Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 10: Lokale Extrema
Abgabetermin: 29.6.

1. Aufgabe (9 Punkte) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: & f(x,y) := 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \\ \text{(b)} & f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: & f(x,y) := 3x^2y - x^3 - y^4, \\ \text{(c)} & f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: & f(x,y,z) := 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2. \end{array}$$

Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

2. Aufgabe (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$\left.\begin{array}{l} f:]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}: \\ f(x,y) := 2x + 3y - \ln(xy) \end{array}\right\}$$

einen größten oder einen kleinsten Funktionswert besitzt, und berechnen Sie gegebenenfalls diese extremen Funktionswerte sowie die Punkte, in denen sie angenommen werden.

3. Aufgabe (4 Punkte) Auf der Sphäre $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ seien im Punkt $x_1 = (1,0,0)$ die Masse $m_1 = 1$, im Punkt $x_2 = (0,1,0)$ die Masse $m_2 = 2$ und im Punkt $x_3 = (0,0,1)$ die Masse $m_3 = 3$ konzentriert. Wie muß man den Punkt $x \in S$ wählen, damit das Trägheitsmoment

$$\sum_{j=1}^{3} m_j \|x - x_j\|^2$$

des Massepunkte-Systems x_1, x_2, x_3 bzgl. x minimal wird?

4. Aufgabe (3 Punkte) Finden Sie auf dem Ellipsoid

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8\}$$

Punkte, deren Abstände von dem Punkt $(0,0,3)$ minimal bzw. maximal sind. Wie groß sind diese extremalen Abstände?

***Aufgabe (10 Punkte)** Besitzt die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz,$$

bzgl. der Nebenbedingung $2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17$ im Punkt $(1,1,1)$ ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beiden?