Musterlösungen zur 9. Serie

1. Aufgabe (i) Es sei $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^y.$$

Berechnen Sie $f'''(e,3)((2,3),(2,3),(2,3))$.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

Berechnen Sie $f''(1,1)((1,2),(3,4))$.

Lösung für (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_x f(x,y) = yx^{y-1}, \partial_y f(x,y) = x^y \ln x,\\
&\partial_x^2 f(x,y) = y(y-1)x^{y-2}, \partial_y\partial_x f(x,y) = yx^{y-1}\ln x, \partial_y^2 f(x,y) = x^y(\ln x)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\partial_x^3 f(x,y) = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \partial_y\partial_x^2 f(x,y) = y(y-1)x^{y-2}\ln x,\\
&\partial_y^2\partial_x f(x,y) = yx^{y-1}(\ln x)^2, \partial_y^3 f(x,y) = x^y(\ln x)^3.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$f'''(e,3)((1,2),(1,2),(1,2)) = \sum_{j=0}^{3} \binom{3}{j} \partial_x^j \partial_y^{3-j} f(e,3)\, 1^j\, 2^{3-j} = 8e^3 + 36e^2 + 36e + 6.$$

Lösung für (ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\partial_x f_1(x,y) = y, \partial_y f_1(x,y) = x,\\
&\partial_x^2 f_1(x,y) = \partial_y^2 f_1(x,y) = 0, \partial_y\partial_x f_1(x,y) = 1,\\
&\partial_x f_2(x,y) = \frac{1}{y}, \partial_y f_2(x,y) = -\frac{x}{y^2},\\
&\partial_x^2 f_2(x,y) = 0, \partial_y\partial_x f_1(x,y) = -\frac{1}{y^2}, \partial_y^2 f_2(x,y) = \frac{2}{y^3}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$f_1''(1,1)((1,2),(3,4)) = \partial_x^2 f_1(1,1)\cdot 1\cdot 3 + \partial_y^2 f_1(1,1)\cdot 2\cdot 4 + \partial_y\partial_x f_1(1,1)(1\cdot 4 + 2\cdot 3) = 10$$

und analog

$$f_2''(1,1)((1,2),(3,4)) = -1(1\cdot 4 + 2\cdot 3) + 2\cdot 2\cdot 4 = 6,$$

also
$$f''(1,1)((1,2),(3,4)) = (10,6).$$

2. Aufgabe Besitzt das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch
$$v(x,y,z) := (e^y \sin z, xe^y \sin z + z, xe^y \cos z + y + 2z),$$
ein Potential? Wenn ja, so berechnen Sie ein solches Potential.

Lösung Es gilt
$$\begin{aligned}
\partial_y(e^y \sin z) &= \partial_x(xe^y \sin z + z) = e^y \sin z,\\
\partial_z(e^y \sin z) &= \partial_x(e^y \cos z + y + 2z) = e^y \cos z,\\
\partial_z(xe^y \sin z + z) &= \partial_y(e^y \cos z + y + 2z) = e^y \cos z + 1.
\end{aligned}$$
Also besitzt v ein Potential φ. Wir berechnen ein solches durch
$$\partial_x\varphi(x,y,z) = e^y \sin z, \text{ also } \varphi(x,y,z) = xe^y \sin z + \psi(y,z).$$
Daraus folgt
$$xe^y \sin z + z = \partial_y\varphi(x,y,z) = \partial_y(xe^y \sin z + \psi(y,z)) = xe^y \sin z + \partial_y\psi(y,z),$$
also
$$\psi(y,z) = yz + \theta(z).$$
Daraus folgt schließlich
$$xe^y \cos z + y + 2z = \partial_z\varphi(x,y,z) = \partial_z(xe^y \sin z + yz + \theta(z)) = xe^y \cos z + y + \theta'(z)$$
also z.B.
$$\theta(z) = z^2,$$
also
$$\varphi(x,y,z) = xe^y \sin z + yz + z^2.$$

3. Aufgabe Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y,z) := e^x \sin y \cos z.$$
Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,0,0)$.

Lösung Es gilt
$$\begin{aligned}
&\partial_x f(x,y,z) = e^x \sin y \cos z, \partial_y f(x,y,z) = e^x \cos y \cos z, \partial_z f(x,y,z) = -e^x \sin y \sin z,\\
&\partial_x^2 f(x,y,z) = e^x \sin y \cos z, \partial_y\partial_x f(x,y,z) = e^x \cos y \cos z, \partial_z\partial_x f(x,y,z) = -e^x \sin y \sin z,\\
&\partial_y^2 f(x,y,z) = -e^x \sin y \cos z, \partial_z\partial_y f(x,y,z) = -e^x \cos y \sin z, \partial_z^2 f(x,y,z) = -e^x \sin y \cos z.
\end{aligned}$$

Folglich ist das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,0,0)$ gleich

$$\sum_{j=0}^{2}(x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z)^j f(0,0,0) = y + 2xy.$$

***Aufgabe** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := e^x \sin y \cos z,$$

und P_2 sei das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,0,0)$. Geben Sie ein (möglichst großes) $r > 0$ an mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x,y,z) - P_2(x,y,z)| \le 10^{-5} \text{ für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x^2+y^2+z^2 \le r^2. \tag{1}$$

Lösung Es gilt

$$f(x,y,z) - P_2(x,y,z) = \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2!} f'''(sx,sy,sz)((x,y,z),(x,y,z),(x,y,z)),$$

also

$$|f(x,y,z) - P_2(x,y,z)| \le \frac{1}{6} \max_{0\le s\le 1} \int_0^1 |f'''(sx,sy,sz)((x,y,z),(x,y,z),(x,y,z))|.$$

Ferner ist

$$f'''(sx,sy,sz)((x,y,z),(x,y,z),(x,y,z)) = \sum_{j+k+l=3} \partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(sx,sy,sz) x^j y^k z^l, \tag{2}$$

und $\partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(sx,sy,sz) x^j y^k z^l$ ist entweder gleich $e^{sx} x \sin sy \cos sz$ oder gleich $e^{sx} x \cos sy \cos sz$ oder gleich $e^{sx} x \sin sy \sin sz$, also

$$|\partial_x^j \partial_y^k \partial_z^l f(sx,sy,sz) x^j y^k z^l| \le 1 \text{ für } 0 \le s \le 1.$$

Weil die Summe in (2) 27 Summanden enthält, folgt

$$|f'''(sx,sy,sz)((x,y,z),(x,y,z),(x,y,z))| \le 27r^3 \text{ falls } x^2+y^2+z^2 \le r^2,$$

also

$$|f(x,y,z) - P_2(x,y,z)| \le \frac{9}{2} r^3.$$

Eine hinreichende Bedingung an r für (1) ist also

$$r \le \sqrt{\frac{9}{2} 10^{-5}}.$$