(0) = 1.$$

Lösung für Es gilt

$$\int_1^x \frac{dy}{y(y-2)} = \frac{1}{2}\int_1^x \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{2}\left(\ln(|x-2| - \ln|x|\right)$$

und

$$\int_0^t \frac{s}{s^2-1} = \frac{1}{2}\int_0^{t^2} \frac{d\sigma}{\sigma - 1} = \frac{1}{2}\ln|t^2-1|.$$

Das größte t-Intervall um den Anfangswert $t=0$, so dass dort $\frac{t}{t^2-1}$ definiert ist, ist $]-1,1[$. Das größte x-Intervall um den Anfangswert $x=1$, so dass dort $x(x-2)$ definiert und ungleich Null ist, ist $]0,2[$. Also ist das größte Teilintervall von $]-1,1[$ um $t=0$ gesucht, so dass für alle t aus diesem Teilintervall die Gleichung

$$\int_1^x \frac{dy}{y(y-2)} = \int_0^t \frac{s}{s^2-1},$$

nach $x \in]0,2[$ eindeutig aufgelöst werden kann. Also ist das größte Teilintervall von $]-1,1[$ um $t=0$ gesucht, so dass für alle t aus diesem Teilintervall die Gleichung

$$\ln\frac{2-x}{x} = \ln(1-t^2),\ 0 < x < 2.$$

eindeutig lösbar ist. Dieses Teilintervall ist $]-1,1[$ selbst, und die gesuchte maximale Lösung ist

$$x = \frac{2}{2-t^2},\quad -1 < t < 1.$$

2. Aufgabe Zeigen Sie, dass die maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = \frac{t}{x^2+1},\quad x(0) = 0$$

auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, und berechnen Sie den Funktionswert der maximalen Lösung in $t = \frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Lösung Es gilt

$$\int_0^x (y^2+1)dy = \frac{x^3}{3} + x;\quad \int_0^t sds = \frac{t^2}{2}.$$

Das größte t-Intervall um den Anfangswert $t = 0$, so dass dort t definiert ist, ist ganz $\mathbb{R}$ ebenso wie das größte x-Intervall um den Anfangswert $x = 0$, so dass dort $= x^2 + 1$ definiert und ungleich Null ist. Die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3/3 + x \in \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, also ist die Gleichung

$$\frac{x^3}{3} + x = \frac{t^2}{2}, \ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

ist für alle $t \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar, also ist die maximale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und

$$x\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\right) = 1, \tag{2}$$

Wenn man die Lösung (2) der Gleichung (1) nicht erraten kann, so muss man sie mit Hilfe der Cardano-Formeln (dem Analogon für Gleichungen dritter Ordnung der "$p - q$"-Formeln) berechnen.

3. Aufgabe Es sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie. dass das rechte Intervallende des Definitionsbereichs der maximalen Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x^\alpha, \quad x(0) = 1 \tag{3}$$

endlich ist und gegen Unendlich strebt für $\alpha \downarrow 1$. Zeigen Sie ferner, dass für jedes fixierte $t > 0$ der Wert $x(t)$ der maximalen Lösung von (3) gegen e^t strebt für $\alpha \downarrow 1$.

Lösung Die Gleichung

$$\int_1^x y^{-\alpha} dy = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) = \int_0^t ds = t, \quad x > 0$$

ist eindeutig nach x auflösbar für $(1-\alpha)t + 1 > 0$, also ist die maximale Lösung

$$x = ((1-\alpha)t + 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t < \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Das rechte Intervallende des Definitionsbereichs der maximalen Lösung ist also $(\alpha - 1)^{-1}$, und es strebt gegen Unendlich für $\alpha \downarrow 1$. Zu zeigen bleibt

$$\lim_{\alpha \downarrow 1} ((1-\alpha)t + 1)^{\frac{1}{1-\alpha}} = e^t, \ \text{d.h.} \ \lim_{\alpha \downarrow 1} \frac{\ln((1-\alpha)t + 1)}{1-\alpha} = t.$$

Nach der l'Hospital-Regel ist das richtig, weil

$$\lim_{\alpha \downarrow 1} \frac{t}{(1-\alpha)t + 1} = t.$$

***Aufgabe** Berechnen Sie die Definitionsbereiche der maximalen Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad x' = \frac{1}{x \ln x}, \quad x(0) = \frac{1}{2}, \\ &\text{(b)} \quad x' = \sin x, \quad x(0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lösung für (a) Es ist das größte Intervall um $t = 0$ zu bestimmen, so dass für alle t aus diesem Intervall die Gleichung

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} y \ln y dy = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} = t, \quad 0 < x < 1 \tag{4}$$

nach x auflösbar ist. Die Funktion

$$f(x) := \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

ist in $]0, 1[$ streng monoton fallend, folglich ist ihre Bildmenge gleich

$$\left] f(1), \lim_{x \downarrow 0} f(x) \right[\; = \; \left] -\frac{1}{4}, 0 \right[.$$

Dort muß $t - \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{16}$ liegen, damit (4) lösbar ist. Der Definitionsbereich der maximalen Lösung ist also

$$\left] -\frac{3}{16} + \frac{\ln 2}{8}, \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{8} \right[.$$

Lösung für (b) Es ist das größte Intervall um $t = 0$ zu bestimmen, so dass für alle t aus diesem Intervall die Gleichung

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{\sin y} dy = t, \quad 0 < x < \pi \tag{5}$$

nach x auflösbar ist. Wegen

$$\lim_{x \uparrow \pi} \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\sin y}}{\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\pi - y}} = \lim_{x \uparrow \pi} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\pi - x}} = 1 \text{ und } \lim_{x \uparrow \pi} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\pi - y} = \infty$$

folgt

$$\lim_{x \uparrow \pi} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\sin y} = \infty.$$

Analog zeigt man

$$\lim_{x \downarrow 0} \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{dy}{\sin y} = -\infty.$$

Also ist (5) für alle $t \in \mathbb{R}$ lösbar, also ist der Definitionsbereich der maximalen Lösung ganz $\mathbb{R}$.