Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 2: Der Banachsche Fixpunktsatz. Vollständigkeit
Abgabetermin: 4.5.

1. Aufgabe (8 Punkte) (i) Beweisen Sie, dass für die Funktion

$$f : [0, \infty[\to [0, \infty[, \quad f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1}$$

ein $c \in [0, 1[$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y| \text{ für alle } x, y \in [0, \infty[. \tag{1}$$

(ii) Berechnen Sie den Fixpunkt von f.
(iii) Berechnen Sie (mit dem Taschenrechner) die ersten fünf Glieder der Approximationsfolgen $x_{j+1} = f(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots$ des Banachschen Fixpunktsatzes für die Startwerte $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ und $x_0 = 100$.
(iv) Vergleichen Sie jeweils den Abstand der Approximation x_5 vom Fixpunkt mit seiner a-priori-Abschätzung $\frac{c^5}{1-c}|x_1 - x_0|$ und seiner a-posteriori-Abschätzung $\frac{c}{1-c}|x_5 - x_4|$.Wählen Sie dafür eine möglichst kleine Kontraktionskonstante c in (1).

2. Aufgabe (6 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ strikt kontraktiv bzgl. der jeweils angegebenen Norm sind:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \|\cdot\|_2,\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\sin x_1, \cos x_2),\\
&\text{(b)} \qquad \|\cdot\|_2,\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2),\\
&\text{(c)} \qquad \|\cdot\|_\infty,\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, x_2).
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (6 Punkte) Die Abbildung $f : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ sei definiert durch

$$[f(x)](t) := 1 + \int_0^t x(s)ds \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

und die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots \in C([0, 1])$ sei induktiv definiert durch $x_0(t) := 1$ für alle $t \in [0, 1]$ und $x_{j+1} := f(x_j)$ für alle $j = 0, 1, 2, \ldots$. Konvergiert die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$? Wenn ja, was ist der Grenzwert, und ist der Grenzwert ein Fixpunkt von f?

***Aufgabe (10 Punkte)** Beweisen Sie, dass der Vektorraum $C([0, 1])$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_1$ nicht vollständig ist.