Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 6: Geometrische Anwendungen
Abgabetermin: 1.6.

1. Aufgabe (10 Punkte) (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls solche Schnittpunkte existieren) der drei Koordinatenebenen mit der Tangente an die Schraubenkurve

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = x, \quad x > 0$$

im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$.

(ii) Geben Sie die Anstiege der Tangenten an die Archimedische Spirale

$$y_1 = x \cos x, y_2 = x \sin x, \quad x > 0$$

in den Schnittpunkten dieser Spirale mit dem Strahl $y_1 = y_2 > 0$ an. Zeigen Sie, dass diese Anstiege immer größer werden, je größer der Abstand des entsprechenden Schnittpunktes vom Koordinatenursprung wird, und dass die Anstiege konvergieren (gegen welchen Grenzwert?), wenn der Abstand gegen Unendlich strebt.

2. Aufgabe (5 Punkte) (i) Bestimmen Sie die Schnittpunkte (falls solche Schnittpunkte existieren) der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt $(2, 2, 4)$ an die Sattelfläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = xy, \ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Geben Sie Gleichungen für die Schnittgeraden (falls solche Schnittgeraden existieren) dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

3. Aufgabe (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Tangentialebene in einem beliebigen Punkt an das hyperbolische Paraboloid

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2, \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

die Menge M in genau zwei Geraden schneidet.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es sei $U := \{A \in \mathbb{M}_n : \ \det A \neq 0\}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$–Matrizen, und $f : U \to \mathbb{M}_n$ sei die sogenannte Invertierungsabbildung:

$$f(A) := A^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass f überall differenzierbar ist und dass für alle $A \in U$ und $B \in \mathbb{M}_n$ gilt

$$f'(A)B = -A^{-1}BA^{-1}.$$