Musterlösungen zur 7. Serie

1. Aufgabe (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) := \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 2$$

bijektiv ist und dass die inverse Funktion f^{-1} ebenfalls differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} in den Punkten 2 und 8.
(ii) Für $\lambda \approx 1$ sei $\varphi(\lambda)$ die Nullstelle nahe Eins des Polynoms $x^4 + \lambda x^3 + x^2 + x - 4$. Ist φ nahe Eins monoton wachsend oder monoton fallend?

Lösung für (i) Es gilt

$$f'(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1. \tag{1}$$

Folglich ist f streng monoton wachsend, also injektiv. Ferner gilt

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty \text{ und } \lim_{x \to \infty} = \infty.$$

Wegen des Zwischenwertsatzes ist folglich f surjektiv. Schließlich ist wegen (1) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz über den lokalen Diffeomorphismus ist folglich f^{-1} differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f^{-1}(y)^2 - 2f^{-1}(y) + 2}.$$

Wegen $f^{-1}(2) = 0$ und $f^{-1}(8) = 3$ folgt

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{2} \text{ und } \left(f^{-1}\right)'(8) = \frac{1}{3^2 - 6 + 2} = \frac{1}{5}.$$

Lösung für (ii) Wir setzen

$$f(x, \lambda) := x^4 + \lambda x^3 + x^2 + x - 4.$$

Es gilt $f(1,1) = 0$ und $\partial_x f(0,0) = 10 \neq 0$. Folglich arbeitet der Satz über implizite Funktionen, der u.a. besagt, dass

$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_\lambda f(0,0)}{\partial_x f(1,1)} = -\frac{1}{10} < 0.$$

Folglich ist φ nahe Eins monoton fallend.

2. Aufgabe (i) In welchen Punkten ist die Abbildung

$$f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) := (x^y, y^x)$$

ein lokaler Diffeomorphismus?
(ii) In welchen Punkten ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \; f(r,\varphi,\psi) := (r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\psi)$$

ein lokaler Diffeomorphismus?

Lösung für (i) Es gilt

$$\det f'(x,y) = \det \begin{bmatrix} x^y \ln x & yx^{y-1} \\ xy^{x-1} & y^x \ln y \end{bmatrix} = x^y y^x \left(\ln x \ln y - 1\right).$$

Folglich ist f lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn

$$\ln x \ln y \neq 1, \;\text{ d.h. } x \neq e^{\frac{1}{\ln y}}.$$

Lösung für (ii) Es gilt

$$\det f'(x,y) = \det \begin{bmatrix} x^y \ln x & yx^{y-1} \\ xy^{x-1} & y^x \ln y \end{bmatrix} = x^y y^x \left(\ln x \ln y - 1\right).$$

Folglich ist f lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn

$$\ln x \ln y \neq 1, \;\text{ d.h. } x \neq e^{\frac{1}{\ln y}}.$$

Lösung für (ii) Es gilt

$$\det f'(r,\varphi,\psi) = \det \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{bmatrix} =$$

$$= r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi = \frac{r^2}{2}\sin 2\varphi\cos\psi.$$

Folglich ist f nicht lokaler Diffeomorphismus genau dann, wenn

$$r = 0 \text{ oder } \varphi = \frac{k\pi}{2} \text{ oder } \psi = k\pi + \frac{l\pi}{2} \text{ mit } k,l \in \mathbb{Z}.$$

3. Aufgabe Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Behauptungen:
(i) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, so ist f injektiv.
(ii) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, so ist f injektiv.

Lösung für (i) Die Behauptung ist richtig: Wenn f überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, so gilt $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist f streng monoton, also injektiv.

Lösung für (ii) Die Behauptung ist falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir setzen

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} e^x\cos y \\ e^x\sin y \end{bmatrix}.$$

Dann folgt

$$\det f'(x,y) = \det \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^x \neq 0 \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Folglich ist f überall lokaler Diffeomorphismus, aber f ist nicht injektiv, denn z.B. gilt

$$f(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = f(0, 2\pi).$$

***Aufgabe** Zeigen Sie, dass für jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{M}_n$ die Reihe

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \tag{2}$$

konvergiert und dass die Abbildung $A \in \mathbb{M}_n \mapsto e^A \in \mathbb{M}_n$, die sogenannte Exponentialabbildung für Matrizen, ein lokaler Diffeomorphismus in Null ist.

Lösung Es sei $\|\cdot\|$ eine Operatornorm auf $\mathbb{M}_n$. Weil der Vektorraum $\mathbb{M}_n$ endlichdimensional ist, ist er vollständig bzgl $\|\cdot\|$. Wir können also das Cauchy-Kriterium anwenden, um die Konvergenz der Reihe (2) zu überprüfen. Der Reihenrest kann abgeschätzt werden durch den Reihenrest der skalaren Exponentialfunktion:

$$\left\| \sum_{j=n}^{n+m} \frac{A^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=n}^{n+m} \frac{\|A\|^j}{j!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also die Reihe konvergiert. Wir zeigen nun dass die Abbildung

$$f : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n : \; f(A) := e^A$$

differenzierbar ist, und dass gilt

$$f'(A)B = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(A^{j-1}B + A^{j-2}BA + A^{j-3}BA^2 + \ldots + BA^{j-1} \right) \text{ für alle } A, B \in \mathbb{M}_n. \tag{3}$$

Zunächst zeigen wir, dass die Reihe in (3) konvergiert:

$$\left\| \sum_{j=n}^{n+m} \frac{1}{j!} \left(A^{j-1}B + A^{j-2}BA + A^{j-3}BA^2 + \ldots + BA^{j-1} \right) \right\| \leq \sum_{j=n}^{n+m} \frac{1}{(j-1)!} \|A\|^{j-1} \|B\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dann betrachten wir das folgende Analogon der binomischen Formel:

$$\begin{aligned} (A+B)^j = \; & A^j + A^{j-1}B + A^{j-2}BA + A^{j-3}BA^2 + \ldots + BA^{j-1} \\ & + \binom{j}{2} \text{ Produkte mit 2 Faktoren } B \text{ und } j-2 \text{ Faktoren } A \\ & + \binom{j}{3} \text{ Produkte mit 3 Faktoren } B \text{ und } j-3 \text{ Faktoren } A \\ & + \ldots + AB^{j-1} + BAB^{j-2} + B^2AB^{j-3} + \ldots + B^{j-1}A + B^j. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}&\|(A+B)^j - A^j - A^j - A^{j-1}B - A^{j-2}BA - A^{j-3}BA^2 - \ldots - BA^{j-1}\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{j} \binom{j}{k} \|A\|^{j-k}\|B\|^k = (\|A\| + \|B\|)^j - \|A\|^j - j\|A\|^{j-1}\|B\|.\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass f differenzierbar ist und dass (3) richtig ist: In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A+B)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(A^{j-1}B + A^{j-2}BA + A^{j-3}BA^2 + \ldots + BA^{j-1}\right) \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\|A\| + \|B\|)^j - \|A\|^j - j\|A\|^{j-1}\|B\| = e^{\|A\|+\|B\|} - e^{\|A\|} - e^{\|A\|}\|B\| \xrightarrow{n\to 0} 0.\end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir, dass f' stetig ist: Aus (3) folgt

$$\begin{aligned}&\|(f'(A_1) - f'(A_2))\, B\| = \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left((A_1 - A_2)^{j-1}B + (A_1 - A_2)^{j-2}B(A_1 - A_2) + \ldots + B(A_1 - A_2)^{j-1}\right) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A_1 - A_2\|^{j-1}\|B\|}{(j-1)!} = e^{\|A_1 - A_2\|}\|B\| \xrightarrow{\|A_1 - A_2\| \to 0} 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } \|B\| = 1.\end{aligned}$$

Aus (3) folgt $f'(0)B = B$ für alle $B \in \mathbb{M}_n$, d.h. dass $f'(0)$ die identische Abbildung in $\mathbb{M}_n$ ist, also bijektiv. Der Satz über den lokalen Diffeomorphismus besagt deshalb, dass f ein lokaler Diffeomorphismus in Null ist.