Musterlösungen zur 6. Serie

1. Aufgabe (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Koordinatenebenen mit der Tangente an die Schraubenkurve

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = x, \quad x > 0 \tag{1}$$

im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$.

(ii) Geben Sie die Anstiege der Tangenten an die Archimedische Spirale

$$y_1 = x \cos x, y_2 = x \sin x, \quad x > 0$$

in den Schnittpunkten dieser Spirale mit dem Strahl $y_1 = y_2 > 0$ an. Zeigen Sie, dass diese Anstiege immer größer werden, je größer der Abstand des entsprechenden Schnittpunktes vom Koordinatenursprung wird, und dass die Anstiege konvergieren (gegen welchen Grenzwert?), wenn der Abstand gegen Unendlich strebt.

Lösung für (i) In der Parametrisierung (1) der Schraubenkurve entspricht der Parameter $x = \pi/4$ dem Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$. Also ist eine Gleichung für die Tangente an die Schraubenkurve in diesem Punkt

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pi/4 \end{bmatrix} + \xi \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \\ x \end{bmatrix}_{x=\pi/4} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pi/4 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_1 = 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = 1$, also sind $y_2 = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\xi = 2/\sqrt{2}$ und $y_3 = \pi/4 + \xi = \pi/4 + 1$ die zweite und die dritte Koordinate dieses Schnittunktes.
Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_2 = 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = -1$, also sind $y_1 = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\xi = 2/\sqrt{2}$ und $y_3 = \pi/4 + \xi = \pi/4 - 1$ die erste und die dritte Koordinate dieses Schnittunktes.
Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_3 = 0$ schließlich ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} + \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = -\pi/4$, also sind $y_1 = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\xi = 1/\sqrt{2}(1 + \pi/4)$ und $y_2 = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\xi = 1/\sqrt{2}(1 - \pi/4)$ die erste und die zweite Koordinate dieses Schnittunktes.

Lösung für (ii) (i) Die Schnittpunkte der Archimedischen Spirale mit dem Strahl $y_1 = y_2 > 0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$y_1 = x\cos x = y_2 = x\sin x > 0,$$

also $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ mit $n = 0, 1, \ldots$. Die Tangenten an die Archimedische Spirale in diesen Schnittpunkten sind

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x\cos x \\ x\sin x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} + \xi\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} x\cos x \\ x\sin x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi/2+4\pi n}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \xi\begin{bmatrix} \cos x - x\sin x \\ \sin x + x\cos x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi/2+4\pi n}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \xi\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} + \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die Anstiege dieser Tangenten sind

$$a_n := \frac{1/\sqrt{2} + \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}}}{1/\sqrt{2} - \frac{\pi/2+4\pi n}{\sqrt{2}}} = \frac{1 + \pi/2 + 4\pi n}{1 - \pi/2 - 4\pi n}.$$

(ii) Für alle $n = 0, 1, \ldots$ gilt $a_n < a_{n+1}$, weil gilt

$$(1 + \pi/2 + 4\pi n)\,(1 - \pi/2 - 4\pi(n+1)) < (1 + \pi/2 + 4\pi(n+1))\,(1 - \pi/2 - 4\pi n)\,.$$

Das wiederum gilt, weil gilt

$$-4\pi\,(1 + \pi/2 + 4\pi n) < 4\pi\,(1 - \pi/2 - 4\pi n)\,.$$

Ferner ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$

2. Aufgabe (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls solche Schnittpunkte existieren) der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt $(2, 2, 4)$ an die Sattelfläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = xy, \; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Geben Sie Gleichungen für die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

Lösung Es sei $f(x,y) := xy$. Dann gilt $\partial_x f(x,y) = y$ und $\partial_y f(x,y) = x$. Daher ist die Tangentialebene an M in einem Punkt $(x_0, y_0, x_0 y_0) \in M$ gegeben durch die Gleichung

$$z - x_0 y_0 = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0).$$

Die Tangentialebene am M im Punkt $(2,2,4)$ (d.h. $x_0 = y_0 = 2$) ist also durch die Gleichung $z - 4 = 2(x-2) + 2(y-2)$, d.h. durch

$$z = 2x + 2y - 4$$

gegeben. Die Schnittpunkte dieser Tangentialebene mit der x-Achse bzw. y-Achse bzw. z-Achse sind bestimmt durch $0 = 2x - 4$, d.h. $x = 2$ bzw. durch $0 = 2y - 4$, d.h. $y = 2$ bzw. durch $z = -4$.

Die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den Ebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$ bzw. $z = 0$ werden also beschrieben durch $z = 2y-4$ bzw. $z = 2x-4$ bzw. $0 = 2x+2y-4$, d.h. $y = 2-x$.

3. Aufgabe Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt an das hyperbolische Paraboloid

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2, \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge M in genau zwei Geraden schneidet.

Lösung Es sei $f(x,y) := x^2 - y^2$. Dann gilt $\partial_x f(x,y) = 2x$ und $\partial_y f(x,y) = -2y$. Daher ist die Tangentialebene an M in einem Punkt $(x_0, y_0, x_0^2 - y_0^2) \in M$ gegeben durch die Gleichung

$$z - x_0^2 + y_0^2 = 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0).$$

Die Schnittmenge dieser Tangentialebene mit M wird also beschrieben durch das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} z &=& x^2 - y^2, \\ z &=& x_0^2 - y_0^2 + 2x_0(x - x_0) - 2y_0(y - y_0). \end{array}\right\} \tag{2}$$

Wenn man die beiden rechten Seiten dieses Gleichungssystems gleichsetzt, erhält man

$$(x - x_0)^2 = (y - y_0)^2,$$

d.h. $y = y_0 \pm (x - x_0)$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt

$$z = x^2 - (y_0 \pm (x - x_0))^2 = \pm x(y_0 \mp x_0) - (y_0 \mp x_0)^2.$$

Also ist das Gleichungssystem (2) äquivalent zu

$$\left.\begin{array}{rcl} z &=& x(y_0 - x_0) - (y_0 - x_0)^2, \\ y &=& x + y_0 - x_0, \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{rcl} z &=& -x(y_0 + x_0) - (y_0 + x_0)^2, \\ y &=& -x + y_0 + x_0. \end{array}\right\}$$

Das sind zwei Geraden, parametrisiert durch $x \in \mathbb{R}$.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es sei $U := \{A \in \mathbb{M}_n : \det A \neq 0\}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$–Matrizen, und $f : U \to \mathbb{M}_n$ sei die sogenannte Invertierungsabbildung:

$$f(A) := A^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist und dass für alle $A \in U$ und $B \in \mathbb{M}_n$ gilt

$$f'(A)B = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Lösung Es seien $A \in U$ und $B \in \mathbb{M}_n$ gegeben mit

$$\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Dann folgt

$$\|BA^{-1}\| \leq \|B\| \, \|A^{-1}\| < 1.$$

Nach dem Satz über die Neumann-Reihe folgt deshalb

$$I + BA^{-1} \in U \text{ und } \left(I + BA^{-1}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-BA^{-1}\right)^j.$$

Daraus folgt $A + B = (I + BA^{-1})\, A \in U$ (weil das Produkt zweier invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist) und

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}\left(I + BA^{-1}\right)^{-1} = A^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(-BA^{-1}\right)^j,$$

also

$$(A+B)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} = A^{-1} \sum_{j=2}^{\infty} \left(-BA^{-1}\right)^j.$$

Zu zeigen bleibt folglich, dass gilt

$$\frac{1}{\|B\|} \left\| A^{-1} \sum_{j=2}^{\infty} \left(-BA^{-1}\right)^j \right\| \xrightarrow{B \to 0} 0.$$

Das folgt aber aus

$$\frac{1}{\|B\|} \left\| A^{-1} \sum_{j=2}^{\infty} \left(-BA^{-1}\right)^j \right\| \leq \frac{1}{\|B\|} \|A^{-1}\| \sum_{j=2}^{\infty} \|B\|^j \|A^{-1}\|^j =$$

$$= \frac{1}{\|B\|} \|A^{-1}\|^3 \|B\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \|B\|^j \|A^{-1}\|^j = \frac{\|A^{-1}\|^3 \|B\|}{1 - \|B\|\|A^{-1}\|} \xrightarrow{B \to 0} 0.$$