Musterlösungen zur 5. Serie

1. Aufgabe Überprüfen Sie, of die folgenden linearen Abbildungen $A : X \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_1,\ Ax = x(1)$,

(b) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty,\ Ax = x(1)$,

(c) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_2,\ Ax = \int_0^1 x(t)dt$,

(d) $X = \{x \in C([0,1]) :\ x \text{ ist Polynom}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty,\ Ax = x'(1)$.

Lösung für (a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_n \in C([0,1])$ durch $x_n(t) := t^n$. Dann gilt

$$\|x_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

aber $Ax_n = 1$ strebt nicht gegen $A0 = 0$. Also ist A nicht stetig.

Lösung für (b) Es gilt

$$|Ax| = |x(1)| \le \max_{0\le t\le 1} |x(t)| = \|x\|_\infty,$$

also ist A stetig.

Lösung für (c) Es gilt wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|Ax| = \left|\int_0^1 x(t)dt\right| \le \sqrt{\int_0^1 1^2 dt}\ \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt} = \|x\|_2,$$

also ist A stetig.

Lösung für (d) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $x_n \in X$ durch $x_n(t) := \frac{t^n}{n}$. Dann gilt

$$\|x_n\|_\infty = \max_{0\le t\le 1} \frac{t^n}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

aber $Ax_n = 1$ strebt nicht gegen $A0 = 0$. Also ist A nicht stetig.

2. Aufgabe Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $f :]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}, x^y\right)$$

in den Punkten $(1,1)$, $(1,2)$ und $(2,2)$.

Lösung Es gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ yx^{y-1} & x^y \ln x \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in]0,\infty[^2,$$

also

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 4\ln 2 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe Wieviele verschiedene differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

und

$$f(0,0) = 0 \tag{2}$$

existieren?

Lösung Aus $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$ folgt $f(x,y) = x + a_y$, wobei $a_y \in \mathbb{R}$ eine Konstante bzgl. x ist, aber im allgemeinen von y abhängt. Analog folgt aus $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$ dass $f(x,y) = y + b_x$, mit $b_x \in \mathbb{R}$. also $x + a_y = y + b_x$. Daraus folgt

$$x - b_x = y - a_y = c \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, die weder von x noch von y abhängt. Insbesondere gilt $-a_0 = c$. Dies in (2) eingesetzt ergibt $0 = f(0,0) = a_0 = -c$. Wegen (3) folgt $b + x = x$ und $a_y = y$, also

$$f(x,y) = x + y. \tag{4}$$

Und umgekehrt: Offenbar erfüllt die Funktion (4) die Relationen (1) und (2). Mit anderen Worten: Es existiert genau eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1) und (2), nämlich die Funktion (4).

***Aufgabe** Wir betrachten den Vektorraum $X = \mathbb{R} \times C([0,1])$ mit der Norm $\|(t,x)\| := |t| + \|x\|_\infty$, die in X offene Menge $U =]0,1[\times C([0,1])$ und die sogenannte Wertzuweisungsabbildung

$$f : U \to \mathbb{R} : \ f(t,x) := x(t).$$

(i) In welchen Punkten $(t,x) \in U$ ist f stetig?
(ii) In welchen Punkten $(t,x) \in U$ ist f differenzierbar?

Lösung für (i) Wir zeigen, dass f überall stetig ist: Es sei $(t_0, x_0) \in U$ beliebig fixiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t_0,x_0)| &= |x(t) - x_0(t_0)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - x_0(t_0)| \leq \\ &\leq \|x - x_0\|_\infty + |x_0(t) - x_0(t_0)| \xrightarrow{|t-t_0| + \|x-x_0\|_\infty \to 0} 0. \end{aligned}$$

Lösung für (ii) Wir zeigen, dass f nirgends differenzierbar ist: Es sei $(t_0, x_0) \in U$ beliebig fixiert. Wenn f in (t_0, x_0) differenzierbar wäre, so müßte für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in C([0,1])$ der

Grenzwert

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(t_0+st, x_0+sx) - f(t_0,x_0)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{x_0(t_0+st)-x_0(t_0)}{s} + x(t_0+st)\right) \tag{5}$$

existieren, d.h. der Grenzwert

$$\lim_{s\to 0} \frac{x_0(t_0+st)-x_0(t_0)}{s}$$

müßte existieren, d.h. x_0 müßte in t_0 differenzierbar sein. Unter dieser Voraussetzung wäre der Grenzwert (5) gleich $x_0'(t_0)t + x(t_0)$. Mit anderen Worten, dann wäre

$$[f'(t_0,x_0)](t,x) = x_0'(t_0)t + x(t_0). \tag{6}$$

Wir zeigen nun, dass die lineare stetige Abbildung $f'(t_0,x_0) : \mathbb{R}\times C([0,1]) \to \mathbb{R}$, die in (6) definiert ist, nicht die Ableitungsdefinition erfüllt, d.h. dass nicht gilt

$$\lim_{\|(t,x)\|\to 0} \frac{f(t_0+t,x_0+x)-f(t_0,x_0)-f'(t_0,x_0)(t,x)}{\|(t,x)\|} = 0.$$

Wegen

$$f(t_0+t,x_0+x)-f(t_0,x_0)-f'(t_0,x_0)(t,x) = x_0(t_0+t)+x(t_0+t)-x_0(t_0)-(x_0'(t_0)t+x(t_0))$$

ist also zu zeigen, dass nicht gilt

$$\lim_{|t|+\|x\|_\infty\to 0} \frac{x_0(t_0+t)+x(t_0+t)-x_0(t_0)-x(t_0)-x_0'(t_0)t}{|t|+\|x\|_\infty} = 0. \tag{7}$$

Weil x_0 differenzierbar in t_0 ist, gilt

$$\frac{|x_0(t_0+t)-x_0(t_0)-x_0'(t_0)t|}{|t|+\|x\|_\infty} \le \frac{|x_0(t_0+t)-x_0(t_0)-x_0'(t_0)t|}{|t|} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

Also bleibt zu zeigen, dass nicht gilt

$$\lim_{|t|+\|x\|_\infty\to 0} \frac{x(t_0+t)-x(t_0)}{|t|+\|x\|_\infty} = 0. \tag{8}$$

Wir zeigen das, indem wir Folgen $t_1,t_2,\ldots \in [0,1]$ mit $t_n\to 0$ und $x_1,x_2,\ldots\in C([0,1])$ mit $\|x_n\|_\infty \to 0$ konstruieren, so dass der (8) entsprechende Quotient nicht gegen Null strebt.

Zunächst betrachten wir den Fall $0\le t_0<1$: In diesem Fall wählen wir

$$t_n := \frac{1}{n},\ x_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0\le t\le t_0,\\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{t-t_0}{1-t_0}} & \text{für } t_0<t\le 1.\end{cases}$$

Dann folgt $\|x_n\|_\infty = 1/n$ und

$$\frac{x_n(t_0+t_n)-x_n(t_0)}{|t_n|+\|x_n\|_\infty} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n(1-t_0)}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Im Fall $t_0 = 1$ wählen wir

$$t_n := -\frac{1}{n},\ x_n(t) := \frac{1}{n}\sqrt[n]{1-t}$$

Dann folgt wieder $\|x_n\|_\infty = 1/n$ und

$$\frac{x_n(t_0+t_n) - x_n(t_0)}{|t_n| + \|x_n\|_\infty} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$