Musterlösungen zur 2. Serie

1. Aufgabe (i) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, \infty[\to [0, \infty[\,, \quad f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1}$$

strikt kontraktiv ist, d.h. dass ein $c \in [0, 1[$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ für alle } x, y \in [0, \infty[.$$

(ii) Berechnen Sie den Fixpunkt von f.
(iii) Berechnen Sie (mit dem Taschenrechner) die ersten fünf Glieder der Approximationsfolgen $x_{j+1} = f(x_j),\ \ j = 0, 1, \ldots$ des Banachschen Fixpunktsatzes für die Startwerte $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ und $x_0 = 100$.
(iv) Vergleichen Sie jeweils den Abstand der Approximation x_5 vom Fixpunkt mit seiner a-priori-Abschätzung $\frac{c^5}{1-c}|x_1 - x_0|$ und seiner a-posteriori-Abschätzung $\frac{c}{1-c}|x_5 - x_4|$.

Lösung (i) Es gilt für $x, y \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} - \frac{y + \frac{1}{2}}{y + 1} \right| = \left| \frac{(x + \frac{1}{2})(y + 1) - (x + 1)(y + \frac{1}{2})}{(x + 1)(y + 1)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{x - y}{(x + 1)(y + 1)} \right| \leq \frac{1}{2}|x - y|. \end{aligned}$$

Also ist f strikt kontraktiv mit der Kontraktionskonstanten $c = \frac{1}{2}$.

(ii) Die Lösung von

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} = x$$

ist $x = 1/\sqrt{2}$.

(iii) Mit dem Taschenrechnerechner erhalten wir (auf fünf Stellen gerundet) die folgenden Approximationen für den Fixpunkt $1/\sqrt{2} = 0.70711$:

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 0.66667$	$x_3 = 0.70000$	$x_4 = 0.70588$	$x_5 = 0.70690$
$x_0 = 1$	$x_1 = 0.75000$	$x_2 = 0.71429$	$x_3 = 0.70833$	$x_4 = 0.70732$	$x_5 = 0.70714$
$x_0 = 100$	$x_1 = 0.99505$	$x_2 = 0.74938$	$x_3 = 0.71418$	$x_4 = 0.70832$	$x_5 = 0.70731$

(iv) Wir erhalten mit dem Rechner (auf fünf Stellen gerundet):

$x_0 = 0:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.00021023$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.0010142$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.031250$
$x_0 = 1:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.000036076$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.00017422$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 0.015625$
$x_0 = 100:$	$\lvert x_5 - 1/\sqrt{2}\rvert = 0.00020734$	$\frac{c}{1-c}\lvert x_5 - x_4\rvert = 0.0010020$	$\frac{c^5}{1-c}\lvert x_1 - x_0\rvert = 6.1878$

2. Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ strikt kontraktiv bzgl. der jeweils angegebenen Norm sind:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \|\cdot\|_2,\ f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(\sin x_1, \cos x_2), \\ \text{(b)} & \|\cdot\|_2,\ f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2), \\ \text{(c)} & \|\cdot\|_\infty,\ f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2). \end{array}$$

Lösung für (a) Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhalten wir für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Abschätzungen (dabei sind ξ und η gewisse Zahlen zwischen x und y)

$$\begin{array}{rcccl} |\sin x - \sin y| & = & |(x-y)\cos\xi| & \leq & |x-y|, \\ |\cos x - \cos y| & = & |(x-y)\sin\eta| & \leq & |x-y|. \end{array}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_2 &= \left(\left|\frac{1}{2}\sin x_1 - \frac{1}{2}\sin y_1\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\cos x_2 - \frac{1}{2}\cos y_2\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\|(x_1,x_2),(y_1,y_2)\|_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass f strikt kontraktiv mit der Kontraktionskonstanten $c = 1/2$ ist.

Lösung für (b) und (c) Es gilt

$$f(x_1,x_2) - f(y_1,y_2) = f(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \frac{1}{2}(x_1 - y_1 + x_2 - y_2, x_2 - y_2).$$

Im Fall (b) der Euklidischen Norm folgt also

$$\begin{aligned} \|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_2 &= \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1 + x_2 - y_2|^2 + |x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(|x_1 - y_1|^2 + 2|x_1 - y_1||x_2 - y_2| + 2|x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(2|x_1 - y_1|^2 + 3|x_2 - y_2|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}\|(x_1,x_2) - (y_1,y_2)\|_2, \end{aligned}$$

d.h. f ist strikt kontractiv.

Im Fall (c) der Maximum-Norm ist f nicht strikt kontractiv, weil z.B.

$$\|f(1,1) - f(0,0)\|_\infty = \max\{1,0\} = 1 = \|(1,1) - (0,0)\|_\infty.$$

3. Aufgabe Die Abbildung $f : C([0,1]) \to C([0,1])$ sei definiert durch

$$[f(x)](t) := 1 + \int_0^t x(s)ds \text{ für alle } t \in [0,1],$$

und die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots \in C([0,1])$ sei induktiv definiert durch $x_0(t) := 1$ für alle $t \in [0,1]$ und $x_{j+1} := f(x_j)$ für alle $j = 0, 1, 2, \ldots$. Konvergiert die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$? Wenn ja, was ist der Grenzwert, und ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f?

Lösung Es gilt

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 1 + \int_0^t ds = 1 + t,\\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2},\\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\\
&\ldots\\
x_n(t) &= \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Also gilt $x_n(t) \to e^t$ bei $n \to \infty$ gleichmäßig bzgl. $t \in [0,1]$ (weil Potenzreihen in jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzintervalls gleichmäßig konvergieren), d.h. die Folge (x_n) konvergiert bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen die Funktion $x_*(t) := e^t$. Offenbar ist x_* auch Fixpunkt von f, weil gilt

$$[f(x_*)](t) = 1 + \int_0^t e^s ds = e^t = x_*(t).$$

***Aufgabe** Beweisen Sie, dass der Vektorraum $C([0,1])$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig ist.

Lösung Wir betrachten die Folge $x_1, x_2, \ldots \in C([0,1])$, die definiert ist durch

$$x_n(t) := \begin{cases} 1 - (1-2t)^n & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2},\\ (1-2t)^n - 1 & \text{für } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Die Foge (x_n) eine Fundamentalfolge bzgl. $\|\cdot\|_1$, denn es gilt für alle $m \ge n$

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\|_1 &= \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-2t)^n - (1-2t)^m\right) dt =\\
&= \left[-\frac{(1-2t)^{n+1}}{n+1} + \frac{(1-2t)^{m+1}}{m+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Angenommen, es gäbe ein $x \in C([0,1])$ mit

$$\|x_n - x\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dann müßte für beliebige $0 \leq a < b < \frac{1}{2}$ gelten

$$\|x_n - x\|_1 = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt \geq \int_a^b |1 - (2t-1)^n - x(t)|dt \geq$$
$$\geq \int_a^b |1 - x(t)|dt \geq - \int_a^b |2t-1)^n|dt.$$

Daraus folgt nach Grenzübergang $n \to \infty$

$$\int_a^b |1 - x(t)|dt = 0.$$

Weil die einzige stetige Funktion $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\int_a^b |y(t)|dt = 0$ die Nullfunktion ist, folgt $x(t) = 1$ für alle $t \in [a,b]$. Das ergibt, weil $0 \leq a < b < \frac{1}{2}$ beliebig sind,

$$x(t) = 1 \text{ für } 0 \leq t < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Analog zeigt man (durch die Wahl $\frac{1}{2} < a < b \leq 1$)

$$x(t) = -1 \text{ für } \frac{1}{2} < t \leq 1. \tag{2}$$

Die Eigenschaften (1) und (2) sind aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass x stetig ist.