Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 8: Untermannigfaltigkeiten
Abgabetermin: 15.6.

1. Aufgabe (12 Punkte) (i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{((2+\cos\varphi)\cos\psi, (2+\cos\varphi)\sin\psi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi, \psi \in \mathbb{R}\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie eine Basis in $T_{(2,0,1)}M$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 - 2z^2 = x + y + z - 1 = 0\}$$

eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie eine Basis in $T_{(1,1,-1)}M$.

2. Aufgabe (8 Punkte) Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{Q \in \mathbb{M}_3 : \ \det Q = 1\}$$

eine 8-dimensionale Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_3$ ist und dass gilt

$$T_I M = \{I + A : \ A \in \mathbb{M}_3, \ \mathrm{spur} A = 0\}.$$

Dabei ist $I \in \mathbb{M}_3$ die Einheitsmatrix, und $\mathrm{spur} A$ ist die Spur der Matrix A, d.h. die Summe der Diagonalelemente von A.

***Aufgabe (10 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{Q \in \mathbb{M}_n : \ QQ^T = I\}$$

eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{M}_n$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist und dass gilt

$$T_I M = \{I + A : \ A \in \mathbb{M}_3, A = -A^T\}.$$

Dabei ist wieder $I \in \mathbb{M}_n$ die Einheitsmatrix.