Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 3: Offene und abgeschlossene Mengen
Abgabetermin: 11.5.

1. Aufgabe (6 Punkte) Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass in jedem metrischen Raum (X, ρ) und für alle Mengen $A, B \subseteq X$ gilt:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \setminus B} = \overline{A} \setminus \overset{o}{B}\ .$$

2. Aufgabe (8 Punkte) Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass in jedem metrischen Raum (X, ρ), für alle $x_0 \in X$ und für alle $r > 0$ gilt:
(i) Die Menge
$$\{x \in X :\ \rho(x, x_0) < r\} \tag{1}$$
ist offen.
(ii) Die Menge
$$\{x \in X :\ \rho(x, x_0) \leq r\} \tag{2}$$
ist abgeschlossen.
(iii) Die Menge (2) ist die Abschließung der Menge (1).
(iv) Wenn X ein Vektorraum ist und ρ durch eine Norm auf X erzeugt ist, so ist die Menge (2) die Abschließung der Menge (1).

3. Aufgabe (6 Punkte) (i) Zeigen Sie, dass keine nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit $A \neq \mathbb{R}$ existiert, die offen und abgeschlossen ist.

(ii) Geben Sie einen metrischen Raum (X, ρ) und eine nichtleere Menge $A \subset X$ mit $A \neq X$ an so dass A offen und abgeschlossen ist.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es seien x und y zwei reelle Zahlen ungleich Null, x sei rational, und y sei irrational. Zeigen Sie, dass dann die Abschließung der Menge $\{kx + ly :\ k, l \in \mathbb{Z}\}$ ganz $\mathbb{R}$ ist.