Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 7: Implizite Funktionen und lokale Diffeomorphismen
Abgabetermin: 8.6.

1. Aufgabe (6 Punkte) (i) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) := \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 2$$

bijektiv ist und dass die inverse Funktion f^{-1} ebenfalls differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} in den Punkten 2 und 8.
(ii) Für $\lambda \approx 1$ sei $\varphi(\lambda)$ die Nullstelle nahe Eins des Polynoms $x^4 + \lambda x^3 + x^2 + x - 4$. Ist φ nahe Eins monoton wachsend oder monoton fallend?

2. Aufgabe (6 Punkte) (i) In welchen Punkten ist die Abbildung

$$f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) := (x^y, y^x)$$

ein lokaler Diffeomorphismus?
(ii) In welchen Punkten ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ f(r, \varphi, \psi) := (r \sin\varphi \cos\psi, r \sin\varphi \sin\psi, r \cos\psi)$$

ein lokaler Diffeomorphismus?

3. Aufgabe Beweisen Sie oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel) die folgenden Behauptungen:
(i) Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, so ist f injektiv. **(2 Punkte)**
(ii) Wenn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ überall ein lokaler Diffeomorphismus ist, so ist f injektiv. **(6 Punkte)**

***Aufgabe (10 Punkte)** Zeigen Sie, dass für jede Matrix $A \in \mathbb{M}_n$ die Reihe

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$$

konvergiert und dass die Abbildung $A \in \mathbb{M}_n \mapsto e^A \in \mathbb{M}_n$, die sogenannte Exponentialabbildung für Matrizen, ein lokaler Diffeomorphismus in Null ist.