Übungsaufgaben Analysis II*

Serie 9: Höhere Ableitungen
Abgabetermin: 22.6.

1. Aufgabe (8 Punkte) (i) Es sei $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := x^y.$$

Berechnen Sie $f'''(e,3)((1,2),(1,2),(1,2))$.
(ii) Es sei $f : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \left(xy, \frac{x}{y}\right)$$

Berechnen Sie $f''(1,1)((1,2),(3,4))$.

2. Aufgabe (6 Punkte) Besitzt das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, das definiert ist durch

$$v(x,y,z) := (e^y \sin z, xe^y \sin z + z, xe^y \cos z + y + 2z),$$

ein Potential? Wenn ja, so berechnen Sie ein solches Potential.

3. Aufgabe (6 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := e^x \sin y \cos z.$$

Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,0,0)$.

***Aufgabe (10 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := e^x \sin y \cos z,$$

und P_2 sei das Taylor-Polynom zweiten Grades von f im Punkt $(0,0,0)$. Geben Sie ein (möglichst großes) $r > 0$ an mit der Eigenschaft, dass

$$|f(x,y,z) - P_2(x,y,z)| \leq 10^{-5} \text{ für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x^2+y^2+z^2 \leq r^2.$$