## Musterlösungen zur 4. Serie

**1. Aufgabe** Überprüfen Sie, ob für die folgenden Funktionen  $f: ]0, \infty[\times]0, \infty[ \to \mathbb{R}$  die Grenzwerte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \tag{1}$$

und/oder

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) \tag{2}$$

und/oder

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x, y) \tag{3}$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

- (a)  $f(x,y) = x \sin 2^y,$
- (b)  $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{xy}$ ,

(c) 
$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$
,

(d) 
$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$
.

Lösung für (a) Es gilt

 $\lim_{x\to 0} x \sin 2^y = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y, \text{ weil } |\sin 2^y| \le 1 \text{ für alle } y.$ 

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Der Grenzwert (2) allerdings existiert nicht, weil  $\lim_{y\to 0} x \sin 2^y$  nicht existiert für  $x\neq 0$ .

Lösung für (b) Wir benutzen den bekannten Grenzwert  $\lim_{z\downarrow 0} z \ln z = 0$ . Daraus folgt

$$|xy\ln(x^2+y^2)| \le \frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| \to 0 \text{ bei } (x,y) \to (0,0).$$

Also gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} e^{xy\log(x^2+y^2)} = e^0 = 1.$$

Die beiden iterierten Grenzwerte (2) und (3) existieren ebenfalls und sind gleich (1):

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} (x^2 + y^2)^{xy} = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} (x^2 + y^2)^{xy} = 1.$$

Lösung für (c) Die beiden iterierten Grenzwerte (2) und (3) existieren und sind verschieden:

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1 \text{ und } \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Folglich existiert der Grenzwert (1) nicht.

Lösung für (d) Es gilt

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|=|x|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq |x|\to 0 \text{ für } x\to 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y.$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Ferner gilt

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} = \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

- **2.** Aufgabe Es seien  $(X, \rho)$  und  $(Y, \sigma)$  zwei metrische Räume. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass für alle Abbildungen  $f: X \to Y$  die folgenden Behauptungen gelten:
- (a) Wenn f stetig ist, so ist f(M) offen für alle offenen Mengen  $M \subseteq X$ .
- (b) Wenn f stetig ist, so ist f(M) abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen  $M \subseteq X$ .
- (c) Wenn f stetig ist, so ist  $f^{-1}(N)$  offen für alle offenen Mengen  $N \subseteq Y$ .
- (d) Wenn  $f^{-1}(N)$  offen ist für alle offenen Mengen  $N \subseteq Y$ , so ist f stetig.
- (e) Wenn f stetig ist, so gilt  $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$  für alle Mengen  $M \subseteq X$ .
- (f) Wenn  $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$  für alle Mengen  $M \subseteq X$  gilt, so ist f stetig.

Dabei sind  $f(M) := \{f(x) \in Y : x \in M\}$  bzw.  $f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$  die Bildmenge bzw. die Urbildmenge von M bzw. N bzgl. f, und  $f(\overline{M})$  ist analog definiert.

**Lösung für (a)** (a) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen n = 1,  $X = \mathbb{R}$  und f(x) = 0 für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f(X) = \{0\}$  nicht offen.

**Lösung für (b)** Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen  $X = \mathbb{R}$  und  $f(x) = 2^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f(X) = ]0, \infty[$  nicht abgeschlossen.

**Lösung für (c)** Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Es seien  $Y \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in f^{-1}(Y)$ . Nach Definition der Menge  $f^{-1}(Y)$  existiert ein

Es seien  $Y \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in f^{-1}(Y)$ . Nach Definition der Menge  $f^{-1}(Y)$  existiert ein  $y_0 \in Y$  mit  $f(x_0) = y_0$ . Weil Y offen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $K(y_0, \varepsilon) \subseteq Y$ . Weil f stetig in  $x_0$  ist, existiert ein  $\delta > 0$  so dass für alle  $x \in K(x_0, \delta)$  gilt  $f(x) \in K(y_0, \varepsilon)$ , also  $x \in f^{-1}(K(y_0, \varepsilon))$ , also  $x \in f^{-1}(Y)$ . Daraus folgt  $K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(Y)$ .

**Lösung für (d)** Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Es seien  $x_0 \in X$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben. Wegen  $x_0 \in f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$  und weil  $f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon))$  offen ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$K(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(K(f(x_0), \varepsilon)), \text{ d.h. } f(K(x_0, \delta)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon).$$

Daraus folgt  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  für alle  $x \in M$  mit  $\rho(x, x_0) < \delta$ , d.h. f ist stetig in  $x_0$ .

**Lösung für (e)** Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Es sei  $x \in \overline{M}$ , Dann existiert eine Folge  $x_1, x_2, \ldots \in M$  mit  $x_n \to x$ . Weil f stetig ist, folgt  $f(x_n) \to f(x)$ . Wegen  $f(x_1), f(x_2), \ldots \in f(M)$  folgt daraus  $f(x) \in \overline{f(M)}$ .

**Lösung für (f)** Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt: Es sei  $x_1, x_2, \ldots \in X$  eine Folge mit  $x_n \to x_0$ . Zu zeigen ist

$$f(x_n) \to f(x_0).$$
 (4)

Wenn das Gegenteil von (4) gilt, so existieren ein  $\varepsilon > 0$  und eine Teilfolge mit

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| \ge \varepsilon \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$
 (5)

Nach Voraussetzung gilt aber

$$\{f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots\} = f(\{x_0, x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}) = f(\overline{\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}}) \subseteq \overline{f(\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\})} = \overline{\{f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots\}}, \text{ d.h. } f(x_0) \in \overline{\{f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \ldots\}}.$$

Daraus folgt, dass eine Teilfolge der Teilfoge existiert mit

$$f(x_{n_{k_l}}) \xrightarrow{l \to \infty} f(x_0).$$

Das widerspricht aber (5).

- \*Aufgabe Es seien  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: X \to Y$  stetig und bijektiv. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Behauptungen:
- (a) Die inverse Funktion  $f^{-1}$  ist ebenfalls stetig.
- (b) Wenn X ein Intervall ist, so ist die inverse Funktion  $f^{-1}$  ebenfalls stetig.

**Lösung für (a)** Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir wählen  $X = [0, 1] \times [2, 3], Y = [0, 2]$  und

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1[, \\ x - 1 & \text{für } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Dann folgt

$$f^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 1 \neq f^{-1}(1) = 2,$$

also ist  $f^{-1}$  in Eins nicht stetig.

Lösung für (b) Die Behauptung ist richtig, wie der folgende Beweis zeigt:

Zunächst beweisen wir, dass f streng monoton ist: Wenn das nicht der Fall wäre, so würden Punkte  $x_1 < x_2 < x_3$  in X existieren mit

$$f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$$
 oder  $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ .

Weil X ein Intervall ist, würden nach dem Zwischenwertsatz im ersten Fall Punkte  $\xi_1 \in ]x_1, x_2[$  und  $\xi_2 \in ]x_2, x_3[$  existieren mit

$$f(\xi_1) = f(\xi_2) = \min \left\{ \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \right\}.$$

Wegen  $\xi_1 \neq \xi_2$  widerspricht das aber der Injektivität von f. Analog behandelt man den zweiten Fall.

Es sei f z.B. streng monoton wachesend. Wir nehmen das Gegenteil der Behauptung an, d.h. dass ein  $y_0 \in Y$  existiert so dass  $f^{-1}$  nicht stetig in  $y_0$  ist. Dann existiert eine Folge  $y_1, y_2, \ldots \in Y$  mit  $y_n \to y_0$  für  $n \to \infty$  so dass gilt:

$$f^{-1}(y_n)$$
 strebt nicht gegen  $f^{-1}(y_n)$ . (6)

Es gilt  $y_n < y_0$  für unendlich viele verschiede Indizes n oder  $y_n > y_0$  für unendlich viele verschiede Indizes n. Also können wir eine Teilfolge  $(y_{n_k})$  auswählen so dass alle Elemente dieser Teilfolge auf einer Seite von  $y_0$  liegen, z.B.  $y_{n_k} < y_0$  für alle k. Aus dieser Teilfolge können wir eine monoton wachsende Teilfolge auswählen (die wir der Einfachheit halber wieder mit  $(y_{n_k})$  bezeichnen), also

$$y_{n_1} \le y_{n_2} \le \ldots \le y_{n_k} < y_0.$$

Wegen der Monotonie von f folgt

$$f^{-1}(y_{n_1}) \le f^{-1}(y_{n_2}) \le \ldots \le f^{-1}(y_{n_k}) < f^{-1}(y_0).$$

Also ist die Folge  $(f^{-1}(y_{n_k}))$  monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent: Es existiert ein

$$x_0 \ge f^{-1}(y_{n_k})$$
 für alle  $k \in \mathbb{N}$  (7)

mit

$$f^{-1}(y_{n_1}) \le f^{-1}(y_{n_2}) \le \dots \le f^{-1}(y_{n_k}) \to x_0 \le f^{-1}(y_0) \text{ für } k \to \infty.$$
 (8)

Wegen (6) gilt  $x_0 \neq f^{-1}(y_0)$ , und deshalb liefert (8)  $x_0 < f^{-1}(y_0)$ . Weil der Definitionsbereich von f ein Intervall ist und weil  $f^{-1}(y_1) \leq x_0 < f^{-1}(y_0)$  gilt, ist  $x_0$  im Definitionsbereich von f. Also folgt wegen der Monotonie  $f(x_0) < y_0$ . Wegen  $y_n \to y_0$  für  $n \to \infty$  folgt daraus  $f(x_0) < y_n$  für alle großen Indizes n, d.h.  $x_0 < f(y_n)$  für alle großen Indizes n. Das widerspricht aber (7).