Musterlösungen zur 8. Serie

1. Aufgabe (i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{((2+\cos\varphi)\cos\psi, (2+\cos\varphi)\sin\psi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi, \psi \in \mathbb{R}\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie eine Basis in $T_{(2,0,1)}M$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2-2z^2 = x+y+z-1 = 0\}$$

eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie eine Basis in $T_{(1,1,-1)}M$.

Lösung für (i) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \ \Phi(\varphi,\psi) := \begin{bmatrix} (2+\cos\varphi)\cos\psi \\ (2+\cos\varphi)\sin\psi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Es sei $(x_0, y_0, z_0) \in M$, also $x_0 = (2+\cos\varphi_0)\cos\psi_0, y_0 = (2+\cos\varphi_0)\sin\psi_0$ und $z_0 = \sin\varphi_0$ mit gewissen $\varphi_0, \psi_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x \approx x_0, y \approx y_0$ und $z \approx z_0$

$(x,y,z) \in M$
genau dann wenn
$x = (2+\cos\varphi)\cos\psi, y = (2+\cos\varphi)\sin\psi, z = \sin\varphi$ mit gewissen $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$
genau dann wenn
$x = (2+\cos\varphi)\cos\psi, y = (2+\cos\varphi)\sin\psi, z = \sin\varphi$ mit gewissen $\varphi \approx \varphi_0, \psi \approx \psi_0$.

Also ist Φ in jeden Punkt von M eine lokale Parametrisierung.
Ferner gilt

$$\Phi'(\varphi,\psi) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -(2+\cos\varphi)\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi & (2+\cos\varphi)\cos\psi \\ \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wenn φ nicht ganzzahliges Vielfaches von π ist, so folgt

$$\det \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\psi & -(2+\cos\varphi)\sin\psi \\ -\sin\varphi\sin\psi & (2+\cos\varphi)\cos\psi \end{bmatrix} = -2\sin\varphi(2+\cos\varphi) \neq 0,$$

also rang $\Phi'(\varphi,\psi) = 2$. Wenn φ ganzzahliges Vielfaches von π ist, so folgt

$$\Phi'(\varphi,\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -(2\pm1)\sin\psi \\ 0 & (2\pm1)\cos\psi \\ \pm1 & 0 \end{bmatrix},$$

also ebenfalls rang $\Phi'(\varphi,\psi)=2$. Also ist M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$, und wegen

$$(2,0,1)=\Phi\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

und (1) folgt

$$T_{(2,0,1)}M=\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\Phi'\left(\frac{\pi}{2},0\right)w:\ w\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0\\0&3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}:\ w_1,w_2\in\mathbb{R}.\right\}$$

Also ist z.B.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\ \text{und}\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

eine Basis in dem dem affinen Unterraum $T_{(2,0,1)}M$ entsprechenden Unterraum.

Lösung für (ii) Wir betrachten die Abbildung

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:\ F(x_1,x_2,x_3):=\begin{bmatrix}x^2+y^2-2z^2\\x+y+z-1\end{bmatrix}.$$

Die Gleichung $F(x_1,x_2,x_3)=0$ bestimmende Gleichung für M in allen Punkten von M. Ferner gilt

$$F'(x_1,x_2,x_3)=\begin{bmatrix}2x_1&2x_2&-4x_3\\1&1&1\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Wenn rang $F'(x_1,x_2,x_3)=0$ wäre, so wäre $x_1=x_2=x_3=0$, also $F(x_1,x_2,x_3)\neq 0$. Also hat $F'(x_1,x_2,x_3)$ maximalen Rang in allen Punkten mit $F(x_1,x_2,x_3)=0$. Folglich ist M eindimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$, und wegen (2) folgt

$$T_{(1,1,-1)}M=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}+v:\ F'(1,1,-1)v=0\right\}=$$
$$=\left\{\begin{bmatrix}1+v_1\\1+v_2\\-1+v_3\end{bmatrix}:\ \begin{bmatrix}2&2&4\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}.$$

Also ist z.B.

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

eine Basis in dem dem affinen Unterraum $T_{(1,1,-1)}M$ entsprechenden Unterraum.

2. Aufgabe Zeigen Sie, dass die Menge

$$M=\{Q\in\mathbb{M}_3:\ \det Q=1\}$$

eine 8-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_3$ ist und dass gilt

$$T_I M = \{I + A : \ A \in \mathbb{M}_3, \ \mathrm{spur} A = 0\}.$$

Dabei ist $I \in \mathbb{M}_3$ die Einheitsmatrix, und spur$A$ ist die Spur der Matrix A, d.h. die Summe der Diagonalelemente von A.

Lösung Wir betrachten die Funktion

$$F : \mathbb{M}_3 \to \mathbb{R} : \ F(Q) := \det Q - 1.$$

Die Gleichung $F(Q) = 0$ lokale bestimmende Gleichung für M in allen $Q \in M$. Weil $\det Q$ polynomial von den Koeffizienten von Q abhängt, ist F stetig differenzierbar, und es gilt

$$F'(Q)A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(F(Q + tA) - F(Q)\right) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left(\det(Q + tA) - \det Q\right).$$

Es sei nun $Q \in M$. Dann ist Q invertierbar, und wir erhalten

$$F'(Q)A = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \big(\det(Q(I + tQ^{-1}A)) - \det Q\big) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \big(\det(I + tQ^{-1}A) - 1\big).$$

Es seien nun q_{jk} bzw. a_{jk} bzw. c_{jk} die Koeffizienten der Matrizen Q^{-1} bzw. A bzw. $Q^{-1}A$, d.h.

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{3} q_{jl} a_{lk}.$$

Dann folgt

$$\det(I + tQ^{-1}A) = \det \begin{bmatrix} 1 + tc_{11} & tc_{12} & tc_{13} \\ tc_{21} & 1 + tc_{22} & tc_{23} \\ tc_{31} & tc_{32} & 1 + tc_{33} \end{bmatrix} = 1 + t(c_{11} + c_{22} + c_{33}) + o(t).$$

Daraus folgt

$$F'(Q)A = \sum_{j=1}^{3} c_{jj} = \sum_{j,l=1}^{3} q_{jl} a_{lj}. \tag{3}$$

Wenn $F'(Q)$ nicht surjektiv wäre, so wäre $\dim f'(Q)\mathbb{M}_3 < 1$ also $\dim f'(Q)\mathbb{M}_3 = 0$, also $F'(Q) = 0$, also $q_{jl} = 0$ für alle $j, l = 1, 2, 3$ (wegen (3)). Das widerspricht aber der Voraussetzung

$$\det\,[q_{jl}]_{j,l=1}^{3} = \det Q^{-1} = 1.$$

Also ist $F'(Q)$ surjektiv für alle $Q \in M$, also ist M Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_3$ der Dimensin

$$\dim \mathbb{M}_3 - \dim \mathbb{R} = 8,$$

und der Tangentialraum an M in der Einheitsmatrix ist (wieder wegen (3))

$$T_I M = \{I + A : \ F'(I)A = 0\} = \{I + A : \ \ \mathrm{spur} A = 0\}.$$

***Aufgabe** Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{Q \in \mathbb{M}_n : \ QQ^T = I\}$$

eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_n$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist und dass gilt

$$T_I M = \{I + A : \ A \in \mathbb{M}_3, A = -A^T\}.$$

Dabei ist wieder $I \in \mathbb{M}_n$ die Einheitsmatrix.

Lösung Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{S}_n := \{A \in \mathbb{M}_n : \ A = A^T\} \text{ bzw. } \mathcal{A}_n := \{A \in \mathbb{M}_n : \ A = -A^T\}$$

die Unterräume der symmetrischen bzw. der antisymmetrischen $n \times n$-Matrizen. Ferner betrachten wir die Abbildung

$$F : \mathbb{M}_n \to \mathcal{S}_n : \ F(Q) := QQ^T - I.$$

Die Gleichung $F(Q) = 0$ lokale bestimmende Gleichung für M in allen $Q \in M$. Weil die Koeffizienten von $F(Q)$ polynomial von den Koeffizienten von Q abhängen, ist F stetig differenzierbar, und nach der Produktregen gilt

$$F'(Q)B = BQ^T + QB^T$$

Daraus folgt

$$F'(Q)B = 0 \text{ genau dann, wenn } BQ^T \in \mathcal{A}_n.$$

Es sei nun $Q \in M$. Dann ist $Q^T = Q^{-1}$, und wir erhalten

$$\ker F'(Q) = \{AQ : \ A \in \mathcal{A}_n\} \tag{4}$$

Das ist ein Unterraum in $\mathbb{M}_n$ der Dimension

$$\dim \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}n(n-1),$$

weil die Abbildung $A \in \mathbb{M}_n \mapsto AQ \in \mathbb{M}_n$ linear und bijektiv (und folglich dimensionserhaltend) ist für jedes $Q \in M$. Nach dem Dimensionssatz folgt für alle $Q \in M$

$$\dim F'(Q)\mathbb{M}_n = \dim \mathbb{M}_n - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1) = \dim \mathcal{S}_n.$$

Also ist $F'(Q)$ surjektiv für alle $Q \in M$, also ist M Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_n$ der Dimensin

$$\dim \mathbb{M}_n - \dim \mathcal{S}_n = \frac{1}{2}n(n-1),$$

und der Tangentialraum an M in der Einheitsmatrix ist wegen (4)

$$T_I M = \{I + A : \ F'(I)A = 0\} = \{I + A : \ A = -A^T\}.$$