Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 4: Konvergenz von Abbildungen. Stetigkeit
Abgabetermin: 18.5.

1. Aufgabe (8 Punkte) Überprüfen Sie, ob für die unten angegebenen Funktionen $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ und/oder } \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \text{ und/oder } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

(a) $f(x,y) = x \sin 2^y$,

(b) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{xy}$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$,

(d) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$.

2. Aufgabe (12 Punkte) Es seien (X,ρ) und (Y,σ) zwei metrische Räume. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel), dass für alle Abbildungen $f : X \to Y$ die folgenden Behauptungen gelten:

(a) Wenn f stetig ist, so ist $f(M)$ offen für alle offenen Mengen $M \subseteq X$.

(b) Wenn f stetig ist, so ist $f(M)$ abgeschlossen für alle abgeschlossenen Mengen $M \subseteq X$.

(c) Wenn f stetig ist, so ist $f^{-1}(N)$ offen für alle offenen Mengen $N \subseteq Y$.

(d) Wenn $f^{-1}(N)$ offen ist für alle offenen Mengen $N \subseteq Y$, so ist f stetig.

(e) Wenn f stetig ist, so gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ für alle Mengen $M \subseteq X$.

(f) Wenn $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$ für alle Mengen $M \subseteq X$ gilt, so ist f stetig.

Dabei sind $f(M) := \{f(x) \in Y : x \in M\}$ bzw. $f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$ die Bildmenge bzw. die Urbildmenge von M bzw. N bzgl. f, und $f(\overline{M})$ ist analog definiert.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Behauptungen:

(a) Die inverse Funktion f^{-1} ist ebenfalls stetig.

(b) Wenn X ein Intervall ist, so ist die inverse Funktion f^{-1} ebenfalls stetig.