Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 5: Differenzierbarkeit und Ableitungen
Abgabetermin: 25.5.

1. Aufgabe (8 Punkte) Überprüfen Sie, of die folgenden linearen Abbildungen $A : X \to \mathbb{R}$ stetig sind:

(a) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_1,\ Ax = x(1)$,

(b) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_\infty,\ Ax = x(1)$,

(c) $X = C([0,1])$ mit $\|\cdot\|_2,\ Ax = \int_0^1 x(t)dt$,

(d) $X = \{x \in C([0,1]) : x \text{ ist Polynom}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty,\ Ax = x'(1)$.

2. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $f :]0,\infty[^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}, x^y\right)$$

in den Punkten $(1,1)$, $(1,2)$ und $(2,2)$.

3. Aufgabe (6 Punkte) Wieviele verschiedene differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \text{ für alle } x,y \in \mathbb{R} \text{ und } f(0,0) = 0$$

existieren?

***Aufgabe (10 Punkte)** Wir betrachten den Vektorraum $X = \mathbb{R} \times C([0,1])$ mit der Norm $\|(t,x)\| := |t| + \|x\|_\infty$, die in X offene Menge $U =]0,1[\times C([0,1])$ und die sogenannte Wertzuweisungsabbildung

$$f : U \to \mathbb{R} : \ f(t,x) := x(t).$$

(i) In welchen Punkten $(t,x) \in U$ ist f stetig?
(ii) In welchen Punkten $(t,x) \in U$ ist f differenzierbar?