Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 1: Metriken, Normen und Konvergenz
Abgabetermin: 27.4.

1. Aufgabe (4 Punkte) Die Menge X bestehe aus allen nichtnegativen reellen Zahlen und dem Symbol ∞. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\rho : X \times X \to [0, \infty[$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned}
&\rho(x, y) := \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \text{ für } x, y \in [0, \infty[,\\
&\rho(x, \infty) = \rho(\infty, x) := 1 - \frac{x}{1+x} \text{ für } x \in [0, \infty[,\\
&\rho(\infty, \infty) := 0,
\end{aligned}$$

eine Metrik auf X ist. Konvergiert die Folge $1, 2, 3, \ldots$ bzgl. dieser Metrik?

2. Aufgabe (6 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ Normen sind:

(a) $X = \mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2)\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$,

(b) $X = \mathbb{R}^3$, $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + 3|x_3|^2}$,

(c) $X = \{x \in C([0, 1]) : x \text{ ist stetig differenzierbar und } x(0) = 0\}$, $\|x\| = \max_{0 \le t \le 1} |x'(t)|$.

3. Aufgabe (10 Punkte) (i) Überprüfen Sie, ob die unten definierten Funktionenfolgen $x_1, x_2, \ldots \in C([0, 1])$ punktweise konvergieren und/oder bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergieren und/oder bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ konvergieren:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad x_n(t) = \sqrt{n} \sin nt,\\
&\text{(b)} \quad x_n(t) = \sqrt{n} \sin \frac{t}{n},\\
&\text{(c)} \quad x_n(t) = t^n \sin \frac{1}{n},\\
&\text{(d)} \quad x_n(t) = t^n - t.
\end{aligned}$$

(ii) Konstruieren Sie eine solche Funktionenfolge, die punktweise, aber nicht bzgl. $\|\cdot\|_1$ konvergiert.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden beiden Behauptungen:

(i) Wenn ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in X existiert mit

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ für alle } x \in X, \tag{1}$$

so gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \text{ für alle } x, y \in X. \tag{2}$$

(ii) Wenn (2) gilt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in X mit (1), nämlich

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$