

# Analysis II für Physikstudiengänge

Ein Kompendium zur Vorlesung im Sommersemester 2015 von L. Recke

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mehrdimensionale Konvergenz und Stetigkeit</b>	<b>3</b>
2.1	Normen . . . . .	3
2.2	Konvergenz von Folgen und Reihen . . . . .	5
2.3	Konvergenz von Abbildungen . . . . .	8
2.4	Iterierte Grenzwerte und Vertauschung von Grenzwerten . . . . .	10
2.5	Stetige Abbildungen . . . . .	12
2.6	Offene Mengen, abgeschlossene Mengen und Rand . . . . .	14
2.7	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Mehrdimensionale Differentialrechnung</b>	<b>17</b>
3.1	Differenzierbarkeit und Ableitung . . . . .	18
3.2	Rechenregeln . . . . .	21
3.3	Interpretationen der Ableitungen . . . . .	24
3.4	Die zentralen Sätze . . . . .	25
3.5	Untermannigfaltigkeiten (Flächen im Raum) . . . . .	27
3.6	Höhere Ableitungen . . . . .	31
3.7	Taylor-Formel . . . . .	34
3.8	Lokale Extrema mit und ohne Nebenbedingungen . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Mehrdimensionale Integralrechnung</b>	<b>36</b>
4.1	Integrierbarkeit und Integral . . . . .	36
4.2	Integrierbarkeits-Kriterien . . . . .	38
4.3	Rechenregeln . . . . .	39
4.4	Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini . . . . .	39
4.5	Transformationsformel . . . . .	40

4.6	Uneigentliche mehrdimensionale Integrale . . . . .	41
4.7	Kurvenintegrale. Gradientenfelder und ihre Potentiale . . . . .	42
4.8	Flächenintegrale . . . . .	46
4.9	Satz von Stokes . . . . .	50
4.10	Satz von Gauß . . . . .	52

## 1 Einleitung

In mathematischen Vorlesungen, die “Analysis I” heißen, wird üblicherweise die sogenannte Differential- und Integralrechnung für Funktionen, die Zahlen auf Zahlen abbilden, behandelt. Analog wird dann in “Analysis II” die sogenannte Differential- und Integralrechnung für Funktionen, die Vektoren auf Vektoren abbilden, behandelt. So wird es auch in unserer Vorlesung sein.

Funktionen, die Zahlen auf Zahlen abbilden, sind ein Spezialfall von Funktionen, die Vektoren auf Vektoren abbilden. Folglich könnte man fragen, warum diesem Spezialfall in Analysis I ebenso viel Raum und Zeit eingeräumt wird wie dem allgemeinen Fall in Analysis II, und ob Analysis II mehr oder weniger nur eine Wiederholung von Analysis I ist. Dazu gibt es verschiedene Antworten:

Erstens haben Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine sehr anschauliche Interpretation, denn ihr Graph ist eine Teilmenge der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Deshalb kann man z.B. die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \tag{1.1}$$

als Anstieg des Graphen im Punkt  $(x, f(x))$  interpretieren. Dagegen ist die Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  in einem Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  eine  $m \times n$ -Matrix, und deren Interpretation ist erheblich schwieriger. Das hat auch Konsequenzen für höhere Ableitungen: Weil die Ableitung einer Funktion von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  wieder eine Funktion von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ist, kann man die zweite Ableitung als erste Ableitung der ersten Ableitung betrachten, also

$$f'' = (f')'. \tag{1.2}$$

Dagegen ist die Ableitung einer Funktion von  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  eine Funktion, die  $\mathbb{R}^n$  in die Menge der  $m \times n$ -Matrizen abbildet, folglich ist zunächst nicht klar, ob (1.2) gilt und wenn, dann in welchem Sinn.

Zweitens stehen beim Rechnen mit Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mehr “Operationen” und mehr “Struktur” zur Verfügung als beim Rechnen mit Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Z.B. wird in (1.1) benutzt, dass Zahlen durch Zahlen dividiert werden dürfen, das ist bei Vektoren nicht der Fall. Beim Rechnen mit Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kann man auch die Ordnung in  $\mathbb{R}$  benutzen, so entstehen z.B. der Mittelwertsatz

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \text{ für mindestens ein } x \in (a, b) \tag{1.3}$$

oder der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \tag{1.4}$$

Eine Aufgabe der Vorlesung Analysis II besteht nun darin, eine Verallgemeinerung der Differential- und Integralrechnung für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf den Fall von Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  zu präsentieren so dass Analoga zu (1.1), (1.3) und (1.4) entstehen, obwohl Vektoren nicht durch Vektoren dividiert werden dürfen und obwohl zwischen Vektoren keine größer-oder-gleich-Ordnung existiert.

Drittens ändern sich viele wichtige und nützliche Formeln aus Analysis I beim Übergang “vom Eindimensionalen zum Mehrdimensionalen” überhaupt nicht, z.B. die Formel der Kettenregel

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

oder die Formel der geometrischen Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = (1-x)^{-1}$$

oder die Taylor-Formel

$$f(x+y) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x+\theta y) y^{k+1} \text{ für mindestens ein } \theta \in (0,1),$$

sie müssen im Mehrdimensionalen nur anders verstanden werden als in Eindimensionalen.

In dieser Vorlesung betrachten wir der Einfachheit halber nur Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Fast alle Aussagen können auf naheliegende Art auf Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{C}$  übertragen werden. Für viele Ergebnisse werden wir voraussetzen, dass die Vektorräume endlichdimensional sind, und eine Übertragung dieser Ergebnisse auf unendlichdimensionale Vektorräume ist dann kompliziert (manchmal sogar unmöglich) und nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

## 2 Mehrdimensionale Konvergenz und Stetigkeit

In diesem Kapitel behandeln wir Konvergenz von Folgen, Reihen und Abbildungen sowie Stetigkeit von Abbildungen in normierten Vektorräumen.

### 2.1 Normen

In diesem Unterkapitel ist  $X$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

Der Begriff “Norm in einem Vektorraum” ist eine Verallgemeinerung der Begriffe “Betrag” in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  bzw. “Euklidischer Abstand” in  $\mathbb{R}^3$ .

Eine Abbildung  $x \in X \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$  heißt Norm in  $X$ , wenn für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left. \begin{array}{l} \text{Definitheit: } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \text{Homogenität: } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ \text{Dreiecksungleichung: } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

Wenn in  $X$  eine Norm fixiert ist, so heißt  $X$ , mit dieser Norm versehen, normierter Vektorraum.

**Weitere Ungleichungen:** Es sei  $\|\cdot\|$  eine Norm in  $X$ , dann gilt für alle  $a, b, c, d \in X$

$$\text{Dreiecksungleichung nach unten: } \|a\| - \|b\| \leq \|a + b\|,$$

$$\text{Vierecksungleichung: } \|a - b\| - \|c - d\| \leq \|a - c\| + \|b - d\|.$$

**Beispiele für Normen in  $\mathbb{R}^n$ :**

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_p &:= \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \text{ für } p \geq 1, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &:= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|. \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $p = 2$  wird die Norm  $\|\cdot\|_2$  **Euklidische Norm** in  $\mathbb{R}^n$  genannt.

**Eine Norm in  $\mathbb{M}(m \times n)$ :**

$$\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \right\| := \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2}$$

Diese Norm wird auch **Frobenius-Norm** oder Hilbert-Schmidt-Norm genannt, und sie erfüllt neben (2.1) auch die sogenannten Sub-Multiplikativitäts-Eigenschaften

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \|x\|_2 \text{ für alle } A \in \mathbb{M}(m \times n), x \in \mathbb{R}^n \quad \|\cdot\|_2 \text{ die Euklidische Norm} \quad (2.2)$$

und

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ für alle } A \in \mathbb{M}(l \times m), B \in \mathbb{M}(m \times n). \quad (2.3)$$

Aus (2.3) folgt

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|} \text{ für alle } A \in \mathbb{M}(n \times n) \text{ mit } \det A \neq 0.$$

**Alle Normen in endlichdimensionalen Vektorräumen sind äquivalent:** Es seien  $\|\cdot\|$  und  $|||\cdot|||$  zwei Normen in  $X$ , und es gelte  $\dim X < \infty$ . Dann existieren  $c, d > 0$  so dass gilt

$$c\|x\| \leq |||x||| \leq d\|x\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

**Durch Skalarprodukte erzeugte Normen:** Eine Abbildung  $(x, y) \in X \times X \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$  heißt Skalarprodukt in  $X$ , wenn für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \text{Definitheit: } &\langle x, x \rangle > 0 \text{ für } x \neq 0, \\ \text{Symmetrie: } &\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \\ \text{Bilinearität: } &\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Dann ist durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm in  $X$  gegeben, und es gilt für alle  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| && \text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung,} \\ \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 && \text{binomische Formel.} \end{aligned}$$

## Euklidisches Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ : Das Skalarprodukt

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

in  $\mathbb{R}^n$  heißt Euklidisches Skalarprodukt, die entsprechende Norm

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

ist die Euklidische Norm.

In dieser Vorlesung behandeln wir die Begriffe **Konvergenz**, **Stetigkeit**, **Differenzierbarkeit** und **Integrierbarkeit** in endlichdimensionalen Vektorräumen. Alle diese Begriffe werden mit Hilfe von Normen definiert, aber wegen der Äquivalenz aller Normen in endlichdimensionalen Vektorräumen hängen alle diese Begriffe (und fast alle sie betreffenden Aussagen) nicht von der Wahl der Norm ab. Deshalb werden wir im weiteren mit  $\|\cdot\|$  stets irgendeine Norm bezeichnen (in welchem Vektorraum diese eine Norm ist, ist dann jeweils aus dem Kontext zu entnehmen).

## 2.2 Konvergenz von Folgen und Reihen

In diesem Unterkapitel ist  $X$  ein normierter Vektorraum.

**Konvergenz von Folgen:** Eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in X$  heißt **konvergent**, wenn ein  $x \in X$  existiert mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j_0 \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq j_0 : \|x_j - x\| \leq \varepsilon. \quad (2.4)$$

Der Vektor  $x$  heißt dann **Grenzwert** der Folge, und man schreibt

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \text{ oder } x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \text{ oder } x_j \rightarrow x \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

**Konvergenz von Reihen:** Zu jeder Folge  $x_1, x_2, \dots \in X$  kann man die Folge

$$s_1 := x_1, s_2 := x_1 + x_2, \dots$$

betrachten. Diese nennt man dann wie im skalaren Fall Reihe mit den Summanden  $x_1, x_2, \dots$  und den Partialsummen  $s_1, s_2, \dots$ , und die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist. Man schreibt dann wie im skalaren Fall

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k x_j,$$

und dieser Vektor heißt dann Grenzwert der Reihe.

**Konvergenz ist koordinatenweise Konvergenz:** Es sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis in  $X$ ,

$$x_j = \sum_{k=1}^n x_{jk} b_k, \quad j = 1, 2, \dots$$

eine Folge von Vektoren aus  $X$  und  $y = \sum_{k=1}^n y_k b_k$  ein Vektor aus  $X$ . Dann gilt:

(i) Die Vektorfolge  $x_1, x_2, \dots$  konvergiert gegen den Vektor  $y$  genau dann, wenn für jedes  $k = 1, \dots, n$  die Zahlenfolge  $(x_{kj})_{j=1}^{\infty}$  gegen die Zahl  $y_k$  konvergiert. In diesem Sinne gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n x_{jk} b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \lim_{j \rightarrow \infty} x_{jk} \right) b_k.$$

(ii) Die Vektorreihe  $\sum x_j$  konvergiert gegen den Vektor  $y$  genau dann, wenn für jedes  $k = 1, \dots, n$  die Zahlenreihe  $\sum x_{jk}$  gegen die Zahl  $y_k$  konvergiert. In diesem Sinne gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n x_{jk} b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^{\infty} x_{jk} \right) b_k.$$

**Konvergenz in  $\mathbb{R}^n$ :** Es sei  $(x_{11}, \dots, x_{n1}), (x_{12}, \dots, x_{n2}), \dots, (x_{1j}, \dots, x_{nj}), \dots$  eine Folge von Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$ , dann gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (x_{1j}, \dots, x_{nj}) = \left( \lim_{j \rightarrow \infty} x_{1j}, \dots, \lim_{j \rightarrow \infty} x_{nj} \right).$$

und

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_{1j}, \dots, x_{nj}) = \left( \sum_{j=1}^{\infty} x_{1j}, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} x_{nj} \right),$$

wobei die Vektorgrenzwerte auf den linken Seiten der Gleichungen genau dann existieren, wenn die Zahlengrenzwerte auf den rechten Seiten der Gleichungen existieren.

**Beispiele:**

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{j}, \sqrt[j]{j} \right) = (0, 1), \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^j}, \frac{1}{j!} \right) = (2, e)$$

**Konvergenz und Linearkombinationen:** Es seien  $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \in X$  konvergente Vektorfolgen und  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathbb{R}$  konvergente Zahlenfolgen. Dann konvergiert auch die Folge  $\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2, \dots$ , und es gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\lambda_j x_j + \mu_j y_j) = \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j \right) \left( \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \right) + \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j \right) \left( \lim_{j \rightarrow \infty} y_j \right).$$

**Konvergenz und Produkte:** Es seien  $x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots \in \mathbb{R}^n$  konvergente Vektorfolgen und  $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots \in \mathbb{M}(n \times n)$  konvergente Matrizenfolgen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} (A_j x_j) &= \left( \lim_{j \rightarrow \infty} A_j \right) \left( \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \right), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} (A_j B_j) &= \left( \lim_{j \rightarrow \infty} A_j \right) \left( \lim_{j \rightarrow \infty} B_j \right), \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \langle x_j, y_j \rangle &= \left\langle \lim_{j \rightarrow \infty} x_j, \lim_{j \rightarrow \infty} y_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Dabei existieren die Grenzwerte auf der linken Seite, wenn alle Grenzwerte auf der jeweiligen rechten Seite existieren.

**Cauchy-Kriterium:** (i) Eine Vektorfolge  $x_1, x_2, \dots \in X$  konvergiert genau dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq j \geq j_0 : \|x_j - x_k\| \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Mit anderen Worten: Es existiert ein  $x \in X$  mit (2.4) genau dann, wenn (2.5) gilt. Der Vorteil der Bedingung (2.5) ist allerdings, dass man man (2.5) verifizieren kann ohne  $x$  zu kennen (was bei (2.4) nicht möglich ist).

(ii) Eine Vektorreihe mit den Summanden  $x_0, x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists j_0 \in \mathbb{N} \forall k \geq j \geq j_0 : \left\| \sum_{l=j}^k x_l \right\| \leq \varepsilon.$$

**Neumann-Reihe:** Es sei  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  gegeben mit  $\|A\| < 1$ . Dann ist die Matrix  $I - A$  umkehrbar, und es gilt

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j. \quad (2.6)$$

Mit anderen Worten: Die Gleichung  $x - Ax = y$  besitzt für jedes  $y \in \mathbb{R}^n$  eine eindeutige Lösung  $x = (I - A)^{-1}y \in \mathbb{R}^n$ , und die Folge  $y, y + Ay, y + Ay + A^2y, \dots$  approximiert diese Lösung. Im Fall  $n = 1$  ist (2.6) die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j \text{ für } |x| < 1.$$

**Exponentialfunktion für Matrizen:** Es sei  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  gegeben. Dann konvergiert die Reihe

$$\exp A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!},$$

und die Abbildung  $A \mapsto \exp A$  wird Exponentialfunktion für Matrizen genannt. Dabei gilt für alle  $A, B \in \mathbb{M}(n \times n)$

$$\begin{aligned} \exp(A + B) &= \exp A \exp B, \text{ falls } AB = BA, \\ \exp(BAB^{-1}) &= B \exp A B^{-1}, \text{ falls } \det B \neq 0, \\ \exp A &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( I + \frac{A}{j} \right)^{1/j}, \\ \det e^A &\neq 0 \text{ und } (e^A)^{-1} = e^{-A}. \end{aligned}$$

**Beispiele:**

$$\exp \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ für alle } a \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \exp \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R}, \\ \exp \begin{bmatrix} 0 & \varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}, \\ \exp \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Das letzte Beispiel kann man folgendermaßen auf den Fall beliebiger Dimension  $n$  verallgemeinern:  $e^A$  ist eine orthogonale Matrix, (d.h.  $(e^A)^T = (e^A)^{-1}$ ) mit  $\det e^A = 1$ , also eine Drehung des Raumes  $\mathbb{R}^n$  um den Nullpunkt, wenn  $A$  eine antisymmetrische Matrix (d.h.  $A^T = -A$ ) ist.

**Beschränkte Folgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß:** (i) Es sei  $x_1, x_2, \dots \in X$  eine Vektorfolge, und es existiere ein  $c > 0$  so dass  $\|x_j\| \leq c$  für alle  $j$  gilt. Dann heißt die Folge beschränkt.

(ii) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(iii) Wenn  $X$  endlichdimensional ist, so besitzt jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge.

## 2.3 Konvergenz von Abbildungen

In Anwendungen treten Abbildungen, deren Urbilder und/oder deren Bilder mehrdimensionale Objekte sind, in verschiedenen Zusammenhängen und unter verschiedenen Bezeichnungen auf, z.B.:

**Skalare Felder:** Eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man auch skalares Feld, z.B. bei  $n = 3$  kann  $P(x_1, x_2, x_3)$  der Druck am Ort  $(x_1, x_2, x_3)$  sein, oder bei  $n = 4$  kann  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  die Temperatur am Ort  $(x_1, x_2, x_3)$  zum Zeitpunkt  $t$  sein.

**Vektorfelder:** Eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nennt man auch Vektorfeld, z.B. bei  $n = 3$  kann  $v(x_1, x_2, x_3)$  die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit am Ort  $(x_1, x_2, x_3)$  sein. Wenn die Geschwindigkeit auch noch von der Zeit abhängt, so bildet  $v$  von  $\mathbb{R}^4$  nach  $\mathbb{R}^3$  ab, dann spricht man von einem zeitabhängigen Vektorfeld. Wenn die Geschwindigkeit an allen Orten zeitunabhängig ist, so spricht man von einem stationären Fluß.

**Tensorfelder:** Eine Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}(k \times l)$  nennt man auch Tensorfeld. Z.B. werden die infinitesimalen Deformationen und die Spannungen in einem elastischen Körper  $M \subset \mathbb{R}^3$  durch Abbildungen  $M \rightarrow \mathbb{M}(3 \times 3)$  beschrieben, das sogenannte Deformationstensorfeld und das sogenannte Spannungstensorfeld.

**Rotationen starrer Körper:** Der zeitliche Ablauf der Bewegung eines starren Körpers (z.B. eines Kreisels), der in einem Punkt fixiert ist, wird durch eine Abbildung  $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(3 \times 3)$  beschrieben, wobei zu jedem Zeitpunkt  $t$  gilt  $Q(t)^T = Q(t)^{-1}$  und  $\det Q(t) = 1$ .

**Wege von Teilchen:** Der zeitliche Ablauf der Bewegung eines Teilchens wird durch eine Abbildung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschrieben.

In diesem Unterkapitel sind  $X$  und  $Y$  normierte Vektorräume,  $M$  ist eine Teilmenge von  $X$  und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung.

**Häufungspunkte von  $M$ :** Ein Element  $x_0 \in X$  heißt Häufungspunkt von  $M$ , wenn für alle  $\delta > 0$  ein  $x \in X$  existiert mit  $0 < \|x - x_0\| < \delta$ , d.h. wenn eine Folge  $x_1, x_2, \dots \in M \setminus \{x_0\}$  existiert mit  $x_j \rightarrow x_0$ .

**Grenzwerte von  $f$ :** Es seien  $x_0$  Häufungspunkt von  $M$ ,  $y_0 \in Y$ , und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : 0 < \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - y_0\| \leq \varepsilon. \quad (2.7)$$

Dann nennt man  $f$  konvergent für  $x$  gegen  $x_0$ ,  $y_0$  heißt Grenzwert von  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$ , und man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y_0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow x_0 \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0.$$

**Bemerkungen zur Terminologie:** (i) Weil  $x_0$  Häufungspunkt von  $M$  ist, ist  $y_0$  durch die Bedingung (2.7) eindeutig bestimmt. Wenn  $x_0$  nicht Häufungspunkt von  $M$  wäre, so würde jedes  $y_0 \in Y$  die Bedingung (2.7) erfüllen.

(ii) Die Bedingung (2.7) hängt nicht davon ab, ob  $f$  in  $x_0$  definiert ist oder nicht (d.h. ob  $x_0 \in M$  oder  $x_0 \notin M$ ), und sie hängt im Fall  $x_0 \in M$  nicht von dem Wert  $f(x_0)$  ab.

**Äquivalenz von  $\varepsilon\delta$ -Sprache und Folgensprache:** Es seien  $x_0$  Häufungspunkt von  $M$  und  $y_0 \in Y$ . Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .

(ii) Für jede Folge  $x_1, x_2, \dots \in M \setminus \{x_0\}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$ .

**Konvergenz ist koordinatenweise Konvergenz:** Es sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis in  $X$ , und es gelte

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) b_k \quad \text{für alle} \quad x \in M. \quad (2.8)$$

Dann heißen die Funktionen  $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  **Koordinatenfunktionen** zu  $f$  bzgl. der Basis  $b_1, \dots, b_n$ . Wenn ferner  $x_0$  Häufungspunkt von  $M$  ist so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{k=1}^n f_k(x) b_k \right) = \sum_{k=1}^n \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) \right) b_k, \quad (2.9)$$

wobei der Grenzwert von  $f$  auf der linken Seite genau dann existiert, wenn die Grenzwerte aller  $f_k$  auf der rechten Seite existieren. Wenn  $X = \mathbb{R}^n$  ist und die Basis gleich der Standardbasis in  $\mathbb{R}^n$  ist, so nimmt (2.9) die folgende Form an:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x), \dots, f_n(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

**Grenzwerte und algebraische Operationen:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $\lambda, \mu : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A : X \rightarrow \mathbb{M}(m \times n)$  und  $B : X \rightarrow \mathbb{M}(n \times l)$  Abbildungen, und  $x_0$  sei ein Häufungspunkt von  $M$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda(x)f(x) + \mu(x)g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) + \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \mu(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (A(x)f(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (A(x)B(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} A(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow x_0} B(x) \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \langle f(x), g(x) \rangle = \left\langle \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right\rangle.$$

Dabei existieren die Grenzwerte auf der linken Seite, wenn alle Grenzwerte auf der jeweiligen rechten Seite existieren.

## 2.4 Iterierte Grenzwerte und Vertauschung von Grenzwerten

In diesem Unterkapitel betrachten wir der Einfachheit halber nur Abbildungen

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Für solche Abbildungen kann man die folgenden Fragen stellen: Existieren der sogenannte allgemeine Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y), \quad (2.10)$$

bzw. die sogenannten iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \quad (2.11)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad (2.12)$$

impliziert die Existenz eines von ihnen die Existenz eines anderen und sind die entsprechenden Grenzwerte dann gleich? Nach Definition existiert der iterierte Grenzwert (2.11) und ist gleich  $z \in \mathbb{R}$ , wenn ein  $r > 0$  und eine Abbildung  $g : (0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  existieren, so dass gilt

$$f(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow 0} g(y) \text{ für alle } y \in (0, r) \quad (2.13)$$

und

$$g(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} z. \quad (2.14)$$

Die Bedingung (2.13) bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \forall y \in (0, r) \exists \delta > 0 \forall x \in (0, \delta) : |f(x, y) - g(y)| \leq \varepsilon, \quad (2.15)$$

und man sagt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, dass für  $x \rightarrow 0$  die Funktionen  $f(x, \cdot)$  auf  $(0, r)$  punktweise gegen die Funktion  $g$  streben. Eine Verstärkung von (2.15) ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in (0, r) \forall x \in (0, \delta) : |f(x, y) - g(y)| \leq \varepsilon. \quad (2.16)$$

Wenn (2.16) erfüllt ist, so sagt man, dass für  $x \rightarrow 0$  die Funktionen  $f(x, \cdot)$  gleichmäßig auf  $(0, r)$  gegen die Funktion  $g$  streben.

**Hinreichende Bedingungen, dass (2.10) nicht existiert:** Der allgemeine Grenzwert (2.10) existiert nicht, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Die beiden iterierten Grenzwerte (2.11) und (2.12) existieren, sind aber ungleich.
- (ii) Es existieren Folgen  $x_j \rightarrow x_0$  und  $y_j \rightarrow y_0$  so dass die Folge  $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$  nicht konvergiert.
- (iii) Es existieren Folgen  $x_j \rightarrow x_0$ ,  $\tilde{x}_j \rightarrow x_0$ ,  $y_j \rightarrow y_0$  und  $\tilde{y}_j \rightarrow y_0$  so dass die Folgen  $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$  und  $f(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), f(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \dots$  konvergieren, aber ungleiche Grenzwerte besitzen.

**Eine hinreichende Bedingung, dass (2.10) existiert:** Wenn (2.14) und (2.16) gilt, so existiert (2.10) und ist gleich  $z_0$ .

**Beispiele:** (i) (2.11) und (2.12) existieren und sind ungleich (und folglich existiert (2.10) nicht):

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

(ii) (2.11) und (2.12) existieren und sind gleich, trotzdem existiert (2.10) nicht:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(iii) (2.10) und (2.11) existieren und sind gleich, trotzdem existiert (2.12) nicht:

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}.$$

(iv) Wir verifizieren die obige hinreichende Bedingung, dass der allgemeine Grenzwert (2.10) existiert und welchen Wert er annimmt, im Beispiel

$$f(x, y) = \frac{1}{x} \sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right) :$$

Nach der l'Hospital-Regel gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \frac{x}{y} \sin y \right) \frac{1}{y} \sin y = \frac{1}{y} \sin y.$$

Also strebt  $\frac{1}{x} \sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right)$  für  $x \rightarrow 0$  punktweise gegen  $\frac{1}{y} \sin y$ . Diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig weil nach der Taylor-Formel gilt

$$\sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right) = \frac{x}{y} \sin y - \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{x}{y} \sin y \right)$$

und folglich

$$\left| \frac{1}{x} \sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right) - \frac{1}{y} \sin y \right| \leq \frac{x}{2} \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2 \leq \frac{x}{2}.$$

Wegen  $\frac{1}{y} \sin y \rightarrow 1$  für  $y \rightarrow 0$  folgt also

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} \sin \left( \frac{x}{y} \sin y \right) = 1.$$

**Andere Erscheinungsformen des Grenzwertvertauschungsproblems:** Die Frage, ob man zwei Grenzwerte vertauschen darf, tritt an verschiedenen Stellen auf, und eine positive Antwort auf diese Frage kann komplizierte Rechnungen wesentlich vereinfachen. Z.B. ist das Differenzieren und (eigentliche oder uneigentliche) Integrieren einer Funktionenreihe oft schwieriger als das Differenzieren und Integrieren der einzelnen Summanden der Funktionenreihe, d.h. wenn

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} f'_j(x) \quad (2.17)$$

oder

$$\int_a^b \left( \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) \right) dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_a^b f_j(x) dx \right) \quad (2.18)$$

richtig ist, so ist die rechte Seite oft leichter zu berechnen als die linke. Es existieren hinreichende Bedingungen dafür, dass (2.17) oder (2.18) richtig ist, und diese Bedingungen beinhalten gewisse gleichmäßige Konvergenzen von Typ (2.16).

**Ein Rechentrick (Feynman-Parameter):** Manchmal kann man uneigentliche Integrale analytisch ausrechnen indem man künstlich einen zusätzlichen Parameter einführt. Weil dieser Trick bisweilen dem Physik-Nobelpreisträger Richard Feynman zugeschrieben wird, werden diese zusätzlichen Parameter bisweilen Feynman-Parameter genannt. Zum Beispiel, um das Integral  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  zu berechnen betrachtet man die Familie

$$I(\lambda) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

von uneigentlichen Integralen, die durch den zusätzlichen Parameter  $\lambda \geq 0$  parametrisiert ist. Weil die Operationen “Uneigentliches Integrieren nach  $x$ ” und “Differenzieren nach  $\lambda$ ” vertauscht werden dürfen, ergibt sich

$$I'(\lambda) = - \int_0^{\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx \text{ für } \lambda > 0.$$

Dieses Integral kann man durch zweifaches partielles Integrieren berechnen, und man erhält

$$I'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}, \text{ d.h. } I(\lambda) = -\arctan \lambda + \text{const für } \lambda > 0.$$

Wegen

$$|I(\lambda)| = \left| \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \rightarrow 0 \text{ for } \lambda \rightarrow \infty$$

ist die Konstante gleich  $\pi/2$ , also  $I(\lambda) = -\arctan \lambda + \pi/2$  für  $\lambda > 0$ . Weil die Operationen “Uneigentliches Integrieren nach  $x$ ” und “Grenzwert  $\lambda \downarrow 0$ ” vertauscht werden dürfen, ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

## 2.5 Stetige Abbildungen

In diesem Unterkapitel sind  $X$  und  $Y$  normierte Vektorräume,  $M$  ist eine Teilmenge von  $X$  und  $f : M \rightarrow Y$  eine Abbildung.

**Stetigkeit:** Die Abbildung  $f$  heißt stetig in einem Punkt  $x_0 \in M$ , wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

Die Funktion  $f$  heißt stetig, wenn sie stetig in jedem  $x_0 \in M$  ist.

**Stetigkeit in isolierten Punkten bzw. in Häufungspunkten des Definitionsbereiches:** Wenn  $x_0 \in M$  nicht Häufungspunkt von  $M$  ist (man nennt dann  $x_0$  isolierter Punkt in  $M$ ),

dann ist jede Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig in  $x_0$ . Wenn aber  $x_0 \in M$  Häufungspunkt von  $X$  ist, dann ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig in  $x_0$  genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Insbesondere, wenn  $x_0 \in M$  Häufungspunkt von  $X$  ist, so ist eine Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig in  $x_0$  genau dann, wenn für jede Folge  $x_1, x_2, \dots \in M$  gilt:

$$\text{Wenn } \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0, \text{ dann } \lim_{j \rightarrow \infty} f(x_j) = f(x_0).$$

**Beispiel Polynome:** Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt Polynom (oder Vektor-Polynom) mit  $n$  Variablen, wenn Koeffizienten  $c_{j_1 \dots j_n}^j \in \mathbb{R}$  existieren so dass für alle  $j = 1, \dots, m$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$f_j(x) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m c_{j_1 \dots j_n}^j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}.$$

Solche Polynome sind stetig. Z.B. ist die Determinantenabbildung  $A \in \mathbb{M}(n \times n) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$  ein Polynom mit  $n^2$  Variablen, denn nach der Leibnitz-Formel gilt

$$\det [a_{ij}] = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n \epsilon_{j_1 \dots j_n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}.$$

Dabei ist

$$\epsilon_{j_1 \dots j_n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (j_1 \dots j_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1, \dots, n) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (j_1 \dots j_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, \dots, n) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der sogenannte Permutationstensor, und eine Permutation  $(j_1 \dots j_n)$  ist gerade bzw. ungerade, wenn die Anzahl der Zahlenpaare  $i < k$  mit  $j_i > j_k$  gerade bzw. ungerade ist.

**Beispiel rationale Abbildungen:** Es seien  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Polynome. Dann heißt die Abbildung

$$f : \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^m : f(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Abbildung mit  $n$  Variablen. Solche rationalen Abbildungen sind stetig. Z.B. ist die sogenannte Inversions-Abbildung für Matrizen  $A \mapsto A^{-1}$ , die die Menge aller  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  mit  $\det A \neq 0$  in die Menge  $\mathbb{M}(n \times n)$  abbildet, eine rationale Abbildung mit  $n^2$  Variablen, denn es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A'_{11} & -\det A'_{21} & \dots & (-1)^{n+1} \det A'_{n1} \\ -\det A'_{12} & \det A'_{22} & \dots & (-1)^{n+2} \det A'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det A'_{1n} & (-1)^{2+n} \det A'_{2n} & \dots & \det A'_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dabei ist  $A'_{ij}$  die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man erhält, wenn man aus der Ausgangsmatrix  $A$  die  $i$ te Zeile und die  $j$ te Spalte entfernt.

**Beispiel: Stetigkeit der Exponentialabbildung für Matrizen:** Die Abbildung  $A \mapsto e^A$ , die  $\mathbb{M}(n \times n)$  in  $\mathbb{M}(n \times n)$  abbildet, ist stetig, weil gilt

$$\|e^{A+B} - e^A\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A+B)^j - A^j}{j!} \right\| \leq \left\| \sum_{j=0}^k \frac{(A+B)^j - A^j}{j!} \right\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(\|A\| + \|B\|)^j + \|A\|^j}{j!}.$$

Hier haben wir die Frobenius-Norm und ihre spezielle Eigenschaft (2.2) benutzt. Wenn  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben ist, so wählt man zunächst  $k$  so groß, dass der zweite Summand der rechten Seite kleiner als  $\varepsilon/2$  ist gleichzeitig für alle  $B$  mit  $\|B\| \leq 1$ . Dann hält man dieses  $k$  fest und wählt  $\|B\|$  so klein, dass der erste Summand der rechten Seite kleiner als  $\varepsilon/2$  ist.

**Stetigkeit ist koordinatenweise Stetigkeit:** Es sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis in  $X$ , und es gelte (2.8), dann folgt: Die Abbildung  $f$  ist stetig in  $x_0$  genau dann, wenn alle ihre Komponentenfunktionen  $f_k$  stetig in  $x_0$  sind.

**Stetigkeit und Superposition:** Es seien  $f$  stetig in einem Punkt  $x_0 \in M$ , und  $g : f(X) \rightarrow Z$  eine Abbildung, die stetig in  $f(x_0)$  ist, wobei  $Z$  ein weiterer normierter Vektorraum ist. Dann ist die Superposition  $g \circ f$  ebenfalls stetig in  $x_0$ .

**Bogenzusammenhängende und einfach zusammenhängende Mengen:** (i) Eine Menge  $X \subseteq X$  heißt bogenzusammenhängend, wenn für beliebige  $x, y \in M$  eine stetige Funktion  $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$  existiert mit  $\varphi(0) = y$  und  $\varphi(1) = x$ .

(ii) Eine bogenzusammenhängende Menge  $M \subseteq X$  heißt einfach zusammenhängend, wenn für jede stetige Funktion  $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \rightarrow M$  eine stetige Funktion  $\psi : \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \rightarrow M$  existiert so dass  $\psi$  eine Fortsetzung von  $\varphi$  ist.

**Beispiele:** (i) Intervalle sind einfach zusammenhängend, und jede bogenzusammenhängende Menge  $M \subseteq \mathbb{R}$  ist ein Intervall.

(ii) Die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$  ist einfach zusammenhängend.

(iii) Die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$  ist bogenzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

(iv) Die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$  ist einfach zusammenhängend.

**Stetige Abbildungen können ihren Definitionsbereich nicht zerreißten:** Wenn  $M \subseteq X$  bogenzusammenhängend (bzw. einfach zusammenhängend) ist und  $f : M \rightarrow Y$  stetig, so ist auch die Bildmenge

$$f(M) := \{f(x) : x \in M\}$$

bogenzusammenhängend (bzw. einfach zusammenhängend). Insbesondere, wenn  $M \subseteq X$  bogenzusammenhängend und  $Y = \mathbb{R}$  ist, so ist  $f(M)$  ein Intervall.

**Zwischenwertsatz:** Wenn  $M \subseteq X$  bogenzusammenhängend ist und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und wenn dann Punkte  $x, y \in M$  existieren mit  $f(x) < 0 < f(y)$ , so existiert auch ein  $z \in M$  mit  $f(z) = 0$ .

## 2.6 Offene Mengen, abgeschlossene Mengen und Rand

In diesem Unterkapitel sind  $X$  ein normierter Vektorraum und  $M \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ .

**Kugeln:** Es seien  $x \in X$  und  $r > 0$ . Dann heißen die Mengen

$$K_r(x) := \{y \in X : \|x - y\| < r\} \text{ bzw. } \bar{K}_r(x) := \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$$

offene bzw. abgeschlossene Kugel um  $x$  mit dem Radius  $r$ .

**Innere Punkte, innerer Kern und Offenheit:** Ein Punkt  $x \in M$  heißt innerer Punkt von  $M$ , wenn ein  $r > 0$  existiert mit  $K_r(x) \subseteq M$ . Die Menge aller inneren Punkte von  $M$  heißt innerer Kern von  $M$  und wird mit  $\text{int } M$  oder  $\overset{\circ}{M}$  bezeichnet. Man sagt, dass  $M$  offen ist, wenn  $M = \text{int } M$  ist.

**Randpunkte, Rand, abgeschlossene Hülle und Abgeschlossenheit:** Ein Punkt  $x \in X$  heißt Randpunkt von  $M$ , wenn für alle  $r > 0$  gilt  $K_r(x) \cap M \neq \emptyset$  und  $K_r(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$ . Die Menge aller Randpunkte von  $M$  heißt Rand von  $M$  und wird mit  $\partial M$  bezeichnet. Die Menge  $M \cup \partial M$  heißt abgeschlossene Hülle von  $M$  und wird mit  $\text{cl } M$  oder  $\bar{M}$  bezeichnet. Man sagt, dass  $M$  abgeschlossen ist, wenn  $M = \text{cl } M$  ist.

**Äquivalente Charakterisierungen:** (i) Die Menge  $\text{int } M$  ist die größte offene Teilmenge von  $M$ , d.h. für jede offene Menge  $A \subseteq M$  gilt  $A \subseteq \text{int } M$ .

(ii) Die Menge  $\text{cl } M$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $M$  enthält, d.h. für jede abgeschlossene Menge  $A \subseteq X$  mit  $M \subseteq A$  gilt  $\text{cl } M \subseteq A$ .

(iii) Es gilt  $x \in \partial M$  genau dann, wenn Folgen  $y_1, y_2, \dots \in M$  und  $z_1, z_2, \dots \in X \setminus M$  existieren mit  $y_n \rightarrow x$  und  $z_n \rightarrow x$ .

(iv)  $M$  ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede konvergente Folge  $x_1, x_2, \dots \in M$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in M$ .

**Dualität von Offenheit und Abgeschlossenheit:** (i) Wenn  $A$  abgeschlossen und  $O$  offen ist, so ist  $A \setminus O$  abgeschlossen und  $O \setminus A$  offen.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

(iv) Eine Menge ist abgeschlossen (bzw. offen) genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte (bzw. keinen ihrer Randpunkte) enthält.

**Beispiele:** (i) Endliche Mengen sind abgeschlossen.

(ii) Die Kugeln  $K_r(x)$  sind offen, die Kugeln  $\bar{K}_r(x)$  sind abgeschlossen, und es gilt

$$\partial K_r(x) = \partial \bar{K}_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}.$$

(iii) Der gesamte Vektorraum  $X$  und die leere Menge  $\emptyset$  sind die einzigen Mengen, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

(iv) Es sei  $X = \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $a < b$ , dass  $(a, b)$  offen ist, dass  $[a, b]$  abgeschlossen ist, dass  $[a, b)$  weder offen noch abgeschlossen ist und

$$\partial(a, b) = \partial[a, b) = \partial[a, b] = \{a, b\}.$$

Die Intervalle  $(-1/j, 1/j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$  sind offen, aber ihr Durchschnitt

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right) = \{0\}$$

ist nicht offen. Die Intervalle  $[-1/j, 1/j]$ ,  $j = 1, 2, \dots$  sind abgeschlossen, aber ihre Vereinigung

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right] = (-1, 1)$$

ist nicht abgeschlossen. Ferner gilt

$$\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset, \quad \partial \mathbb{Q} = \text{cl } \mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

(v) Es sei  $X = \mathbb{R}^2$ , und  $M$  sei eine Gerade in  $\mathbb{R}^2$ . Dann besitzt  $M$  keine inneren Punkte.

**Stetige Bilder und Urbilder von Mengen:** Es sei  $M \subseteq X$ ,  $Y$  sei ein weiterer normierter Vektorraum, und  $f : M \rightarrow Y$  sei stetig, dann gilt:

(i) Wenn  $M$  abgeschlossen und beschränkt ist und wenn  $\dim X < \infty$  gilt, so ist auch die Bildmenge  $f(M)$  abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere, im Fall  $Y = \mathbb{R}$  besitzt dann  $f(M)$  ein Maximum und ein Minimum.

(ii) Wenn  $M = X$  gilt und wenn  $N \subseteq Y$  offen bzw. abgeschlossen ist, so ist auch die Urbildmenge

$$f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$$

offen bzw. abgeschlossen.

## 2.7 Banachscher Fixpunktsatz

**Banachscher Fixpunktsatz:** Es seien  $X$  ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum,  $M \subseteq X$  eine abgeschlossene Menge,  $f : M \rightarrow M$  eine Abbildung, und es existiere ein  $c < 1$ , so daß gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in M. \quad (2.19)$$

Dann existiert genau ein  $x_* \in M$  mit  $f(x_*) = x_*$  (ein sogenannter Fixpunkt von  $f$ ). Ferner gilt: Wenn  $x_0 \in M$  beliebig gewählt ist und wenn die Folge  $x_1, x_2, \dots \in M$  induktiv definiert ist durch

$$x_{j+1} := f(x_j) \text{ für } j = 0, 1, 2, \dots,$$

dann folgt  $x_* = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$  und

$$\rho(x_j, x_*) \leq \frac{c}{1-c} \rho(x_j, x_{j-1}) \leq \frac{c^j}{1-c} \rho(x_2, x_1). \quad (2.20)$$

**Beispiel:** Es sei  $X = \mathbb{R}$  mit  $\|x\| = |x|$ ,  $M = [1, 2]$  und

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass  $f$  tatsächlich  $M$  in  $M$  abbildet und (2.19) mit  $c = 1/2$  erfüllt. Der Fixpunkt von  $f$  ist  $\sqrt{2}$ , und (2.20) liefert

$$|x_j - \sqrt{2}| \leq 2^{-j+1}.$$

**Beispiel:** Es seien  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  und  $m > 0$  gegeben mit

$$\langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.21)$$

Ferner sei  $y \in \mathbb{R}^n$  gegeben, und wir betrachten die Gleichung

$$Ax = y. \quad (2.22)$$

Dann erfüllt die affine Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die definiert ist durch

$$f(x) := x - \frac{m}{\|A\|^2}(Ax - y),$$

die Bedingung (2.19) mit  $c = \sqrt{1 - m^2/\|A\|^2} < 1$ : Wegen (2.3) und (2.21) gilt nämlich

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 - \frac{2m}{\|A\|^2} \langle A(x - y), x - y \rangle + \frac{m^2}{\|A\|^4} \|A(x - y)\|^2 \leq \left(1 - \frac{m^2}{\|A\|^2}\right) \|x - y\|^2.$$

Folglich besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt, d.h. (2.22) besitzt genau eine Lösung  $x = A^{-1}y$  (insbesondere ist  $A$  invertierbar), und diese Lösung wird approximiert durch die Folge

$$x_{j+1} = x_j - \frac{m}{\|A\|^2}(Ax_j - y), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ beliebig.}$$

Die Konvergenz dieser Folge ist umso schneller, je kleiner  $c$  ist, d.h. je kleiner  $\|A\| - m$  ist.

### 3 Mehrdimensionale Differentialrechnung

In diesem Kapitel behandeln wir differenzierbare Abbildungen in endlichdimensionalen normierten Vektorräumen. Dabei benutzen wir folgende Standardbezeichnungen:  $X$  und  $Y$  sind endlichdimensionale normierte Vektorräume,  $\mathcal{L}(X; Y)$  ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ ,  $M \subseteq X$  ist eine offene Menge, und  $f : M \rightarrow Y$  ist eine Abbildung.

In den meisten Anwendungen ist  $X = \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}^m$ . Dann identifizieren wir eine lineare Abbildung  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$  mit ihrer Matrix-Darstellung  $A_L \in \mathbb{M}(m \times n)$  bzgl. der Standard-Basen

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$ , d.h. mit der reellen  $m \times n$ -Matrix

$$A_L = [\langle e_j, Le_k \rangle]_{j=1, k=1}^{m, n},$$

d.h. dann gilt

$$L \left( \sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) e_j.$$

Für die Abbildung  $f : M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  schreiben wir

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Man sagt dann, die Abbildung  $f$  besitzt  $n$  unabhängige und  $m$  abhängige Variable, und die Abbildungen  $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißen Koordinatenabbildungen der Abbildung  $f$ .

### 3.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

In diesem Unterkapitel sind  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale normierte Vektorräume,  $M \subseteq X$  ist eine offene Menge, und  $f : M \rightarrow Y$  ist eine Abbildung.

**Ableitung:** (i) Es sei  $x \in M$ . Wenn ein  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$  existiert, so dass

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Ly}{\|y\|} = 0 \quad (3.2)$$

gilt, dann heißt  $f$  differenzierbar (oder total differenzierbar oder Frechet-differenzierbar) in  $x$ . Damit in (3.2) die Werte  $f(x+y)$  für alle  $y \approx x$  existieren, haben wir vorausgesetzt, dass  $M$  offen ist. Die lineare Abbildung  $L$  ist dann eindeutig bestimmt, sie heißt Ableitung (oder totale Ableitung oder Frechet-Ableitung) von  $f$  in  $x$ , und man schreibt für sie

$$f'(x) \text{ oder } Df(x) \text{ oder } df(x).$$

Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  identifizieren wir die Ableitung  $L$  mit ihrer Matrix-Darstellung  $A_L$  bzgl. der Standard-Basen. Diese Matrix  $e$  heißt dann Jacobi-Matrix oder Funktionalmatrix) von  $f$  in  $x$ , und man schreibt für sie auch

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(x).$$

(ii) Wenn die Ableitungen  $f'(x)$  für alle  $x \in M$  existieren, so heißt  $f$  differenzierbar, und die Abbildungen  $f' : M \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$  heißt Ableitung von  $f$ .

**Partielle Ableitungen:** (i) Es sei  $x \in M$ ,  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  und (3.1). Wenn für ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  und ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  der Grenzwert

$$\partial_k f_j(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f_j(x + te_k) - f_j(x)) \quad (3.3)$$

existiert, so sagt man, dass  $f_j$  in  $x$  partiell differenzierbar nach  $x_k$  ist, und der Grenzwert (3.3) heißt partielle Ableitung von  $f_j$  nach  $x_k$ . Anstelle von  $\partial_k f_j(x)$  schreibt man auch  $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$  oder  $D_k f_j(x)$  oder  $d_k f_j(x)$ . Wenn für ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  der Grenzwert

$$\partial_k f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_k) - f(x)) \quad (3.4)$$

existiert, so sagt man, dass  $f$  in  $x$  partiell differenzierbar nach  $x_k$  ist, der Grenzwert (3.4) heißt partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_k$ . Dann existieren die Grenzwerte (3.3) für alle  $j = 1, \dots, m$ , und es gilt

$$\partial_k f(x) = \begin{bmatrix} \partial_k f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_k f_m(x) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

(ii) Wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_k f_j(x)$  bzw.  $\partial_k f(x)$  für alle  $x \in X$  existieren, so heißen  $f_j$  bzw.  $f$  partiell nach  $x_k$  differenzierbar, und die Abbildungen  $\partial_k f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\partial_k f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißen partielle Ableitungen von  $f_j$  bzw. von  $f$ .

**Verhältnis von Ableitung und partiellen Ableitungen:** Es sei  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  und (3.1). Wenn  $f$  in  $x \in M$  differenzierbar ist, so existieren alle partiellen Ableitungen (3.3) und es gilt

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_n f_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \partial_2 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{bmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$f'(x)v = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \partial_k f_1(x)v_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \partial_k f_m(x)v_k \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x)v_k \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

In (3.6) haben wir die Bezeichnung (3.5) benutzt.

**Richtungsableitung:** Wenn  $f$  in  $x \in M$  differenzierbar ist, so gilt für alle  $v \in X$

$$f'(x)v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)). \quad (3.7)$$

Die rechte Seite von (3.7) nennt man Richtungsableitung von  $f$  im Punkt  $x$  in die Richtung  $v$ .

**Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit:** Wenn  $f$  differenzierbar ist, so ist  $f$  auch stetig.

**Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{für } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x = y = 0. \end{cases}$$

Wegen

$$\frac{1}{t} (f(tx, ty) - f(0, 0)) = \frac{t^2 xy^3}{x^2 + t^4 y^6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

existieren die Richtungsableitungen von  $f$  im Nullpunkt in alle Richtungen (und sind Null), insbesondere existieren beide partielle Ableitungen von  $f$  im Nullpunkt (und sind Null), aber  $f$  ist nicht stetig (und folglich nicht differenzierbar) im Nullpunkt:

$$f(0, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0, \quad \text{aber } f(y^3, y) = \frac{1}{2}.$$

**Stetige Differenzierbarkeit:** Wenn  $f$  differenzierbar ist und die Abbildung  $x \in M \mapsto f'(x) \in \mathcal{L}(X; Y)$  stetig (bzgl. irgendeiner Norm in  $\mathcal{L}(X; Y)$ ) ist, so nennt man  $f$  stetig differenzierbar. Dafür ist hinreichend, dass alle Richtungsableitungen (3.7) existieren und stetig von  $x$  abhängen. Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  und (3.1) ist dafür hinreichend, dass alle partiellen Ableitungen (3.3) existieren und stetig von  $x$  abhängen.

**Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen  $\partial_r f_1(r, \varphi) = \cos \varphi$ ,  $\partial_\varphi f_1(r, \varphi) = -r \sin \varphi$ ,  $\partial_r f_2(r, \varphi) = \sin \varphi$  und  $\partial_\varphi f_2(r, \varphi) = r \cos \varphi$  existieren überall und hängen stetig von  $(r, \varphi)$  ab, also ist  $f$  stetig differenzierbar und

$$f'(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

**Beispiele:** Polynome und rationale Abbildungen mit  $n$  Variablen sind stetig differenzierbar.

**Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) := |z|^2.$$

Wenn man komplexe Zahlen  $x+iy$  mit Vektoren  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  identifiziert, so geht diese Abbildung in die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : g(x, y) := (x^2 + y^2, 0)$$

über. Die Abbildung  $g$  ist überall differenzierbar mit

$$g'(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung  $f$  allerdings ist in allen  $z \neq 0$  nicht (komplex) differenzierbar, denn

$$\frac{|z + \zeta|^2 - |z|^2}{\zeta} = \frac{z\bar{\zeta} + \bar{z}\zeta + |\zeta|^2}{\zeta} = \bar{z} + \bar{\zeta} + \frac{z\bar{\zeta}}{\zeta} \text{ konvergiert nicht für } \zeta \rightarrow 0, \text{ wenn } z \neq 0.$$

**Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{M}(2 \times 2) \rightarrow \mathbb{M}(2 \times 2) : f(A) = A^2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

Wenn man Matrizen  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  mit Vektoren  $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$  identifiziert, so geht diese Abbildung in die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : g(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} \\ a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

über. Die Abbildung  $g$  ist überall differenzierbar mit

$$g'(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{21} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{21} & a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wenn man den Vektor

$$\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{21} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{11} + a_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{21} & a_{12} & 2a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} \\ a_{12}b_{11} + (a_{11} + a_{22})b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + (a_{11} + a_{22})b_{21} + a_{21}b_{22} \\ a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + 2a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

zurück als Matrix

$$\begin{bmatrix} 2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} & a_{12}b_{11} + (a_{11} + a_{22})b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + (a_{11} + a_{22})b_{21} + a_{21}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21} + 2a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = AB + BA$$

interpretiert, so erhält man die Formel

$$f'(A)B = AB + BA. \quad (3.8)$$

Diese Formel erhält man allerdings einfacher, wenn man nicht (3.6), sondern (3.7) anwendet:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(A + tB) - f(A)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} ((A + tB)^2 - A^2) = \lim_{t \rightarrow 0} (AB + BA + tB^2) = AB + BA.$$

Die Formel (3.8) ist ein Analogon zur Ableitungsformel für die Funktion  $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ :  $(x^2)' = 2x$ .

### 3.2 Rechenregeln

In diesem Unterkapitel sind wieder  $X$  und  $Y$  endlichdimensionale normierte Vektorräume,  $M \subseteq X$  ist eine offene Menge, und  $f : M \rightarrow Y$  ist eine Abbildung.

**Differenzierbarkeit von Linearkombinationen:** Es sei  $M \subseteq X$  offen, und die Abbildungen  $f : M \rightarrow Y$  und  $g : M \rightarrow Y$  seien differenzierbar in  $x \in M$ . Dann sind für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  auch die Abbildungen  $\lambda f + \mu g$  in  $x$  differenzierbar, und es gilt

$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$

**Multilineare Abbildungen:** Es seien  $X_1, \dots, X_l$  und  $Y$  Vektorräume über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung  $\mathcal{M} : X_1 \times \dots \times X_l \rightarrow Y$  heißt multilinear (im Fall  $l = 2$  bilinear), wenn für alle  $k = 1, \dots, l$ ,  $v_1 \in X_1, \dots, v_{k-1} \in X_{k-1}, v_{k+1} \in X_{k+1}, \dots, v_l \in X_l$  gilt

$$\mathcal{M}(v_1, \dots, v_{k-1}, \cdot, v_{k+1}, \dots, v_l) : X_k \rightarrow Y \text{ ist linear.}$$

**Beispiele bilinearer Abbildungen ( $l = 2$ ):** (i) Produkt Skalar  $\times$  Vektor: Hier sind  $X_1 = \mathbb{R}$  und  $X_2 = Y = \mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{M}(\lambda, v) = \lambda v$ .

(ii) Euklidisches Skalarprodukt: Hier sind  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}$  und

$$\mathcal{M}(v, w) = \langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^n v_k w_k.$$

(iii) Vektorprodukt: Hier sind  $X_1 = X_2 = Y = \mathbb{R}^3$  und

$$\mathcal{M}(v, w) = v \times w := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 v_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}.$$

(iv) Produkt Matrix  $\times$  Vektor: Hier sind  $X_1 = \mathbb{M}(m \times n)$ ,  $X_2 = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  und  $\mathcal{M}(A, v) = Av$ .

**Beispiele multilinearer Abbildungen mit  $l > 2$ :** (i) Determinante: Hier sind  $X_1 = \dots = X_l = \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{M}(v_1, \dots, v_l) = \det(v_1, \dots, v_l)$ .

(ii) Produkt von Matrizen: Hier sind  $X_1 = \dots = X_l = Y = \mathbb{M}(n \times n)$  und  $\mathcal{M}(A_1, \dots, A_l) = A_1 \cdot \dots \cdot A_l$ .

**Produktregel:** Es seien  $\mathcal{M} : X_1 \times \dots \times X_l \rightarrow Y$  multilinear,  $M \subseteq X$  offen und  $f_k : M \rightarrow X_k$ ,  $k = 1, \dots, l$ , differenzierbar in  $x \in M$ . Dann ist auch die Abbildung  $x \in M \mapsto \mathcal{M}(f_1(x), \dots, f_l(x)) \in Y$  differenzierbar in  $x$ , und es gilt für alle  $v \in X$

$$(\mathcal{M}(f_1, \dots, f_l))'(x)v = \sum_{k=1}^l \mathcal{M}(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f'_k(x)v, f_{k+1}(x), \dots, f_l(x)).$$

**Ableitung von Determinanten:** Wenn man die Produktregel auf das obige Determinantenbeispiel anwendet, so erhält man für alle Abbildungen  $f_1, \dots, f_l : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ , die differenzierbar in  $x \in M$  sind, und für alle  $v \in \mathbb{R}^l$

$$(\det(f_1, \dots, f_l))'(x)v = \sum_{k=1}^l \det(f_1(x), \dots, f_{k-1}(x), f'_k(x)v, f_{k+1}(x), \dots, f_l(x)).$$

Insbesondere, wenn  $M = \mathbb{R}$  ist und  $f_{jk}(t) = \delta_{jk} + t b_{jk}$  die  $k$ -te Komponente von  $f_j(t)$  ist und

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

das sogenannte Kronecker-Symbol ist, so folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\det(I + tB) - \det(I)) = \sum_{j=1}^n b_{jj} =: \text{sp}B.$$

Folglich ist die Ableitung der Abbildung  $A \in \mathbb{M}(n \times n) \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}$  in einer Matrix  $A$  mit  $\det A \neq 0$ , angewendet auf eine Matrix  $B$ , gleich

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\det(A + tB) - \det(A)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A)}{t} (\det(I + tA^{-1}B) - \det(I)) = \det(A) \text{sp}(A^{-1}B).$$

**Kettenregel:** Es seien  $X, Y$  und  $Z$  normierte Vektorräume über  $\mathbb{R}$ ,  $M \subseteq X$  und  $N \subseteq Y$  offen,  $f : M \rightarrow N$  differenzierbar in  $x \in M$ , und  $g : N \rightarrow Z$  sei differenzierbar in  $f(x)$ . Dann ist auch die Superposition  $g \circ f$  differenzierbar in  $x$ , und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x). \quad (3.9)$$

Insbesondere, im Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ ,  $Z = \mathbb{R}^l$  gilt für alle  $k = 1, \dots, n$

$$\partial_k(g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^m \partial_j g(f(x)) \partial_k f_j(x) \quad \text{mit} \quad \partial_j g(f(x)) := \begin{bmatrix} \partial_j g_1(f(x)) \\ \vdots \\ \partial_j g_l(f(x)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l.$$

**Substantielle Zeitableitung:** In der Kontinuumsmechanik bezeichnet man üblicherweise mit  $\hat{x}(t, \xi) \in \mathbb{R}^3$  den Ort zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  des Teilchens, das zum Zeitpunkt Null am Ort  $\xi \in \mathbb{R}^3$  war. Folglich ist  $\partial_t \hat{x}(t, \xi)$  die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  dieses Teilchens. Es sei  $\hat{\xi}(t, \cdot)$  die inverse Funktion zu  $\hat{x}(t, \cdot)$ , d.h.  $\hat{\xi}(t, x)$  ist der Ort zum Zeitpunkt Null des Teilchens, das zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$  ist. Dann ist

$$u(t, x) := \partial_t \hat{x}(t, \hat{\xi}(t, x))$$

die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$ , und nach der Kettenregel ist

$$\partial_t^2 \hat{x}(t, \xi) = \frac{d}{dt} u(t, \hat{x}(t, \xi)) = \partial_t u(t, \hat{x}(t, \xi)) + \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} u(t, \hat{x}(t, \xi)) u_k(t, \hat{x}(t, \xi))$$

die Beschleunigung zum Zeitpunkt  $t$  des Teilchens  $\xi$ . Mit anderen Worten:

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} u(x, t) u_k(t, x) \quad (3.10)$$

ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt  $t$  am Ort  $x$ . Diese vektorwertige Funktion von  $t$  und  $x$  (die nichtlinear von  $u$  abhängt!) nennt man substantielle (oder materielle oder konvektive) Zeitableitung von  $u$ , und sie geht in die Gleichgewichtsgleichungen ein, die in der Hydrodynamik zur Bestimmung der unbekanntenen Funktion  $u$  dienen. Die erstaunlichen Schwierigkeiten, die bei der analytischen und/oder numerischen Behandlung dieser Gleichungen entstehen, wurzeln fast alle in der Nichtlinearität (3.10).

**Ableitung der Inversions-Abbildung für Matrizen:** Es sei  $M = \{A \in \mathbb{M}(n \times n) : \det A \neq 0\}$ . Wir betrachten die rationale, also differenzierbare Abbildung

$$f : M \rightarrow \mathbb{M}(n \times n) : f(A) = A^{-1},$$

und die bilineare Abbildung  $\mathcal{M} : \mathbb{M}(n \times n) \times \mathbb{M}(n \times n) \rightarrow \mathbb{M}(n \times n)$ ,  $\mathcal{M}(A, B) = AB$ . Dann gilt  $\mathcal{M}(f(A), A) = I$  für alle  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  ( $I$  ist die Einheitsmatrix) und folglich nach der Kettenregel

$$0 = (\mathcal{M}(f(A), A))' B = \mathcal{M}(f'(A)B, A) + \mathcal{M}(f(A), B) = f'(A)B A^{-1} + A^{-1}B,$$

also

$$f'(A)B = -A^{-1}BA^{-1}.$$

Das ist ein Analogon zur Ableitungsformel für die Funktion  $x \in (0, \infty) \rightarrow 1/x \in \mathbb{R}$ :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

### 3.3 Interpretationen der Ableitungen

**Der Fall  $n = 1$ . Tangenten:** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar. Dann ist  $f'(x)$  eine  $m \times 1$ -Matrix, also ein Spaltenvektor aus  $\mathbb{R}^m$ ,

$$f'(x) = \begin{bmatrix} f'_1(x) \\ \vdots \\ f'_m(x) \end{bmatrix} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}.$$

Mit anderen Worten: Die Ableitung einer Abbildung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^m$  ist wieder eine Abbildung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^m$ . Die Ableitung  $f'(x)$  ist der Grenzwert der Sekantenvektoren  $(f(x+y) - f(x))/y$  für  $y \rightarrow 0$ . Wenn  $f'(x) \neq 0$ , dann heißt die Gerade

$$\{f(x) + f'(x)y \in \mathbb{R}^m : y \in \mathbb{R}\}$$

Tangente an die Kurve

$$\{f(x) \in \mathbb{R}^m : x \in X\} \quad (3.11)$$

in  $x$ , und sie ist diejenige Gerade in  $\mathbb{R}^m$  durch den Punkt  $f(x)$ , die sich am besten an die Kurve (3.11) in diesem Punkt anschmiegt. Genauer gesagt gilt folgendes: Wenn für ein  $a \in \mathbb{R}^m$  gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x) - ay}{y} = 0,$$

dann ist die Gerade  $\{f(x) + ay \in \mathbb{R}^m : y \in \mathbb{R}\}$  die Tangente an die Kurve (3.11) in  $x$ , d.h.  $a = f'(x)$ .

**Winkelgeschwindigkeit und virtuelle Drehachse:** Es sei  $Q(t)$  eine  $3 \times 3$ -Matrix, die differenzierbar von der Zeit  $t \in \mathbb{R}$  abhängt und die für alle Zeiten  $t$  orthogonal ist, d.h.

$$Q(t)Q(t)^T = I, \quad (3.12)$$

die also eine zeitabhängige starre Drehung des Raumes  $\mathbb{R}^3$  um den fixierten Nullpunkt beschreibt. Weil die unabhängige Variable  $t$  eindimensional ist, ist die Ableitung  $Q'$  (ebenso wie die Abbildung  $Q$ ) eine Abbildung von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{M}(3 \times 3)$ . Wenn man die Identität (3.12) mit Hilfe der Produktregel differenziert und  $Q'(t)^T = (Q(t)^T)'$  benutzt, so erhält man

$$Q'(t)Q(t)^T + Q(t)Q'(t)^T = 0, \text{ also } Q'(t)Q(t)^T = -Q(t)Q'(t)^T = -(Q'(t)Q(t)^T)^T.$$

Mit anderen Worten:  $Q'(t)Q(t)^T$  ist eine antisymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix, d.h. vom Typ

$$Q'(t)Q(t)^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Es sei nun  $u \in \mathbb{R}^3$  ein beliebiger Vektor und  $v(t) := Q(t)u$ , dann folgt

$$\begin{aligned} Q'(t)u &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \omega_2(t)v_3(t) - \omega_3(t)v_2(t) \\ \omega_3(t)v_1(t) - \omega_1(t)v_3(t) \\ \omega_1(t)v_2(t) - \omega_2(t)v_1(t) \end{bmatrix} = \omega(t) \times Q(t)u. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der Vektor

$$\omega(t) := \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{bmatrix}$$

heißt Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$ . Er beschreibt die sogenannte virtuelle Drehachse durch den Nullpunkt in  $\mathbb{R}^3$  zum Zeitpunkt  $t$ , die folgende Eigenschaften besitzt: In allen Punkten auf der Achse ist die Geschwindigkeit Null. In allen anderen Punkten ist die Geschwindigkeit orthogonal zur Achse, und die Euklidische Norm der Geschwindigkeit ist proportional zum Abstand des Punktes von der Achse.

**Der Fall  $m = 1$ . Gradienten:** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei differenzierbar in  $x$ . Dann ist  $f'(x)$  eine  $1 \times n$ -Matrix, also ein Zeilenvektor aus  $\mathbb{R}^n$ . Dieser Vektor wird auch Gradient von  $f$  in  $x$  genannt und mit  $\nabla f(x)$  bezeichnet, d.h.

$$\nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)), \quad (3.14)$$

und es gilt:

(i)  $\langle \nabla f(x), y \rangle = f'(x)y$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) Wenn  $t \in (-1, 1) \mapsto \gamma(t) \in X$  differenzierbar ist mit  $\gamma(0) = x$  und  $f(\gamma(t)) = f(x)$  für alle  $t \in (-1, 1)$  ist, d.h. wenn die Kurve  $\gamma(t)$  innerhalb der sogenannten Niveaumenge  $\{y \in X : f(y) = f(x)\}$  (vom Niveau  $f(x)$ ) liegt, so gilt

$$\langle \gamma'(0), \nabla f(x) \rangle = 0.$$

(iii) Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist, dann existiert für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v\| = \|\nabla f(x)\|$  ein  $\varepsilon > 0$ , so daß gilt

$$f(x + tv) \leq f(x + t\nabla f(x)) \text{ für alle } t \in [0, \varepsilon],$$

d.h. der Vektor  $\nabla f(x)$  zeigt in die Richtung des maximalen Wachstums von  $f$ , lokal in  $x$ .

### 3.4 Die zentralen Sätze

**Mittelwertsatz:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig differenzierbar,  $x, y \in M$ , und für alle  $s \in [0, 1]$  gelte  $sx + (1 - s)y \in M$ . Dann folgt

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \|f'(sx + (1 - s)y)\| \|x - y\|_2.$$

Dabei ist  $\|\cdot\|_2$  die Euklidische Norm in  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$ , und  $\|\cdot\|$  ist die Frobenius-Matrix-Norm (vgl. (2.1)).

**Satz über implizite Funktionen:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $(\lambda_0, x_0) \in U$ ,  $f(\lambda_0, x_0) = 0$  und

$$\det [\partial_{x_k} f_j(\lambda_0, x_0)]_{j,k=1}^n \neq 0.$$

Dann existieren offene Mengen  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $\Lambda \times U \subseteq M$ ,  $\lambda_0 \in \Lambda$  und  $x_0 \in U$ , und es existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : \Lambda \rightarrow U$ , so dass für alle  $\lambda \in \Lambda$  und  $x \in U$  gilt

$$f(\lambda, x) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = \varphi(\lambda).$$

Ferner gilt für alle  $\lambda \in \Lambda$

$$\varphi'(\lambda) = -\partial_x f(\lambda, \varphi(\lambda))^{-1} \partial_\lambda f(\lambda, \varphi(\lambda))$$

mit

$$\partial_x f(\lambda, x) := [\partial_{x_k} f_j(\lambda, x)] \in \mathbb{M}(n \times n), \quad \partial_\lambda f(\lambda, x) := [\partial_{\lambda_i} f_j(\lambda, x)] \in \mathbb{M}(n \times m).$$

**Satz über den lokalen Diffeomorphismus:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in X$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und

$$\det f'(x_0) \neq 0. \quad (3.15)$$

Dann existieren offene Mengen  $U \subseteq M$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x_0 \in U$  und  $f(x_0) \in V$ , so dass die Abbildung  $f$  die Menge  $U$  bijektiv auf die Menge  $V$  abbildet (deshalb sagt man, dass  $f$  lokal in  $x_0$  invertierbar ist) und dass die entsprechende Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ebenfalls stetig differenzierbar ist. Ferner gilt für alle  $x \in U$

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

**Beispiele:** (i) Die Funktion  $f(x) = x^3$  ist stetig differenzierbar und bijektiv von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}$ , aber ihre inverse Funktion ist nicht differenzierbar im Punkt Null. Der Satz über den lokalen Diffeomorphismus arbeitet nicht im Punkt Null, weil  $f'(0) = 0$  ist.

(ii) Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix},$$

ist stetig differenzierbar, und es gilt

$$\det f'(x, y) = \det \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^x \neq 0.$$

Folglich arbeitet der Satz über den lokalen Diffeomorphismus in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^2$ , d.h.  $f$  ist in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^2$  lokal invertierbar. Aber  $f$  ist nicht injektiv, folglich ist  $f$  nicht (global) invertierbar.

**Newton-Verfahren:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, und es existiere ein  $L > 0$  mit

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in M.$$

Ferner gelte für ein  $x_0 \in M$  (3.15) und  $f(x_0) = 0$ . Dann existieren  $\delta > 0$  und  $c > 0$ , so dass für alle  $x_1 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$  gilt  $x_1 \in X$  und  $\det f'(x_1) \neq 0$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$x_{k+1} := x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k) \in X, \quad \det f'(x_{k+1}) \neq 0$$

und

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq c\|x_k - x_0\|^2 \text{ und } \|x_{k+1} - x_0\| \leq c^{1+2+2^2+\dots+2^k} \delta^{2^{k+1}}. \quad (3.16)$$

Wegen (3.16) sagt man, dass die Folge der Approximationen  $x_1, x_2, \dots$  quadratisch gegen die Lösung  $x_0$  konvergiert.

### 3.5 Untermannigfaltigkeiten (Flächen im Raum)

**Karten, Parametrisierungen und bestimmende Gleichungen:** Es seien  $m \leq n$  natürliche Zahlen. Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$ , wenn für jeden Punkt  $x \in M$  eine (und folglich alle) der folgenden drei äquivalenten Bedingungen gilt:

(i) Es existieren eine offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\det \Phi'(x) \neq 0, \quad M \cap U = \{y \in U : \Phi_{m+1}(y) = \dots = \Phi_n(y) = 0\}. \quad (3.17)$$

Die Abbildung  $\Phi$  heißt dann (lokale) Karte von  $M$  in  $x$ .

(ii) Es existieren offene Mengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$ , eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  und ein  $\xi \in V$  mit

$$\Psi(\xi) = x, \quad \text{rang } \Psi'(\xi) = m, \quad M \cap U = \{\Psi(\eta) : \eta \in V\}. \quad (3.18)$$

Die Abbildung  $\Psi$  heißt dann (lokale) Parametrisierung von  $M$  in  $x$ , und für  $j = 1, \dots, m$  heißen die Kurven  $t \approx 0 \mapsto \Psi(\xi + te_j) \in M$  Koordinatenlinien auf  $M$  durch  $x$  (erzeugt durch  $\Psi$ ).

(iii) Es existieren offene Mengen  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $x \in U$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  mit

$$\text{rang } F'(x) = n - m, \quad M \cap U = \{y \in U : F(y) = 0\}. \quad (3.19)$$

Die Gleichung  $F(y) = 0$  heißt dann (lokal) bestimmende Gleichung von  $M$  in  $x$ .

**Tangentialräume:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^n$  und  $x \in M$ . Ferner sei  $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit  $\gamma(t) \in M$  für alle  $t \in (-1, 1)$  und  $\gamma(0) = x$ . Dann heißt der Vektor  $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$  Tangentialvektor an  $M$  in  $x$ . Der affine Teilraum

$$T_x M := \{x + v : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ in } x\}$$

ist dann  $m$ -dimensional und heißt Tangentialraum an  $M$  in  $x$ , und es gilt:

(i) Aus (3.17) folgt  $T_x M = \{x + v : \Phi'_{m+1}(x)v = \dots = \Phi'_n(x)v = 0\}$ .

(ii) Aus (3.18) folgt

$$T_x M = \{x + \Psi'(\xi)w : w \in \mathbb{R}^m\} = x + \text{span} \{\partial_1 \Psi(\xi), \dots, \partial_m \Psi(\xi)\}.$$

Mit anderen Worten: Wenn  $\eta \in V \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto \Psi(\eta) \in \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung von  $M$  nahe  $x$  mit  $\Psi(\xi) = x$  ist, so ist  $w \in \mathbb{R}^m \mapsto x + \Psi'(\xi)w \in \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung von  $T_x M$ . Insbesondere bilden die Tangentialvektoren  $\partial_1 \Psi(\xi), \dots, \partial_m \Psi(\xi)$  an die Koordinatenlinien auf  $M$  durch  $x$  eine Basis in  $T_x M$ .

(iii) Aus (3.19) folgt  $T_x M = \{x + v : F'(x)v = 0\}$ . Mit anderen Worten: Wenn  $F(y) = 0$  eine bestimmende Gleichung für  $M$  nahe  $x$  ist, so ist  $F'(x)(y - x) = 0$  eine bestimmende Gleichung für  $T_x M$ . Insbesondere, im Fall  $n = m + 1$  ist  $\langle \nabla F(x), y - x \rangle = 0$  eine bestimmende Gleichung für  $T_x M$ , d.h.  $T_x M$  ist die Ebene durch  $x$ , die zu  $\nabla F(x)$  orthogonal ist.

**Untermannigfaltigkeiten als Graphen:** Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist der Graph von  $f$

$$M := \left\{ \left[ \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \\ f(\eta_1, \eta_2) \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 : (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 - f(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

ist eine Karte von  $M$  in jedem Punkt von  $M$ . Die Abbildung  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\Psi(\eta_1, \eta_2) := \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ f(\eta_1, \eta_2) \end{bmatrix}$$

ist eine Parametrisierung von  $M$  in jedem Punkt von  $M$ . Die Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(y_1, y_2, y_3) := y_3 - f(y_1, y_2)$$

erzeugt eine bestimmende Gleichung von  $M$  in jedem Punkt von  $M$ . Für jeden Punkt

$$x := \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ f(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \in M$$

sind

$$t \approx 0 \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 + t \\ \xi_2 \\ f(\xi_1 + t, \xi_2) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad s \approx 0 \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + t \\ f(\xi_1, \xi_2 + t) \end{bmatrix}$$

die (von  $\Psi$  erzeugten) Koordinatenlinien auf  $M$  durch  $x$ , und

$$\partial_1 \Psi(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_2 \Psi(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix}$$

sind die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien in  $x$ , und es gilt

$$T_x M = \left\{ \begin{bmatrix} \xi_1 + w_1 \\ \xi_2 + w_2 \\ f(\xi_1, \xi_2) + \partial_1 f(\xi_1, \xi_2)w_1 + \partial_2 f(\xi_1, \xi_2)w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Die zweidimensionale Sphäre:** Die Menge  $M := \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$  heißt zweidimensionale Sphäre und ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Die Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$F(y_1, y_2, y_3) := y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1$$

erzeugt eine bestimmende Gleichung von  $M$  in jedem Punkt von  $M$ . Wegen  $F'(x)v = 2(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = 2\langle x, v \rangle$  gilt

$$T_x M = \{x + v \in \mathbb{R}^3 : \langle x, v \rangle = 0\}.$$

Die Abbildung  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Psi(\psi, \varphi) := \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \end{bmatrix},$$

ist eine Parametrisierung von  $M$  in jedem Punkt von  $M$  außer im Nordpol  $(0, 0, 1)$  und im Südpol  $(0, 0, -1)$ , denn

$$\text{rang}\Psi'(\psi, \varphi) = \text{rang} \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi \\ -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} = 2 \text{ genau dann, wenn } \psi \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**Ein Kegelschnitt:** Die Menge  $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 = y_1 + y_2 + y_3 - 1 = 0\}$  ist der Schnitt des Kegels  $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 = 2y_3^2\}$  mit der Ebene  $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 1\}$ , eine Ellipse, eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ . Die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : F(y) := \begin{bmatrix} y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 \\ y_1 + y_2 + y_3 - 1 \end{bmatrix}$$

erzeugt eine bestimmende Gleichung für  $M$  in allen Punkten von  $M$ , denn

$$\text{rang}F'(x) = \text{rang} \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & -4x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \text{ für alle } x \in M.$$

Ferner gilt für alle  $x \in M$

$$T_x M = \{x + v : 2x_1v_1 + 2x_2v_2 - 4x_3v_3 = v_1 + v_2 + v_3 = 0\}.$$

**Drehungen der Ebene:** Die Menge aller orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen mit positiver Determinante, d.h.

$$M := \{Q \in \mathbb{M}(2 \times 2) : QQ^T = I, \det Q > 0\},$$

ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit im vierdimensionalen Raum  $\mathbb{M}(2 \times 2)$ . Die Abbildung  $F : \mathbb{M}(2 \times 2) \rightarrow \mathbb{S}(2 \times 2)$  ( $\mathbb{S}(2 \times 2)$  ist der dreidimensionale Raum der symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrizen),

$$F(A) := AA^T - I,$$

erzeugt eine bestimmende Gleichung für  $M$  in jedem Punkt von  $M$  wie die folgende Überlegung zeigt:

Nach der Produktregel gilt  $F'(Q)A = AQ^T + QA^T$ . Nach dem Satz über Kern und Bild linearer Abbildungen besitzt die lineare Abbildung

$$A \in \mathbb{M}(2 \times 2) \mapsto F'(Q)A = AQ^T + QA^T \in \mathbb{S}(2 \times 2)$$

maximalen Rang (also drei) genau dann, wenn die Dimension des Kerns dieser linearen Abbildung gleich eins ist, d.h. wenn für beliebiges  $Q \in M$  die Gleichung

$$AQ^T + QA^T = 0 \tag{3.20}$$

genau eine linear unabhängige Lösung besitzt.  $A \in \mathbb{M}(2 \times 2)$  ist Lösung von (3.20) genau dann, wenn  $AQ^T \in \mathbb{A}(2 \times 2)$  ist ( $\mathbb{A}(2 \times 2)$  ist der eindimensionale Vektorraum der antisymmetrischen  $2 \times 2$ -Matrizen), d.h. wenn  $A = BQ$  mit einem  $B \in \mathbb{A}(2 \times 2)$ . Weil aber  $B \in \mathbb{M}(2 \times 2) \mapsto BQ \in \mathbb{M}(2 \times 2)$  linear und bijektiv und folglich dimensionserhaltend ist, folgt  $\dim\{BQ : B \in \mathbb{A}(2 \times 2)\} = 1$ . Also gilt auch

$$T_Q M = \{Q + BQ \in \mathbb{M}(2 \times 2) : B^T = -B\}.$$

Eine Parametrisierung für  $M$  in jedem Punkt von  $M$  ist  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(2 \times 2)$ ,

$$\Psi(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix}.$$

**Drehungen des Raumes und Eulersche Winkel:** Die Menge aller orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen mit positiver Determinante, d.h.

$$M := \{Q \in \mathbb{M}(3 \times 3) : QQ^T = I, \det Q > 0\}$$

ist eine dreidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit im 9-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{M}(3 \times 3)$ . Die Abbildung  $F : \mathbb{M}(3 \times 3) \rightarrow \mathbb{S}(3 \times 3)$  ( $\mathbb{S}(3 \times 3)$  ist der 6-dimensionale Vektorraum der symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrizen),  $F(A) := AA^T - I$ , erzeugt eine bestimmende Gleichung für  $M$  in jedem Punkt von  $M$ , wie die folgende Überlegung zeigt:

Nach dem Satz über Kern und Bild linearer Abbildungen besitzt die lineare Abbildung  $A \in \mathbb{M}(3 \times 3) \mapsto F'(Q)A = AQ^T + QA^T \in \mathbb{S}(3 \times 3)$  maximalen Rang (also sechs) genau dann, wenn die Dimension des Kerns dieser linearen Abbildung gleich drei ist, d.h. wenn für beliebiges  $Q \in M$  die Gleichung

$$AQ^T + QA^T = 0 \tag{3.21}$$

genau drei linear unabhängige Lösungen besitzt.  $A \in \mathbb{M}(3 \times 3)$  ist Lösung von (3.21) genau dann, wenn  $AQ^T \in \mathbb{A}(3 \times 3)$  ist ( $\mathbb{A}(3 \times 3)$  ist der 3-dimensionale Vektorraum der antisymmetrischen  $3 \times 3$ -Matrizen), d.h. wenn  $A = BQ$  mit einem  $B \in \mathbb{A}(3 \times 3)$ . Weil aber  $B \in \mathbb{M}(3 \times 3) \mapsto BQ \in \mathbb{M}(3 \times 3)$  linear und bijektiv und folglich dimensionserhaltend ist, folgt  $\dim\{BQ : B \in \mathbb{A}(3 \times 3)\} = 3$ . Also gilt auch

$$T_Q M = \{Q + BQ \in \mathbb{M}(3 \times 3) : B^T = -B\}.$$

Eine Parametrisierung für  $M$  in jedem Punkt von  $M$  ist  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(3 \times 3)$ :

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) := \begin{bmatrix} \cos \xi \cos \zeta - \sin \xi \cos \eta \sin \zeta & -\cos \xi \sin \zeta - \sin \xi \cos \eta \cos \zeta & \sin \xi \sin \eta \\ \sin \xi \cos \zeta + \cos \xi \cos \eta \sin \zeta & -\sin \xi \sin \zeta + \cos \xi \cos \eta \cos \zeta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \eta \sin \zeta & \sin \eta \cos \zeta & \cos \eta \end{bmatrix}$$

Wenn  $e_1, e_2, e_3$  die kanonische Basis in  $\mathbb{R}^3$  ist,  $e'_j = \Psi(\xi, \eta, \zeta)e_j$  die neue Orthonormalbasis nach der Drehung  $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$  und  $v \in \mathbb{R}^3$  ein Vektor in der Schnittgeraden von  $\text{span}\{e_1, e_2\}$  und  $\text{span}\{e'_1, e'_2\}$  mit  $\det[e_3, \psi(\xi, \eta, \zeta)e_3, v] > 0$ , so gilt:

(i) Der sogenannte Präzessionswinkel  $\xi$  ist der Winkel von  $e_1$  nach  $v$  (Drehung um die  $e_3$ -Achse gegen den Uhrzeigersinn der  $e_1, e_2$ -Ebene).

(ii) Der sogenannte Nutationswinkel  $\eta$  ist der Winkel zwischen  $e_3$  und  $e'_3$  (Drehung um die  $v$ -Achse).

(iii) Der Winkel  $\zeta$  ist der Winkel von  $v$  nach  $e'_1$  (Drehung um die  $e'_3$ -Achse gegen den Uhrzeigersinn der  $e'_1, e'_2$ -Ebene).

(iv)  $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$  ist die Nacheinanderausführung der obigen drei "einfachen" Drehungen, d.h.

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta & 0 \\ \sin \zeta & \cos \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & -\sin \eta \\ 0 & \sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Winkel  $\xi, \eta$  und  $\zeta$  heißen Eulersche Winkel der Drehung  $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ .

### 3.6 Höhere Ableitungen

Wenn  $X$  und  $Y$  normierte Vektorräume sind,  $M \subseteq X$  eine offene Menge und  $f : M \rightarrow Y$  eine differenzierbare Abbildung, so ist die Ableitung  $f'$  eine Abbildung von  $M$  in  $\mathcal{L}(X; Y)$ . Wenn nun diese Abbildung ihrerseits differenzierbar ist, so ist ihre Ableitung eine Abbildung von  $M$  in  $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$ . Mit anderen Worten, wenn man wie üblich die zweite Ableitung von  $f$  als die erste Ableitung der ersten Ableitung von  $f$  definiert und mit  $f''$  bezeichnet (vgl. (1.2)), so ist

$$f''(x) \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)).$$

Die dritte Ableitung ist dann noch schlimmer,

$$f'''(x) \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))),$$

usw. Man kann die Sache aber glücklicherweise vereinfachen, weil der Vektorraum  $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$  linear und bijektiv auf den Vektorraum der bilinearen Abbildungen  $X \times X \rightarrow Y$  abgebildet werden kann. Mit anderen Worten: Die zweite Ableitung  $f''(x)$  kann als bilineare Abbildung  $X \times X \rightarrow Y$  aufgefaßt werden. Analog kann die dritte Ableitung  $f'''(x)$  als multilineare Abbildung  $X \times X \times X \rightarrow Y$  aufgefaßt werden. Um diesen begrifflichen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen betrachten wir in diesem Unterkapitel nur den Fall  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$ .

In diesem Unterkapitel sind also  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung.

**Höhere Differenzierbarkeit und höhere partielle Ableitungen:** (i) Die Abbildung  $f$  heißt **zweifach differenzierbar**, wenn  $f$  differenzierbar ist und wenn alle partiellen Ableitungen von  $f$  differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen von  $f$  werden zweite partielle Ableitungen von  $f$  genannt und mit  $\partial_j \partial_k f(x)$  oder  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x)$  bezeichnet, d.h.

$$\partial_j \partial_k f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\partial_k f(x + te_j) - \partial_k f(x)).$$

Ferner schreibt man zur Vereinfachung

$$\partial_j^2 f(x) := \partial_j \partial_j f(x) \text{ oder } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x).$$

(ii) Für  $l \in \mathbb{N}$  heißt  $f$   **$l$ -fach differenzierbar**, wenn  $f$   $(l-1)$ -fach differenzierbar ist und wenn alle  $(l-1)$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  differenzierbar sind. Die partiellen Ableitungen dieser  $(l-1)$ -ten partiellen Ableitungen werden  $l$ -te partielle Ableitungen von  $f$  genannt und mit

$$\partial_{j_1}^{k_1} \dots \partial_{j_r}^{k_r} f(x) \text{ oder } \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_r} f}{\partial x_{j_1}^{k_1} \dots \partial x_{j_r}^{k_r}}(x)$$

bezeichnet. Analoge Schreibweisen werden für die Komponenten  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , von  $f$  benutzt.

(iii) Für  $l \in \mathbb{N}$  heißt  $f$   **$l$ -fach stetig differenzierbar**, wenn  $f$   $l$ -fach differenzierbar ist und wenn alle  $l$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  stetig sind. Das ist genau dann der Fall, wenn alle  $l$ -ten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren und stetig sind.

**Satz von Schwarz:** Wenn  $f$  zweifach differenzierbar ist, so gilt

$$\partial_j \partial_k f(x) = \partial_k \partial_j f(x) \text{ für alle } 1 \leq j \neq k \leq n \text{ und } x \in X.$$

**Beispiel:** Wir betrachten die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x = y = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung  $f$  ist einfach differenzierbar, weil die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

und

$$\partial_y f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 5y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{für } x = y = 0 \end{cases}$$

stetig sind. Auch alle zweiten partiellen Ableitungen existieren, insbesondere ist

$$\partial_x^2 f(0, 0) = \partial_y^2 f(0, 0) = 0, \partial_x \partial_y f(0, 0) = 1, \partial_y \partial_x f(0, 0) = -1.$$

Aber wegen  $\partial_x \partial_y f(0, 0) \neq \partial_y \partial_x f(0, 0)$  ist  $f$  nicht zweifach differenzierbar. Zum Beispiel  $\partial_y f$  ist nicht differenzierbar im Nullpunkt, weil

$$g(x, y) := \frac{\partial_y f(x, y) - x \partial_x \partial_y f(x, y) - y \partial_y^2 f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left( \frac{x(x^4 - 5y^4)}{(x^2 + y^2)^2} - x \right)$$

nicht gegen Null strebt bei  $(x, y) \rightarrow 0$ , denn  $g(x, x) = -\sqrt{2}$  für  $x \neq 0$ .

**Höhere (totale) Ableitungen:** Wenn  $f$   $l$ -fach differenzierbar ist und  $x \in X$ , so heißt die multilineare Abbildung

$$f^{(l)}(x) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : f^{(l)}(x)(v_1, \dots, v_l) := \sum_{1 \leq k_1, \dots, k_l \leq n} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_l} f(x) v_{1k_1} \dots v_{lk_l} \quad (3.22)$$

$l$ -te Ableitung von  $f$  in  $x$ . In (3.22) sind  $v_{jk}$  die Komponenten des Vektors  $v_j \in \mathbb{R}^n$ , d.h.

$$v_j = \begin{bmatrix} v_{j1} \\ \vdots \\ v_{jn} \end{bmatrix} \quad \text{für } j = 1, \dots, l.$$

Dabei gilt: Für alle  $x \in X$  und  $v_1, \dots, v_l \in \mathbb{R}^n$  ist  $f^{(l)}(x)(v_1, \dots, v_l)$  die Ableitung der Abbildung  $y \in X \mapsto f^{(l-1)}(y)(v_1, \dots, v_{l-1}) \in \mathbb{R}^m$  im Punkt  $x$ , angewendet auf  $v_l$ , insbesondere

$$f^{(l)}(x)(v_1, \dots, v_l) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( f^{(l-1)}(x + tv_l)(v_1, \dots, v_{l-1}) - f^{(l-1)}(x)(v_1, \dots, v_{l-1}) \right).$$

**Andere Schreibweisen:** Wegen dem Satz von Schwarz sind in der Summe (3.22) viele der Faktoren  $\partial_{k_1} \dots \partial_{k_l} f(x)$  gleich. Diese kann man zusammenfassen, z.B. im Fall  $l = 2$  folgt

$$f''(x)(v, w) = \sum_{k=1}^n \partial_k^2 f(x) v_k w_k + \sum_{1 \leq k < l \leq n} \partial_k \partial_l f(x) (v_k w_l + v_l w_k). \quad (3.23)$$

Im Fall  $v_1 = \dots = v_l = w$  kann man noch mehr zusammenfassen, dann gilt

$$f^{(l)}(x)(w, \dots, w) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = l} \frac{l!}{k_1! \dots k_n!} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(x) w_1^{k_1} \dots w_n^{k_n}. \quad (3.24)$$

Häufig schreibt man für (3.24) auch formal

$$f^{(l)}(x)(w, \dots, w) = (w_1 \partial_1 + \dots + w_n \partial_n)^l f(x)$$

oder sogar

$$f^{(l)}(x)(w, \dots, w) = \langle w, \nabla \rangle^l f(x)$$

wegen der Analogie zur verallgemeinerten binomischen Formel

$$(x_1 + \dots + x_n)^l = \sum_{k_1 + \dots + k_n = l} \frac{l!}{k_1! \dots k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}.$$

Im Fall  $n = 2$  nimmt (3.24) die folgende Form an:

$$f^{(l)}(x)(w, \dots, w) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \partial_1^k \partial_2^{l-k} f(x) w_1^k w_2^{l-k}. \quad (3.25)$$

**Hesse-Matrix:** Im Fall  $m = 1$  sind die  $n^2$  zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  Zahlen. Diese schreibt man auch als symmetrische  $n \times n$ -Matrix

$$H_f(x) := [\partial_j \partial_k f(x)]_{j,k=1}^n$$

und nennt diese Matrix Hesse-Matrix von  $f$  in  $x$ . Dann nimmt (3.23) die folgende Form an:

$$f''(x)(v, w) = \langle H_f(x)v, w \rangle.$$

**Coriolis-Kraft:** Eine Punktmasse befinde sich zum Zeitpunkt  $t$  am Ort

$$p(t) = Q(t)x(t) \quad \text{mit} \quad Q(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}(3 \times 3) \quad \text{und} \quad x(t) \in \mathbb{R}^3$$

(z.B. Bewegung auf der Erdoberfläche, überlagert mit der Rotation der Erde). Dann gilt nach der Produktregel

$$p''(t) = Q(t)x''(t) + 2Q'(t)x'(t) + Q''(t)x(t).$$

Die Gesamtbeschleunigung  $p''(t)$  ist also die Summe aus der sogenannten relativen Beschleunigung  $Q(t)x''(t)$  (die Beschleunigung, die ein Beobachter, der sich mit der Masse bewegt und nichts von der Überlagerung mit der Rotation  $Q(t)$  weiß, erwarten würde), der Zentrifugalbeschleunigung  $Q''(t)x(t)$  und der sogenannten Coriolis-Beschleunigung (vgl. (3.13))

$$2Q'(t)x'(t) = 2\omega e_3 \times Q(t)x'(t).$$

Die durch die Coriolis-Beschleunigung erzeugte Coriolis-Kraft  $-2m\omega e_3 \times Q(t)x'(t)$  ( $m > 0$  ist die Masse) ist orthogonal zu der Ebene, die durch  $e_3$  und die Relativgeschwindigkeit  $Q(t)x'(t)$  aufgespannt ist, und sie verschwindet genau dann, wenn die Relativgeschwindigkeit und  $e_3$  parallel

sind. Wenn die Relativgeschwindigkeit und  $e_3$  nicht parallel sind, so bilden  $e_3$ , Coriolis-Kraft und Relativgeschwindigkeit ein positiv orientiertes Dreibein.

Im Fall der Bewegung auf der Erdoberfläche bedeutet das folgendes: Wenn die Relativgeschwindigkeit z.B. zum Erdmittelpunkt zeigt (freier Fall), so wirkt die Coriolis-Kraft als nach Osten ablenkende Kraft (maximal am Äquator und verschwindend an den Polen). Wenn die Relativgeschwindigkeit dagegen tangential zur Erdoberfläche ist, so bewirkt die Coriolis-Kraft auf der nördlichen (bzw. südlichen) Halbkugel eine nach rechts (bzw. links) ablenkende Kraft (maximal an den Polen und verschwindend am Äquator).

### 3.7 Taylor-Formel

**Satz über die Taylor-Formel:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$   $l + 1$ -fach stetig differenzierbar,  $x \in M$  und  $v \in \mathbb{R}^n$  so dass  $x + tv \in M$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann existiert für alle  $j = 1, \dots, m$  ein  $\theta_j \in (0, 1)$ , so daß gilt

$$f_j(x + v) = \sum_{k=0}^l \frac{1}{k!} f_j^{(k)}(x)(v, \dots, v) + \frac{1}{(l+1)!} f_j^{(l+1)}(x + \theta_j v)(v, \dots, v).$$

Wegen (3.22) ist das äquivalent zu

$$\begin{aligned} f_j(x + v) &= \sum_{k=0}^l \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f_j(x) v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} \\ &+ \sum_{k_1 + \dots + k_n = l+1} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f_j(x + \theta_j v) v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}. \end{aligned}$$

Das sogenannte Restglied kann man auch in Integralform schreiben:

$$\frac{1}{(l+1)!} f_j^{(l+1)}(x + \theta_j v)(v, \dots, v) = \int_0^1 \frac{(1-s)^l}{l!} f_j^{(l+1)}(x + sv)(v, \dots, v) ds.$$

Das Polynom

$$v \in \mathbb{R}^n \mapsto P_l^{f,x}(v) := \sum_{k=0}^l \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n} f(x) v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n} \in \mathbb{R}^m$$

heißt **Taylor-Polynom** der Ordnung  $l$  von  $f$  im Punkt  $x$ .

**Spezialfälle:** (i)  $l = 2$ : Wegen (3.23) gilt

$$P_2^{f,x}(v) = f(x) + \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) v_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \partial_k^2 f(x) v_k^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \partial_j \partial_k f(x) v_j v_k.$$

(ii)  $l = 2, m = 1$ :

$$P_2^{f,x}(v) = f(x) + \langle \nabla f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) v, v \rangle.$$

(iii)  $n = 2$ : Wegen (3.25) gilt

$$P_l^{f,x}(v) = \sum_{j=0}^l \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \partial_1^k \partial_2^{j-k} f(x) v_1^k v_2^{j-k}.$$

### 3.8 Lokale Extrema mit und ohne Nebenbedingungen

In diesem Unterkapitel sind  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,  $f$  ist die Funktion, deren lokale Extrema gesucht werden,  $g$  beschreibt die Nebenbedingungen dabei, und  $m$  ist die Anzahl der Nebenbedingungen. Insbesondere ist der Fall  $m = 0$  (dann ist  $g(x) = 0$  für alle  $x \in M$ ) der Fall ohne Nebenbedingungen.

Ein Punkt  $x_0 \in M$  mit  $g(x_0) = 0$  heißt **lokales Minimum** (bzw. **strenges lokales Minimum**) von  $f$  unter der Nebenbedingung

$$g(x) = 0, \quad (3.26)$$

wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in M$  mit (3.26) und  $0 < \|x - x_0\| < \varepsilon$  gilt  $f(x) \geq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) > f(x_0)$ ). Analog sind lokale bzw. strenge lokale Maxima von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26) definiert. Im Fall  $m = 0$  spricht man nur von lokalen Extrema von  $f$ .

Ein Punkt  $x_0 \in M$  mit  $g(x_0) = 0$  heißt **globales Minimum** (bzw. **strenges globales Minimum**) von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26) wenn für alle  $x \in M \setminus \{x_0\}$  mit (3.26) gilt  $f(x) \geq f(x_0)$  (bzw.  $f(x) > f(x_0)$ ). Analog sind globale bzw. strenge globale Maxima von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26) definiert.

**Notwendige Bedingung für lokale Extrema. Lagrange-Multiplikatoren:** Wenn  $f$  und  $g$  stetig differenzierbar sind,  $x_0 \in M$  ein lokales Extremum von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26) ist und wenn

$$\text{rang } g'(x_0) = m \quad (3.27)$$

ist, so existieren sogenannte Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  mit

$$\nabla f(x_0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x_0). \quad (3.28)$$

**Definitheit von Matrizen:** Es seien  $A \in \mathbb{M}(n \times n)$  eine symmetrische Matrix und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Unterraum.

(i)  $A$  heißt positiv (bzw. negativ) definit auf  $V$ , wenn für alle  $v \in V \setminus \{0\}$  gilt  $\langle Av, v \rangle > 0$  (bzw.  $\langle Av, v \rangle < 0$ ).  $A$  ist positiv (bzw. negativ) definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $A$  positiv (bzw. negativ) sind.

(ii)  $A$  heißt indefinit auf  $V$ , wenn  $v_+, v_- \in V$  existieren mit  $\langle Av_+, v_+ \rangle > 0$  und  $\langle Av_-, v_- \rangle < 0$ .  $A$  ist indefinit genau dann, wenn  $A$  mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert besitzt.

**Regeln von Sylvester:** Es seien  $A = [a_{jk}] \in \mathbb{M}(n \times n)$  eine symmetrische Matrix und

$$M_l := [a_{jk}]_{j,k=1}^l \in \mathbb{M}(l \times l) \text{ für } l = 1, \dots, n$$

die sogenannten Hauptminore von  $A$ . Dann gilt:

- (i)  $A$  ist positiv definit genau dann, wenn für alle  $l = 1, \dots, n$  gilt  $\det M_l > 0$ .
- (ii)  $A$  ist negativ definit genau dann, wenn  $-A$  positiv definit ist, d.h. genau dann, wenn gilt  $\det M_1 < 0, \det M_2 > 0, \det M_3 < 0, \dots$ .
- (iii) Wenn gilt  $\det M_2 < 0$ , so ist  $A$  indefinit auf  $\mathbb{R}^n$ .

- (iv) Wenn gilt  $\det M_1 > 0$ ,  $\det M_2 > 0$ ,  $\det M_3 < 0$ , so ist  $A$  indefinit auf  $\mathbb{R}^n$ .
- (v) Wenn gilt  $\det M_1 < 0$ ,  $\det M_2 > 0$ ,  $\det M_3 > 0$ , so ist  $A$  indefinit auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Hinreichende Bedingung für strenge lokale Extrema:** Wenn  $f$  und  $g$  zweifach stetig differenzierbar sind,  $x_0 \in M$  und  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  (3.27) und (3.28) erfüllen und wenn

$$V := \{v \in \mathbb{R}^n : g'(x_0)v = 0\} \text{ und } A := H_f(x_0) - \sum_{j=1}^m \lambda_j H_{g_j}(x_0)$$

ist, so gilt:

- (i) Wenn  $A$  positiv (bzw. negativ) definit auf  $V$  ist, so ist  $x_0$  ein strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26).
- (ii) Wenn  $A$  indefinit auf  $V$  ist, so ist  $x_0$  kein lokales Extremum von  $f$  unter der Nebenbedingung (3.26).

**Der Fall  $m = 0$ ,  $n = 2$ :** (i) Wenn  $f$  stetig differenzierbar ist und  $x_0 \in M$  ein lokales Extremum von  $f$  ist, so gilt

$$\partial_1 f(x_0) = \partial_2 f(x_0) = 0. \tag{3.29}$$

- (ii) Wenn  $f$  zweifach stetig differenzierbar ist und wenn  $x_0 \in M$

$$\partial_1^2 f(x_0) \partial_2^2 f(x_0) < (\partial_1 \partial_2 f(x_0))^2$$

erfüllt, so ist  $x_0$  kein lokales Extremum von  $f$ .

- (iii) Wenn  $f$  zweifach stetig differenzierbar ist und wenn  $x_0 \in M$  (3.29) und

$$\partial_1^2 f(x_0) \partial_2^2 f(x_0) > (\partial_1 \partial_2 f(x_0))^2, \partial_1^2 f(x_0) < 0$$

erfüllt, so ist  $x_0$  ein strenges lokales Maximum von  $f$ .

- (iv) Wenn  $f$  zweifach stetig differenzierbar ist und wenn  $x_0 \in M$  (3.29) und

$$\partial_1^2 f(x_0) \partial_2^2 f(x_0) > (\partial_1 \partial_2 f(x_0))^2, \partial_1^2 f(x_0) > 0$$

erfüllt, so ist  $x_0$  ein strenges lokales Minimum von  $f$ .

## 4 Mehrdimensionale Integralrechnung

In diesem Kapitel ist, mit Ausnahme der Unterkapitel 4.7 bis 4.10 ist  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm in  $\mathbb{R}^n$ , und alle Begriffe und Aussagen, die mit Hilfe der Norm  $\|\cdot\|$  formuliert werden, hängen nicht von der Wahl von  $\|\cdot\|$  ab. In den Unterkapiteln 4.7 bis 4.10 arbeiten wir ausschließlich mit der Euklidischen Norm.

### 4.1 Integrierbarkeit und Integral

**Quader, Zerlegungen, Zwischenwertvektoren, Riemannsche Summen, Integrierbarkeit und Integral:** (i) Für  $j = 1, \dots, n$  seien reelle Zahlen  $a_j \leq b_j$  gegeben. Dann heißt die Menge

$$Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j \text{ für alle } j = 1, \dots, n\}$$

(beschränkter, abgeschlossener, achsenparalleler,  $n$ -dimensionaler ) Quader, und

$$\text{mes } Q := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

heißt ( $n$ -dimensionales ) Maß oder Volumen von  $Q$ .

(ii) Es seien  $Q_1, \dots, Q_m \subset Q$  Quader mit

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j,$$

und für alle  $j \neq k$  gelte entweder  $Q_j \cap Q_k = \emptyset$  oder  $\text{mes } Q_j \cap Q_k = 0$ . Dann heißt die Menge  $Z = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  Zerlegung von  $Q$ . Das Maximum aller Seitenlängen aller Quader in  $Z$  heißt Feinheit von  $Z$ .

(iii) Für  $j = 1, \dots, m$  seien Vektoren  $\xi_j \in Q_j$  gegeben. Dann heißt der Vektor

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in (\mathbb{R}^n)^m$$

Zwischenwertvektor zu der Zerlegung  $Z$ .

(iv) Eine Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, wenn ein  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$  existiert, so daß folgendes gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle Zerlegungen  $Z$  von  $Q$ , deren Feinheit kleiner als  $\delta$  ist, sowie für alle Zwischenwertvektoren  $\xi$  zu  $Z$  gilt

$$\left| \sum_{j=1}^m f(\xi_j) \text{mes } Q_j - \mathcal{I} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahl  $\mathcal{I}$  (die dann durch die obige Bedingung eindeutig bestimmt ist) heißt Integral von  $f$  über  $Q$ , und man schreibt

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n := \int_Q f(x) dx := \mathcal{I}.$$

Die Summe  $\sum_{k=1}^m f(\xi_j) \text{mes } Q_j$  heißt Riemannsches Summe der Funktion  $f$  zur Zerlegung  $Z$  und zu dem Zwischenwertvektor  $\xi$ .

(v) Es sei  $M$  eine beschränkte Teilmenge in  $\mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrierbar, wenn ein Quader  $Q$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $M \subseteq Q$  existiert, so daß die Nullfortsetzung  $\tilde{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$  auf  $Q$ , d.h.

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in M, \\ 0 & \text{für } x \in Q \setminus M, \end{cases}$$

integrierbar ist. Die Zahl

$$\int_M f(x) dx := \int_Q \tilde{f}(x) dx.$$

heißt dann Integral von  $f$  über  $M$  (und ist, ebenso wie die Integrierbarkeitseigenschaft von  $f$ , nicht von der Wahl von  $Q$  abhängig).

## 4.2 Integrierbarkeits-Kriterien

**Nullmengen:** Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$  (oder Menge mit  $n$ -dimensionalem Maß Null), wenn für alle  $\varepsilon > 0$  eine Folge von Quadern  $Q_1, Q_2, \dots$  in  $\mathbb{R}^n$  existiert mit

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes } Q_j < \varepsilon.$$

**Beispiele:** (i) Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge. Insbesondere ist jede abzählbare Menge eine Nullmenge.

(ii) Wenn  $M \subset \mathbb{R}^n$  ein affiner Teilraum ist mit  $\dim M < n$ , so ist  $M$  eine Menge mit  $n$ -dimensionalem Maß Null.

(iii) Es seien  $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$  abgeschlossen und beschränkt und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist der Graph von  $f$

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X\}$$

eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$ .

(vi) Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  einen inneren Punkt enthält, so ist  $M$  keine Nullmenge.

**Meßbare Mengen und Maß:** Es sei  $M$  eine beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i)  $\partial M$  ist eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^n$ .

(ii) Die konstante Funktion  $x \in M \mapsto 1 \in \mathbb{R}$  ist integrierbar.

Wenn (i) und (ii) erfüllt sind, so nennt man  $M$  meßbar (in  $\mathbb{R}^n$ ), man definiert

$$\text{mes } M := \int_M dx$$

und nennt diese Zahl Maß (oder  $n$ -dimensionales Volumen) von  $X$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \text{mes } M &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{mes } Q_j : Q_j \subset \mathbb{R}^n \text{ Quader, } M \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, \text{mes } Q_j \cap Q_k = 0 \text{ für alle } j \neq k \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{mes } Q_j : Q_j \subseteq M \text{ Quader, } \text{mes } Q_j \cap Q_k = 0 \text{ für alle } j \neq k \right\}. \end{aligned}$$

**Beispiele:** (i) Es sei  $n = 1$  und  $M = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Dann ist  $\partial M = [0, 1]$ , also keine Nullmenge in  $\mathbb{R}$ , also ist  $M$  nicht meßbar.

(ii) Es sei  $M$  eine beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit folgender Eigenschaft: Es existieren Quader  $Q_1, \dots, Q_m \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$\partial M \subseteq \bigcup_{j=1}^m Q_j$$

so dass für jedes  $j \in \{1, \dots, m\}$  ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  existiert so dass die Mengen  $M \cap Q_j$  Graphen von stetigen Abbildungen  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \mapsto \varphi_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  sind. Dann ist  $M$  meßbar.

**Satz von Lebesgue:** Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  meßbar, dann gilt: Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar genau dann, wenn  $f$  beschränkt ist und wenn die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte  $\{x \in M : f \text{ ist in } x \text{ unstetig}\}$  eine Nullmenge ist.

### 4.3 Rechenregeln

**Linearität bzgl. des Integranden:** Es seien  $M$  eine beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , und die Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  seien integrierbar. Dann ist auch die Funktion  $\lambda f + \mu g$  integrierbar, und es gilt

$$\int_M (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_M f(x) dx + \mu \int_M g(x) dx.$$

**Additivität bzgl. des Integrationsgebiets:** Es seien  $M, N \subset \mathbb{R}^n$  zwei meßbare Mengen. Dann sind auch die Mengen  $M \cup N$  und  $M \cap N$  meßbar. Wenn ferner  $f : M \cup N \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion ist, so sind auch ihre Einschränkungen  $f|_M$ ,  $f|_N$  und  $f|_{M \cap N}$  integrierbar, und es gilt

$$\int_{M \cup N} f(x) dx = \int_M f(x) dx + \int_N f(x) dx - \int_{M \cap N} f(x) dx.$$

**Integration von Ungleichungen:** Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt. Wenn zwei Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar sind und wenn für alle  $x \in M$  gilt  $f(x) \leq g(x)$ , so gilt auch

$$\int_M f(x) dx \leq \int_M g(x) dx.$$

**Integralabschätzungen:** Wenn  $M \subset \mathbb{R}^n$  meßbar ist und wenn  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist, so gilt

$$\inf\{f(x) : x \in M\} \text{mes } M \leq \int_M f(x) dx \leq \sup\{f(x) : x \in M\} \text{mes } M.$$

Ferner ist dann auch die Funktion  $|f|$  integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_M f(x) dx \right| \leq \int_M |f(x)| dx.$$

### 4.4 Mehrfachintegrale und der Satz von Fubini

**Satz von Fubini:** Es seien  $M \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  eine beschränkte Menge und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion. Ferner sei

$$X := \{x \in \mathbb{R}^m : \text{Es existiert ein } y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } (x, y) \in M.\},$$

und für alle  $x \in X$  sei die Funktion  $f(x, \cdot) : Y_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\}$  integrierbar. Dann ist auch die Funktion

$$x \in X \mapsto \int_{Y_x} f(x, y) dy$$

integrierbar, und es gilt

$$\int_M f(x, y) dx dy = \int_X \left( \int_{Y_x} f(x, y) dy \right) dx.$$

**Beispiel:** Es seien  $a < b$  zwei reelle Zahlen,  $\varphi_+, \varphi_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Funktionen mit  $\varphi_-(x) \leq \varphi_+(x)$  für alle  $x \in [a, b]$  und

$$\psi_+, \psi_- : M_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit  $\psi_-(x, y) \leq \psi_+(x, y)$  für alle  $(x, y) \in M_0$ . Dann ist jede stetige Funktion

$$f : M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x), \psi_-(x, y) \leq z \leq \psi_+(x, y)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar (insbesondere ist  $M$  meßbar), und es gilt

$$\int_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \left( \int_{\psi_-(x, y)}^{\psi_+(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

**Prinzip von Cavalieri:** Es seien  $a < b$  zwei reelle Zahlen, und für jedes  $x \in [a, b]$  seien meßbare Mengen  $Y_x \subset \mathbb{R}^n$  gegeben so dass die Funktion

$$x \in [a, b] \mapsto \text{mes } Y_x \in \mathbb{R}$$

integrierbar ist. Dann ist auch die Menge  $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in [a, b], y \in Y_x\}$  meßbar, und es gilt

$$\text{mes } M = \int_a^b \text{mes } Y_x dx.$$

## 4.5 Transformationsformel

**Satz:** Es seien  $U$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $M$  eine meßbare Teilmenge von  $U$ ,  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung mit  $\det g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$  und  $f : g(U) \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte stetige Funktion. Dann ist auch die Menge  $g(M)$  meßbar, und es gilt

$$\int_{g(M)} f(y) dy = \int_M f(g(x)) |\det g'(x)| dx.$$

**Beispiele:** (i) **Polarkoordinaten:** Wenn  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so gilt für alle  $R > 0$

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy = \int_0^R r \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \right) dr.$$

Insbesondere, wenn  $f$  invariant ist bzgl. Drehungen um den Nullpunkt, d.h. wenn für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und alle orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen  $Q$  gilt  $f(Q(x, y)) = f(x, y)$ , d.h. wenn eine stetige Funktion  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$f(x, y) = \phi \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

so gilt

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy = 2\pi \int_0^R r \phi(r) dr.$$

(ii) **Kugelkoordinaten:** Wenn  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so gilt für alle  $R > 0$

$$\begin{aligned} & \int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^R r^2 \left( \int_0^\pi \sin \psi \left( \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi \sin \psi, r \sin \varphi \sin \psi, r \cos \psi) d\varphi \right) d\psi \right) dr. \end{aligned}$$

Insbesondere, wenn  $f$  invariant ist bzgl. Drehungen um den Nullpunkt, d.h. wenn für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  und alle orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen  $Q$  gilt  $f(Q(x, y, z)) = f(x, y, z)$ , d.h. wenn eine stetige Funktion  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$f(x, y, z) = \phi \left( \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right),$$

so gilt

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z) dx dy dz = 4\pi \int_0^R r^2 \phi(r) dr.$$

(iii) **Zylinderkoordinaten:** Wenn  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, so gilt für alle  $R > 0$

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^R r \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^H f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz \right) d\varphi \right) dr.$$

Insbesondere, wenn  $f$  invariant ist bzgl. Drehungen um die  $z$ -Achse, d.h. wenn für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  und alle orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen  $Q$  gilt  $f(Q(x, y), z) = f(x, y, z)$ , d.h. wenn eine stetige Funktion  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$f(x, y, z) = \phi \left( \sqrt{x^2 + y^2}, z \right),$$

so gilt

$$\int_{x^2+y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H} f(x, y, z) dx dy dz = 2\pi \int_0^R r \left( \int_0^H \phi(r, z) dz \right) dr.$$

**Guldinsche Regel:** Es sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine meßbare Menge, und es gelte  $x \geq 0$  für alle  $(x, z) \in M$ . Dann ist auch die entsprechende Rotationsmenge (Rotation um die  $z$ -Achse)

$$X := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : (r, z) \in M, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

meßbar, und es gilt

$$\text{mes} X = 2\pi \int_M x dx dz.$$

## 4.6 Uneigentliche mehrdimensionale Integrale

**Ausschöpfende Folgen:** Es sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine Folge  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq M$  von meßbaren Mengen  $N_j$  heißt ausschöpfende Folge für  $M$ , wenn für jedes  $r > 0$  gilt

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j.$$

**Uneigentliche Integrierbarkeit:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  eine (möglicherweise unbeschränkte) Menge und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine (möglicherweise unbeschränkte) stetige Funktion. Wenn für jede ausschöpfende Folge  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq M$  für  $M$  der Grenzwert  $\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{N_j} f(x) dx$  existiert, so nennt man  $f$  uneigentlich integrierbar auf  $M$ . Der Grenzwert hängt dann nicht von der Wahl der ausschöpfenden Folge ab, deshalb kann man das Integral von  $f$  über  $M$  definieren als

$$\int_M f(x) dx := \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{N_j} f(x) dx.$$

**Eine hinreichende Bedingung für uneigentliche Integrierbarkeit:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in M$ , und es existiere eine ausschöpfende Folge  $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq M$  für  $M$  und ein  $c > 0$  mit

$$\int_{N_j} |f(x)| dx \leq c \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $f$  uneigentlich integrierbar auf  $M$ .

**Beispiele:** (i) Es seien  $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1\}$  und  $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha/2}$ . Dann ist  $f$  uneigentlich integrierbar auf  $M$  genau dann, wenn  $\alpha > 3$ : Wir nehmen als ausschöpfende Folge  $N_j = \{x \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq j\}$ , dann konvergiert

$$\int_{N_j} f(x) dx = 2\pi \int_1^j r^{2-\alpha} dr \int_0^\pi \sin \psi d\psi = \begin{cases} 4\pi \frac{j^{3-\alpha} - 1}{3 - \alpha} & \text{für } \alpha \neq 3, \\ \ln j & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $j \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\alpha > 3$ , und dann ist

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 1} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha/2} = \frac{4\pi}{\alpha - 3}.$$

(ii) Es seien  $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$  und  $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha/2}$ . Dann ist  $f$  uneigentlich integrierbar auf  $M$  genau dann, wenn  $\alpha < 3$ : Wir nehmen als ausschöpfende Folge  $N_j = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 - 1/j\}$ , dann konvergiert

$$\int_{N_j} f(x) dx = 2\pi \int_{1/j}^1 r^{2-\alpha} dr \int_0^\pi \sin \psi d\psi = \begin{cases} 4\pi \frac{1 - 1/j^{3-\alpha}}{3 - \alpha} & \text{für } \alpha \neq 3, \\ -\ln j & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $j \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\alpha < 3$ , und dann ist

$$\int_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\alpha/2} = \frac{4\pi}{3 - \alpha}.$$

## 4.7 Kurvenintegrale. Gradientenfelder und ihre Potentiale

In diesem und in den nächsten Unterkapiteln ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  das Euklidische Skalarprodukt, und  $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  ist die Euklidische Norm, d.h.  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Kurven:** Eine Menge  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  heißt (kompakte, stetige) Kurve (ohne Selbstschneidung), wenn eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  existieren so dass gilt:

(i)  $\mathcal{K} = \{\gamma(s) : s \in [a, b]\}$ .

(ii) Für alle  $a \leq s \neq t \leq b$  mit  $\gamma(s) = \gamma(t)$  gilt  $s, t \in \{a, b\}$ .

Die Abbildung  $\gamma$  heißt dann Parametrisierung der Kurve  $\mathcal{K}$ . Wenn  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt für eine (und dann für jede) Parametrisierung  $\gamma$  von  $\mathcal{K}$ , so heißt  $\mathcal{K}$  geschlossen.

**Stückweise glatte Kurven:** Es sei  $\mathcal{K}$  eine Kurve, für die eine Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}$  und eine Zerlegung  $a \leq s_0 < s_1, \dots < s_m \leq b$  des Intervalls  $[a, b]$  und Konstanten  $c_+ > c_- > 0$  existieren so dass gilt

$$\gamma \text{ ist differenzierbar in } [a, b] \setminus \{s_0, s_1, \dots, s_m\} \quad (4.1)$$

und

$$c_+ \geq \|\gamma'(s)\| \geq c_- \text{ für alle } s \in [a, b] \setminus \{s_0, s_1, \dots, s_m\}. \quad (4.2)$$

Dann heißt  $\mathcal{K}$  stückweise glatte Kurve, und  $\gamma$  heißt stückweise glatte Parametrisierung von  $\mathcal{K}$ . Die Ableitung  $\gamma'$  ist in  $[a, b] \setminus \{s_0, s_1, \dots, s_m\}$  stetig und beschränkt, also kann man sie so auf  $[a, b]$  fortsetzen, dass ihre Komponentenfunktionen integrierbar sind. Das wird in (4.3), (4.4) und (4.5) benutzt, dort ist  $\gamma'$  eine solche Fortsetzung.

**Länge von Kurven:** Eine Kurve  $\mathcal{K}$  heißt **rektifizierbar**, wenn für eine (und dann für jede) Parametrisierung  $\gamma$  von  $\mathcal{K}$  gilt

$$L_{\mathcal{K}} := \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \right\} < \infty. \quad (4.3)$$

Die Zahl  $L_{\mathcal{K}}$  hängt dann nicht von der Parametrisierung  $\gamma$  ab und heißt Länge der Kurve  $\mathcal{K}$ . Wenn  $\mathcal{K}$  stückweise glatt ist und  $\gamma$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{K}$  mit (4.1) und (4.2), so gilt

$$L_{\mathcal{K}} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**(Nichtorientiertes) Kurvenintegral von Funktionen:** Es seien  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  eine stückweise glatte Kurve,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{K}$  mit (4.1) und (4.2) und  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{K}} f d\gamma := \int_a^b f(\gamma(s)) \|\gamma'(s)\| ds \quad (4.4)$$

Integral von  $f$  über  $\mathcal{K}$  (und ist nur von  $f$  und  $\mathcal{K}$ , nicht aber von  $\gamma$  abhängig). Ferner gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle Zerlegungen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$  von  $[a, b]$ , deren Feinheit kleiner als  $\delta$  ist, sowie für alle Zwischenwerte  $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$  gilt

$$\left| \sum_{j=1}^l f(\xi_j) L_{\gamma([t_{j-1}, t_j])} - \int_{\mathcal{K}} f d\gamma \right| < \varepsilon.$$

Dabei ist  $L_{\gamma([t_{j-1}, t_j])}$  die Länge des Kurvenstücks  $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ .

**Interpretation:** Wenn  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^3$  einen dünnen Draht im Raum beschreibt und  $f : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  die Massedichte des Drahtes (Masse pro Länge), so ist  $\int_{\mathcal{K}} f d\gamma$  die Gesamtmasse des Drahtes, und

$$\frac{(\int_{\mathcal{K}} f \gamma_1 d\gamma, \int_{\mathcal{K}} f \gamma_2 d\gamma, \int_{\mathcal{K}} f \gamma_3 d\gamma)}{\int_{\mathcal{K}} f d\gamma} \in \mathbb{R}^3$$

ist der Schwerpunkt des Drahtes.

**Orientierte Kurven:** Zwei Parametrisierungen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  einer Kurve  $\mathcal{K}$  heißen gleichorientiert, wenn  $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$  monoton wachsend ist. Das ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Parametrisierungen von  $\mathcal{K}$ , und es existieren genau zwei verschiedene Äquivalenzklassen. Die Kurve  $\mathcal{K}$  gemeinsam mit einer der beiden Äquivalenzklassen heißt orientierte Kurve oder Kurve mit vorgegebener Durchlaufrichtung. Die Parametrisierungen aus dieser ausgewählten Äquivalenzklasse heißen positiv orientiert. Wenn  $\mathcal{K}$  nicht geschlossen ist und wenn  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine positiv orientierte Parametrisierung von  $\mathcal{K}$  ist, so heißen die Punkte  $\gamma(a)$  bzw.  $\gamma(b)$  Anfangs- bzw. Endpunkt von  $\mathcal{K}$  (und sie hängen nicht von der Wahl von  $\gamma$  ab). Wenn  $\mathcal{K}$  stückweise glatt ist und  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Parametrisierungen von  $\mathcal{K}$  sind mit (4.1) und (4.2), so sind sie gleich orientiert genau dann, wenn

$$\langle \gamma_1'(t), \gamma_2'(t) \rangle > 0 \text{ für alle } t \in [a, b] \setminus \{s_0, s_1, \dots, s_m\}.$$

**(Orientiertes) Kurvenintegral von Vektorfeldern:** Es seien  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  eine stückweise glatte orientierte Kurve,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}$  eine positiv orientierte Parametrisierung von  $\mathcal{K}$  mit (4.1) und (4.2) und  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma := \int_a^b \langle v(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle ds \quad (4.5)$$

Integral von  $v$  über  $\mathcal{K}$  und ist nur von  $v$  und  $\mathcal{K}$ , nicht aber von  $\gamma$  abhängig. Ferner gilt: Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle Zerlegungen  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b$  von  $[a, b]$ , deren Feinheit kleiner als  $\delta$  ist, sowie für alle Zwischenwerte  $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$  gilt

$$\left| \sum_{j=1}^l \langle v(\xi_j), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle - \int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma \right| < \varepsilon.$$

Anstelle von  $\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma$  schreibt man auch

$$\int_{\mathcal{K}} \langle v, d\gamma \rangle \text{ oder } \int_{\mathcal{K}} v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n. \quad (4.6)$$

Wenn  $\mathcal{K}$  geschlossen ist, so nennt man  $\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma$  **Zirkulation** von  $v$  entlang  $\mathcal{K}$ .

**Einheitstangentenfeld:** Es seien  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  eine orientierte stückweise glatte Kurve und  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}$  eine positiv orientierte Parametrisierung mit (4.1) und (4.2). Dann heißt die Abbildung  $\tau : \mathcal{K} \setminus \{\gamma(s_0), \gamma(s_1), \dots, \gamma(s_m)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die (unabhängig von der Wahl von  $\gamma$ ) definiert ist durch

$$\tau(\gamma(x)) := \frac{\gamma'(x)}{\|\gamma'(x)\|},$$

positiv orientiertes Einheitstangentenfeld an  $\mathcal{K}$ , und es gilt für jedes stetige Vektorfeld  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma = \int_{\mathcal{K}} \langle v, \tau \rangle d\gamma.$$

Dabei ist das rechte Integral das (nichtorientierte) Kurvenintegral von der Funktion  $x \in \mathcal{K} \mapsto \langle v(x), \tau(x) \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Interpretation:** (i) Wenn  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Kraftfeld ist, so ist  $\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma$  die Arbeit, die notwendig ist, um eine Punktmasse vom Anfangs- zum Endpunkt von  $\mathcal{K}$  unter dem Einfluß von  $v$  zu bewegen.

(ii) Wenn  $v : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Geschwindigkeitsfeld einer Strömung ist, so ist der Quotient von  $\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma$  und der Länge von  $\mathcal{K}$  die mittlere tangentielle (bzgl.  $\mathcal{K}$ ) Geschwindigkeit von  $v$ .

**Bogenzusammenhängende Mengen:** Eine Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt bogenzusammenhängend, wenn für alle  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  existiert mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .

**Einfach zusammenhängende Mengen:** Eine Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt einfach zusammenhängend, wenn sie bogenzusammenhängend ist und wenn für alle stetigen Abbildungen  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$  eine stetige Abbildung  $\delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  existiert mit

$$\delta(0, t) = \gamma(t) \text{ und } \delta(1, s) = \delta(1, t) \text{ für alle } s, t \in [0, 1].$$

**Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Potentials:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $X$ . Dann gilt:

(i) Wenn eine differenzierbare Abbildung  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$\nabla\Phi(x) = v(x) \text{ für alle } x \in M,$$

so heißt  $v$  Gradientenfeld, und  $\Phi$  heißt Potential von  $v$ .

(ii) Das Vektorfeld  $v$  ist Gradientenfeld genau dann, wenn für alle orientierten geschlossenen Kurven  $\mathcal{K} \subset M$  gilt

$$\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma = 0.$$

(iii) Wenn  $v$  Gradientenfeld ist, so gilt

$$\partial_k v_j(x) = \partial_j v_k(x) \text{ für alle } 1 \leq j \neq k \leq n \text{ und } x \in M. \quad (4.7)$$

(iv) Wenn  $X$  einfach zusammenhängend ist und wenn (4.7) gilt, so ist  $v$  ein Gradientenfeld, und ein Potential von  $v$  kann folgendermaßen berechnet werden: Fixiere ein  $x_0 \in X$ . Für gegebenes  $x \in X$  wähle eine orientierte Kurve  $\mathcal{K}_x \subset X$ , die eine positiv orientierte Parametrisierung  $\gamma_x : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_x$  mit  $\gamma_x(a) = x_0$  und  $\gamma_x(b) = x$  besitzt. Dann ist

$$\Phi(x) := \int_{\mathcal{K}_x} v \cdot d\gamma$$

ein Potential von  $v$ .

(v) Es  $v$  ein Gradientenfeld,  $\Phi$  ein Potential von  $v$ , und  $\mathcal{K} \subset X$  sei eine orientierte Kurve. Dann gilt für jede positiv orientierte Parametrisierung  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\mathcal{K}$

$$\int_{\mathcal{K}} v \cdot d\gamma = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a)).$$

**Beispiele:** (i)  $X \subset \mathbb{R}$  ist genau dann bogenzusammenhängend, wenn  $M$  ein Intervall ist.

(ii) Die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0, x^2 + y^2 > 0\}$  ist nicht bogenzusammenhängend.

(iii) Die Menge  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ist bogenzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

Die Menge  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ist einfach zusammenhängend.

(iv) Das Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$v(x, y) := \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

erfüllt (4.7), ist aber kein Gradientenfeld.

**Rotation von Vektorfeldern:** Wenn  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  offen ist und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein differenzierbares Vektorfeld auf  $M$ , so nennt man das Vektorfeld  $\operatorname{rot} v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , das definiert ist durch

$$\operatorname{rot} v(x) := \begin{bmatrix} \partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x) \\ \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x) \\ \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

Rotation (oder flächenhafte Wirbeldichte oder Wirbelstärke) von  $v$ , und die Bedingung (4.7) kann man dann schreiben als  $\operatorname{rot} v = 0$ . Anstelle von  $\operatorname{rot} v$  schreibt man auch  $\nabla \times v$ .

**Wirbelfreie Vektorfelder:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und es gelte  $\operatorname{rot} v(x) = 0$  für alle  $x \in M$ . Dann heißt  $v$  wirbelfrei. Insbesondere ist jedes Gradientenfeld wirbelfrei. Wenn  $M$  zusätzlich einfach zusammenhängend ist, so ist jedes wirbelfreie Vektorfeld ein Gradientenfeld, und seine Zirkulation entlang jeder geschlossenen Kurve ist Null.

## 4.8 Flächenintegrale

**Jordanscher Kurvensatz:** Es sei  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  eine geschlossene Kurve. Dann existieren zwei offene, bogenzusammenhängende Mengen  $G, \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$  mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $G \cup \tilde{G} \cup \mathcal{K} = \mathbb{R}^2$ .

(ii)  $G \cap \tilde{G} = \emptyset$ ,  $\partial G = \partial \tilde{G} = \mathcal{K}$ .

(iii)  $G$  ist beschränkt, und  $\tilde{G}$  ist unbeschränkt.

**Flächenstücke:** Eine Menge  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  heißt (stetig differenzierbares) Flächenstück (mit stückweise stetig differenzierbarem Rand), wenn offene Mengen  $G, U \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $\bar{G} \subset U$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  existieren mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $\mathcal{F} = \Phi(\bar{G})$ .

(ii) Für alle  $x \in G$  gilt  $\operatorname{rang} \Phi'(x) = 2$  (d.h.  $\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x) \neq 0$ ).

(iii) Für alle  $x, y \in \bar{G}$  mit  $x \neq y$  und  $\Phi(x) = \Phi(y)$  gilt  $x, y \in \partial G$ .

(iv)  $G$  ist beschränkt und bogenzusammenhängend, und  $\partial G$  ist eine geschlossene Kurve.

Die Abbildung  $\Phi$  heißt dann Parametrisierung von  $\mathcal{F}$ , und die Menge  $\bar{G}$  heißt Parameterbereich der Parametrisierung  $\Phi$ .

**(Geometrischer) Rand eines Flächenstücks:** Es sei  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück. Ein Punkt  $y \in \mathcal{F}$  heißt Randpunkt von  $\mathcal{F}$  wenn folgendes gilt:

$$\exists r_0 > 0 \forall r \in (0, r_0) : K_r(y) \setminus \mathcal{F} \text{ ist bogenzusammenhängend.}$$

Dabei ist  $K_r(y) := \{z \in \mathbb{R}^3 : \|y - z\| < r\}$  die offene Kugel (bzgl. der Euklidischen Norm) um  $y$  mit dem Radius  $r$ . Die Menge aller Randpunkte von  $\mathcal{F}$  heißt (geometrischer) Rand von  $\mathcal{F}$  und wird mit  $\partial\mathcal{F}$  bezeichnet, und es gilt

$$\partial\mathcal{F} \subseteq \Phi(\partial G).$$

**Bemerkung zur Terminologie:** (i) Ein Flächenstück  $\mathcal{F}$  besitzt keine inneren Punkte (d.h. keine Punkte  $y \in \mathcal{F}$  mit  $K_r(y) \subseteq \mathcal{F}$  für ein  $r > 0$ ), folglich ist der topologische Rand von  $\mathcal{F}$  (d.h. die Menge aller  $y \in \mathbb{R}^3$  so dass Folgen  $y_1, y_2, \dots \in \mathcal{F}$  und  $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{F}$  mit  $y_j \rightarrow y$  und  $z_j \rightarrow y$  existieren) die Menge  $\mathcal{F}$  selbst, also nicht sehr interessant. Deshalb ist, wenn vom Rand eines Flächenstücks  $\mathcal{F}$  gesprochen wird oder wenn die Bezeichnung  $\partial\mathcal{F}$  benutzt wird, stets der geometrische Rand gemeint.

(ii) Es seien  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück und  $\Phi$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{F}$  mit dem Parameterbereich  $\bar{G}$ . Dann kann man  $\bar{G}$  ebenfalls als Flächenstück in  $\mathbb{R}^3$  (das zufällig in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegt) auffassen, und dessen geometrischer Rand ist dann gleich dem topologischen Rand von  $G$  (wenn man den topologischen Rand von  $G$  als Teilmenge der  $x_1, x_2$ -Ebene, nicht als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  nimmt). Deshalb kann bei der Benutzung der Bezeichnung  $\partial G$  keine Verwechslung entstehen.

**Tangentialebene, Normalenvektor und Gramsche Determinante:** Es seien  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück und  $\Phi$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{F}$  mit dem Parameterbereich  $\bar{G}$ . Dann ist  $\Phi(G)$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$ , und die Vektoren  $\partial_1\Phi(x)$  und  $\partial_2\Phi(x)$  bilden eine Basis in der Tangentialebene an  $\Phi(G)$  im Punkt  $\Phi(x)$ . Folglich ist der Vektor  $\partial_1\Phi(x) \times \partial_2\Phi(x)$  orthogonal zu diesem Tangentialraum (ein sogenannter Normalenvektor zu  $\Phi(G)$  in  $\Phi(x)$ ), und es gilt

$$\|\partial_1\Phi(x) \times \partial_2\Phi(x)\|^2 = \det[(\partial_j\Phi(x), \partial_k\Phi(x))]_{j,k=1}^2 =: g_\Phi(x). \quad (4.9)$$

Die Determinante in (4.9) heißt Gramsche Determinante der Parametrisierung  $\Phi$  im Punkt  $x$  und ist gleich dem Quadrat der Fläche des Parallelogramms, das durch die Vektoren  $\partial_1\Phi(x)$  und  $\partial_2\Phi(x)$  aufgespannt wird.

**Beispiele:** (i) **Graphen:** Es seien  $G \subset \mathbb{R}^2$  beschränkt und bogenzusammenhängend,  $\partial G$  sei eine geschlossene Kurve,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  sei offen mit  $\bar{G} \subset U$ , und  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig differenzierbar. Dann ist der Graph  $\mathcal{F} := \{(x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \bar{G}\}$  von  $\phi$  ein Flächenstück,

$$\Phi(x_1, x_2) := (x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)) \quad (4.10)$$

ist eine Parametrisierung von  $\mathcal{F}$  mit dem Parameterbereich  $G$ , mit  $\partial\mathcal{F} = \Phi(\partial G)$  und mit

$$g_\Phi(x_1, x_2) = 1 + \partial_1\phi(x_1, x_2)^2 + \partial_2\phi(x_1, x_2)^2.$$

(ii) **Sphäre:** Es seien  $U = \mathbb{R}^2, G = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ ,

$$\Phi(\varphi, \psi) = (R \cos \varphi \sin \psi, R \sin \varphi \sin \psi, R \cos \psi) \text{ mit } R > 0$$

und  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück mit der Parametrisierung  $\Phi$ , mit  $\partial\mathcal{F} = \emptyset$  und mit

$$g_\Phi(\varphi, \psi) = R^4 \sin^2 \psi.$$

(iii) **Kegelmantel:** Es seien  $U = \mathbb{R}^2, G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ ,

$$\Phi(\varphi, z) = ((1 - z) \cos \varphi, (1 - z) \sin \varphi, z)$$

und  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (1 - z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück mit der Parametrisierung  $\Phi$ , mit  $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  und mit

$$g_{\Phi}(\varphi, z) = \sqrt{2}z.$$

(iv) **Zylindermantel:** Es seien  $U = \mathbb{R}^2, G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$ ,

$$\Phi(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \text{ mit } R > 0$$

und  $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, 0 \leq z \leq 1\}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück mit der Parametrisierung  $\Phi$ , mit  $\partial\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2, z = \pm 1\}$  und

$$g_{\Phi}(\varphi, z) = R.$$

(v) **Torus:** Es seien  $U = \mathbb{R}^2, G = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ ,

$$\Phi(\varphi, \psi) = ((R + r \cos \psi) \cos \varphi, (R + r \cos \psi) \sin \varphi, r \sin \psi) \text{ mit } R > r > 0$$

und  $\mathcal{F} = \Phi(\bar{G})$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück mit der Parametrisierung  $\Phi$  mit  $\partial\mathcal{F} = \emptyset$  und mit

$$g_{\Phi}(\varphi, \psi) = r^2(R + r \cos \psi).$$

**(Nichtorientiertes) Flächenintegral von Funktionen:** Es seien  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  ein Flächenstück,  $\Phi$  eine Parametrisierung von  $\mathcal{F}$  mit dem Parameterbereich  $\bar{G}$  und  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} f dF := \int_G f(\Phi(x)) \|\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x)\| dx = \int_G f(\Phi(x)) \sqrt{g_{\Phi}(x)} dx$$

Integral von  $f$  über  $\mathcal{F}$  (und ist nur von  $f$  und  $\mathcal{F}$ , nicht aber von  $\Phi$  abhängig). Die Zahl

$$\text{mes}\mathcal{F} := \int_{\mathcal{F}} dF = \int_G \|\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x)\| dx = \int_G \sqrt{g_{\Phi}(x)} dx$$

heißt Flächeninhalt von  $\mathcal{F}$ . Leider gibt es für den Flächeninhalt eines Flächenstücks keine einfache Definition, die vergleichbar wäre mit der Definition (4.3) der Länge einer Kurve als Supremum der Längen aller eingeschriebenen Polygonzüge.

**Interpretation:** Wenn  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  eine dünne Schale im Raum beschreibt und  $f : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$  die Massedichte der Schale (Masse pro Fläche), so ist  $\int_{\mathcal{F}} f dF$  die Gesamtmasse der Schale.

**Beispiel:** Es sei  $G = (a, b) \times (c, d)$  ein Rechteck. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_G \|\partial_1 \Phi(x, y) \times \partial_2 \Phi(x, y)\| dx dy \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j, k=1}^m \frac{(b-a)(d-c)}{m^2} \left\| \partial_1 \Phi \left( a + j \frac{b-a}{m}, c + k \frac{d-c}{m} \right) \times \partial_2 \Phi \left( a + j \frac{b-a}{m}, c + k \frac{d-c}{m} \right) \right\|. \end{aligned}$$

Die Summanden in der rechten Seite sind die Flächen der Parallelogramme, die durch die Vektoren

$$\frac{b-a}{m} \partial_1 \Phi \left( a + j \frac{b-a}{m}, c + k \frac{d-c}{m} \right) \text{ und } \frac{d-c}{m} \partial_2 \Phi \left( a + j \frac{b-a}{m}, c + k \frac{d-c}{m} \right)$$

aufgespannt sind.

**Orientierbare und orientierte Flächenstücke:** Zwei Parametrisierungen  $\Phi$  und  $\Psi$  eines Flächenstücks  $\mathcal{F}$  mit Parameterbereichen  $\bar{G}$  und  $\bar{H}$  heißen gleichorientiert, wenn gilt

$$\langle \partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x), \partial_1 \Psi(y) \times \partial_2 \Psi(y) \rangle > 0 \text{ für alle } x \in G, y \in H \text{ mit } \Phi(x) = \Psi(y).$$

Das ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Parametrisierungen von  $\mathcal{F}$ , und es existieren mindestens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.  $\mathcal{F}$  heißt orientierbar, wenn genau zwei verschiedene Äquivalenzklassen existieren. Wenn  $\mathcal{F}$  orientierbar ist, so heißt  $\mathcal{F}$  gemeinsam mit einer der beiden Äquivalenzklassen orientiertes Flächenstück oder Flächenstück mit vorgegebener Drehrichtung. Die Parametrisierungen aus dieser ausgewählten Äquivalenzklasse heißen positiv orientiert.

**(Orientiertes) Flächenintegral von Vektorfeldern:** Es seien  $\mathcal{F}$  ein orientiertes Flächenstück,  $\Phi$  eine positiv orientierte Parametrisierung von  $\mathcal{F}$  mit dem Parameterbereich  $\bar{G}$  und  $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} v \cdot dF := \int_G \langle v(\Phi(x)), \partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x) \rangle dx = \int_G \det \begin{bmatrix} v_1(\Phi(x)) & v_2(\Phi(x)) & v_3(\Phi(x)) \\ \partial_1 \Phi_1(x) & \partial_1 \Phi_2(x) & \partial_1 \Phi_3(x) \\ \partial_2 \Phi_1(x) & \partial_2 \Phi_2(x) & \partial_2 \Phi_3(x) \end{bmatrix} dx$$

Integral von  $v$  über  $\mathcal{F}$  (oder Fluß von  $v$  durch  $\mathcal{F}$ ), und diese Zahl ist nur von  $v$  und  $\mathcal{F}$ , nicht aber von  $\Phi$  abhängig.

**Einheitsnormalenfelder:** Es sei  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück, dann gilt:

(i)  $\mathcal{F}$  ist orientierbar genau dann, wenn eine stetige Abbildung  $n : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^3$  existiert so dass für alle  $y \in \mathcal{F}$  gilt  $\|n(y)\| = 1$  und  $\langle n(y), u \rangle = 0$  für alle Tangentialvektoren  $u$  an  $\mathcal{F}$  in  $y$ . Die Abbildung  $n$  heißt dann Einheitsnormalenfeld auf  $\mathcal{F}$ , und es gilt für jede Parametrisierung  $\Phi$  von  $\mathcal{F}$

$$n(\Phi(x)) = \pm \frac{\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x)}{\|\partial_1 \Phi(x) \times \partial_2 \Phi(x)\|} \quad (4.11)$$

In Fall (4.10) gilt

$$n(\Phi(x)) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \partial_1 \phi(x)^2 + \partial_2 \phi(x)^2}} \begin{bmatrix} -\partial_1 \phi(x) \\ -\partial_2 \phi(x) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Wenn  $\mathcal{F}$  orientiert ist, so heißt das Einheitsnormalenfeld auf  $\mathcal{F}$ , das durch (4.11) mit dem Vorzeichen Plus und beliebiger positiv orientierter Parametrisierung  $\Phi$  definiert ist, positiv orientiert.

(iii) Wenn  $n$  das positiv orientierte Einheitsnormalenfeld auf  $\mathcal{F}$  ist, so gilt

$$\int_{\mathcal{F}} v \cdot dF = \int_{\mathcal{F}} \langle v, n \rangle dF.$$

Dabei ist das rechte Integral das (nichtorientierte) Flächenintegral von der Funktion  $y \in \mathcal{F} \mapsto \langle v(y), n(y) \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Beispiele:** (i) Graphen, Sphären, Kegel- und Zylindermäntel und Tori sind orientierbar.

(ii) **Möbiussches Band:** Es seien  $U = \mathbb{R}^2, G = (0, \pi) \times (-1, 1)$ ,

$$\Phi(\varphi, s) = ((1 - s \sin \varphi) \cos 2\varphi, (1 - s \sin \varphi) \sin 2\varphi, s \cos \varphi)$$

und  $\mathcal{F} = \Phi(\overline{G})$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  ein Flächenstück mit der Parametrisierung  $\Phi$ , und

$$\partial\mathcal{F} = \{(1 - \sin \varphi) \cos 2\varphi, (1 - \sin \varphi) \sin 2\varphi, \cos \varphi) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Das Flächenstück  $\mathcal{F}$  ist nicht orientierbar weil

$$\partial_\varphi\Phi(0,0) = \partial_\varphi\Phi(\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_s\Phi(0,0) = -\partial_s\Phi(\pi,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

also

$$\lim_{\varphi \downarrow 0} \partial_\varphi\Phi(\varphi,0) \times \partial_s\Phi(\varphi,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\lim_{\varphi \uparrow \pi} \partial_\varphi\Phi(\varphi,0) \times \partial_s\Phi(\varphi,0).$$

**Interpretation:** Wenn der Vektor  $v(x) \in \mathbb{R}^3$  die Geschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit am Ort  $x \in \mathbb{R}^3$  beschreibt, so ist  $\int_{\mathcal{F}} v \cdot dF$  das Volumen, das in einer Zeiteinheit durch das orientierte Flächenstück  $\mathcal{F}$  in die Richtung des positiv orientierten Einheitsnormalenfeldes fließt, der sogenannte **Durchsatz** von  $v$  durch  $\mathcal{F}$  in die Richtung des positiv orientierten Einheitsnormalenfeldes. Insbesondere, weil auf dem Möbiusschen Band kein stetiges Einheitsnormalenfeld existiert, so existiert für das Möbiussche Band kein sinnvoller Durchsatz-Begriff.

#### 4.9 Satz von Stokes

**Induzierte Orientierung:** Es sei  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  ein orientiertes Flächenstück, und  $\partial\mathcal{F}$  bestehe aus endlich vielen disjunkten geschlossenen  $C^1$ -Kurven  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$ , d.h.

$$\partial\mathcal{F} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_m, \quad \mathcal{K}_j \cap \mathcal{K}_k = \emptyset \text{ für } j \neq k. \quad (4.12)$$

Dann ist die sogenannte induzierte Orientierung von  $\mathcal{K}_j$  folgendermaßen definiert: Wähle eine (beliebige) positiv orientierte Parametrisierung  $\Phi$  mit Parameterbereich  $G$  von  $\mathcal{F}$  und einen (beliebigen) Punkt  $y = \Phi(x) \in \mathcal{K}_j$  (dann gilt  $x \in \partial G$ ) so dass  $\mathcal{K}_j$  in  $y$  differenzierbar ist. Wähle eine stetig differenzierbare Abbildung  $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $\delta(0) = y$  so dass  $\delta(s) \in G$  für alle  $s \in (0, 1]$  und dass  $\Phi'(x)\delta'(0)$  nicht tangential zu  $\mathcal{K}_j$  ist. Definiere  $\tau(y)$  als den Tangentialvektor an  $\mathcal{K}_j$  in  $y$  mit der Länge Eins, für den gilt, dass die drei Vektoren  $\partial_1\Phi(x) \times \partial_2\Phi(x)$ ,  $\tau(\Phi(x))$  und  $\Phi'(x)\delta'(0)$  ein positiv orientiertes Dreibein bilden. Mit anderen Worten: Wenn man von "oben" (d.h. in Richtung von  $-\partial_1\Phi(x) \times \partial_2\Phi(x)$ ) auf  $\mathcal{F}$  schaut und sich in der Durchlaufrichtung von  $\mathcal{K}_j$  bewegt, so soll  $\mathcal{F}$  links liegen. Das so (von der Wahl von  $\delta$  unabhängig) definierte Einheitstangentenfeld  $\tau$  an  $\mathcal{K}_j$  definiert nun die induzierte Durchlaufrichtung von  $\mathcal{K}_j$ .

**Satz von Stokes:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  ein orientiertes Flächenstück mit (4.12) und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} v \cdot dF = \sum_{j=1}^m \int_{\mathcal{K}_j} v \cdot d\gamma =: \int_{\partial\mathcal{F}} v \cdot d\gamma.$$

Dabei sind auf der rechten Seite die orientierten Kurvenintegrale bzgl. der induzierten Orientierungen der geschlossenen Kurven  $\mathcal{K}_j$  zu verstehen.

**Koordinatenunabhängige Definition und Interpretation der Rotation:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Geschwindigkeitsfeld,  $x_0 \in M$  und  $n \in \mathbb{R}^3$  sei ein Einheitsvektor, d.h.  $\|n\| = 1$ . Ferner sei  $\mathcal{F}_r \subset M$  eine ebene Kreisscheibe mit Mittelpunkt in  $x_0$  und Radius  $r > 0$ , auf der  $n$  orthogonal ist, und  $\mathcal{F}_r$  sei durch  $n$  orientiert, und der Rand  $\partial\mathcal{F}_r$  sei mit der induzierten Orientierung versehen. Dann ist

$$v_\tau(r) := \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\mathcal{F}_r} v \cdot d\gamma$$

die mittlere tangentielle Geschwindigkeit von  $v$  bzgl.  $\mathcal{F}_r$ , also die Zirkulation von  $v$  bzgl.  $\mathcal{F}_r$ , dividiert durch die Länge von  $\mathcal{F}_r$ . Es sei z.B.  $v_\tau > 0$ . Wir betrachten die gleichförmige Rotation um die Achse  $n$  in Richtung der induzierten Orientierung von  $\partial\mathcal{F}_r$ , deren Geschwindigkeitsvektoren in  $\partial\mathcal{F}_r$  alle die Norm  $v_\tau(r)$  besitzen. Die Winkelgeschwindigkeit dieser gleichförmigen Rotation ist  $v_\tau(r)/r$ , und es folgt

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{v_\tau(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\partial\mathcal{F}_r} v \cdot d\gamma = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\mathcal{F}_r} \operatorname{rot} v \cdot dF = \frac{1}{2} \langle (\operatorname{rot} v)(x_0), n(x_0) \rangle.$$

**Rotation des Kreuzproduktes zweier Vektorfelder:** Wenn  $v, w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei differenzierbare Vektorfelder sind, so gilt

$$\operatorname{rot}(v \times w) = \sum_{j=1}^3 (w_j \partial_j v_j - v_j \partial_j w_j) + v \sum_{j=1}^3 \partial_j w_j - w \sum_{j=1}^3 \partial_j v_j. \quad (4.13)$$

Dafür schreibt man auch formal

$$\nabla \times (v \times w) = \langle w, \nabla \rangle v - \langle v, \nabla \rangle w + \langle \nabla, w \rangle v - \langle \nabla, v \rangle w.$$

Bei solchen formalen Schreibweisen ist aber Vorsicht geboten: Es gilt im allgemeinen

$$\langle v, \nabla \rangle \neq \langle \nabla, v \rangle.$$

Deshalb entsteht ein wesentlicher Unterschied zur Graßmann-Identität

$$u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

die gilt, wenn  $u$  ein weiteres Vektorfeld ist.

**Beispiel:** Es sei  $\omega \in \mathbb{R}^3$  ( $\omega \neq 0$ ) die Winkelgeschwindigkeit einer gleichförmigen Drehung des Raumes  $\mathbb{R}^3$  um die durch  $\omega$  aufgespannte Achse. Dann ist die Geschwindigkeit am Ort  $y \in \mathbb{R}^3$  zeitlich konstant gleich  $\omega \times y$ , und die Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes ist wegen (4.13)

$$\operatorname{rot}(\omega \times y) = 2\omega.$$

Es sei  $\mathcal{F}_r \subset \mathbb{R}^3$  die Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Nullpunkt und Radius  $r > 0$ , die orthogonal zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist. Sie sei orientiert durch den Einheitsnormalenvektor  $\omega/\|\omega\|$ , und der Rand  $\partial\mathcal{F}_r$  sei mit der induzierten Orientierung versehen. Dann ist die Zirkulation des Geschwindigkeitsfeldes entlang des Kreises  $\partial\mathcal{F}_r$  und damit der Fluß der Rotation dieses Geschwindigkeitsfeldes durch die Kreisscheibe  $\mathcal{F}_r$  gleich

$$\int_{\partial\mathcal{F}_r} (\omega \times y) \cdot d\gamma = \int_{\mathcal{F}_r} \operatorname{rot}(\omega \times y) \cdot dF = 2 \int_{\mathcal{F}_r} \omega \cdot dF = 2\|\omega\|\pi r^2.$$

Mit anderen Worten: In diesem Beispiel kann die Zirkulation  $\int_{\partial\mathcal{F}_r} (\omega \times y) \cdot d\gamma$  berechnet werden ohne dass eine Parametrisierung von  $\partial\mathcal{F}_r$  eingeführt werden muß.

**Satz von Stokes für ebene Gebiete:** Es seien  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge  $\mathcal{K} \subset X$  eine geschlossene Kurve, und  $G \subset X$  sei das von  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$  umschlossene beschränkte ebene Gebiet (nach dem Jordanschen Kurvensatz). Die Orientierung von  $\mathcal{K}$  sei als Durchlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn gewählt. Dann gilt für alle stetig differenzierbaren Vektorfelder  $v : X \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_G (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{K}} v_1 dx_1 + v_2 dx_2.$$

Dabei ist das Integral auf der linken Seite ein zweidimensionales Integral im Sinne von Kapitel 3.1, und das Integral auf der rechten Seite ist ein Kurvenintegral (in der Schreibweise (4.6)).

#### 4.10 Satz von Gauß

**Gebiete mit stückweise glattem Rand:** Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  beschränkt, offen und bogenzusammenhängend, und es gelte

$$\partial\Omega = \bigcup_{k=1}^m \mathcal{F}_k, \quad (4.14)$$

wobei  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$  Flächenstücke (im Sinne von Kapitel 3.6) sind mit

$$\mathcal{F}_j \cap \mathcal{F}_k \subseteq \partial\mathcal{F}_j \cap \partial\mathcal{F}_k \text{ für } j \neq k.$$

Jedes Flächenstück  $\mathcal{F}_k$  sei orientiert durch ein Einheitsnormalenfeld  $n_k : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ , und es gelte

$$\forall k = 1, \dots, m \exists \varepsilon_k > 0 \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_k) \forall x \in \mathcal{F}_k : x + \varepsilon n_k(x) \notin \Omega, x - \varepsilon n_k(x) \in \Omega. \quad (4.15)$$

Dann heißt  $\Omega$  (beschränktes) Gebiet mit stückweise glattem Rand, und  $n_k(x)$  heißt äußere Einheitsnormale an  $\Omega$  in  $x \in \mathcal{F}_k$ . Die äußeren Einheitsnormalen sind überall im (topologischen) Rand  $\partial\Omega$ , evtl. mit Ausnahme der (geometrischen) Ränder  $\partial\mathcal{F}_k$ , definiert. Dieses Vektorfeld, das “fast überall” in  $\partial\Omega$  (mit Ausnahme von “Ecken und Kanten”) definiert ist, heißt äußeres Einheitsnormalenfeld an  $\partial\Omega$ . Die Bedingung (4.15) bedeutet, dass jede hinreichend kleine Kugel um jeden Punkt  $x \in \partial\Omega$  durch  $\partial\Omega$  in einen bogenzusammenhängenden “inneren” Teil (der Teilmenge von  $\Omega$  ist) und einen bogenzusammenhängenden “äußeren” Teil (der Teilmenge von  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$  ist) zerschnitten wird.

**Beispiele:** (i) Polyeder, Zylinder, Kegel, Kugeln, Ellipsoide und Tori sind Gebiete mit stückweise glattem Rand.

(ii) Wenn man z.B. aus einer Kugel einen inneren Punkt (z.B. den Mittelpunkt) oder eine Strecke (z.B. eine Achse durch den Mittelpunkt) entfernt, so ist die so entstandene Menge kein Gebiet mit stückweise glattem Rand, weil (4.14) nicht erfüllt ist.

(iii) Die “geschlitzte” Kugel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \setminus \{(x, y, 0) : x > 0\}$$

ist kein Gebiet mit stückweise glattem Rand, weil (4.15) nicht erfüllt ist (entlang des Schlitzes gibt es kein “außen”).

**Satz von Gauß:** Es seien  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit stückweise glattem Rand mit (4.14),  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  offen mit  $\overline{\Omega} \subset U$  und  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v \, dx = \sum_{k=1}^m \int_{\mathcal{F}_k} v \cdot dF =: \int_{\partial\Omega} v \cdot dF \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} v := \sum_{j=1}^3 \partial_j v_j, \quad (4.16)$$

und die Funktion  $\operatorname{div} v$  heißt Divergenz der Quellendichte des Vektorfeldes  $v$ . Anstelle von  $\operatorname{div} v$  schreibt man auch  $\nabla \cdot v$ .

**Koordinatenunabhängige Definition und Interpretation der Divergenz:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $x_0 \in M$  fixiert,  $K_r \subset M$  die Kugel mit Mittelpunkt in  $x_0$  und Radius  $r > 0$ , und  $n : \partial K_r \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei das äußere Einheitsnormalenvektorfeld. Dann gilt

$$\operatorname{div} v(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{K_r} \operatorname{div} v \, dx}{\operatorname{mes} K_r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \int_{\partial K_r} \langle v, n \rangle dF.$$

Zum Beispiel, wenn  $v$  das Geschwindigkeitsfeld einer Stömung ist, so ist  $\operatorname{div} v$  die Dichte (pro Volumen) der Quelleistung (Volumen pro Zeit) von der Strömung.

**Quellenfreie Vektorfelder:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und es gelte  $\operatorname{div} v(x) = 0$  für alle  $x \in M$ . Dann heißt  $v$  quellenfrei oder solenoidal, und es gilt

$$\int_{\partial\Omega} \langle v, n \rangle dF = 0$$

für jedes Gebiet  $\Omega$  mit stückweise glattem Rand und  $\overline{\Omega} \subset M$ .

**Wirbelfreie Vektorfelder:** Es seien  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  eine offene Menge,  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und es gelte  $\operatorname{rot} v(x) = 0$  für alle  $x \in M$ . Dann heißt  $v$  wirbelfrei. Insbesondere ist jedes Gradientenfeld wirbelfrei. Wenn  $M$  zusätzlich einfach zusammenhängend ist, so ist jedes wirbelfreie Vektorfeld ein Gradientenfeld, und seine Zirkulation entlang jeder geschlossenen Kurve ist Null.

**Spezialfälle des Satzes von Gauß:** (i) Wenn  $v$  nur eine nicht verschwindende Komponente hat, z.B. die  $j$ -te Komponente im Punkt  $x \in \Omega$  sei  $f(x)$ , alle anderen seien Null, dann folgt

$$\int_{\Omega} \partial_j f \, dx = \int_{\partial\Omega} f n_j \, dF. \quad (4.17)$$

Dabei ist  $n_j$  die  $j$ -te Komponente des äußeren Einheitsnormalenfeld an  $\partial\Omega$ . Das kann man auch schreiben als

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dx = \int_{\partial\Omega} f n \, dF, \quad (4.18)$$

wenn man die Integrale über die Vektorfelder  $\nabla f$  und  $f n$  in (4.18) als Vektoren versteht, deren Komponenten die Zahlen in (4.17) sind. Wenn man ebenso komponentenweise das Integral über die Vektorfelder  $\operatorname{rot} v$  und  $v \times n$  interpretiert und (4.17) anwendet, so folgt

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \times n \, dF.$$

(ii) Wenn  $f$  das Produkt zweier Funktionen  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist, so folgt die **Formel der partiellen Integration**

$$\int_{\Omega} \partial_j g h \, dx = - \int_{\Omega} g \partial_j h \, dx + \int_{\partial\Omega} g h n_j \, dF.$$

(iii) Wenn  $v$  ein Gradientenfeld mit einem Potential  $\Phi$  ist, so folgt

$$\int_{\Omega} \Delta \Phi \, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla \Phi \cdot dF = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla \Phi, n \rangle dF.$$

Dabei ist die Funktion

$$\Delta \Phi := \operatorname{div} \nabla \Phi = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 \Phi,$$

das Bild der Funktion  $\Phi$  nach Anwendung des sogenannten Laplace-Operators  $\Delta$ , und

$$\langle \nabla \Phi(x), n(x) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \varepsilon n(x)) - \Phi(x)}{\varepsilon}$$

ist die Richtungsableitung von  $\Phi$  im Punkt  $x \in \partial\Omega$  in Richtung der äußeren Normalen  $n(x)$ . Anstelle von  $\Delta \Phi$  schreibt man auch  $\nabla^2 \Phi$ .

(iv) **Greensche Formeln:** Wenn  $\Phi$  das Produkt zweier Funktionen  $g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist, so folgt

$$\int_{\Omega} (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) \, dx = \int_{\partial\Omega} f \partial_n g \, dF$$

und deshalb

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) \, dx = \int_{\partial\Omega} (f \partial_n g - g \partial_n f) \, dF.$$

**Produktregeln für den Nabla-Operator:** Es seien  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare skalare Funktionen und  $u, v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  differenzierbare Vektorfelder. Wenn man, wie in der Physik üblich, den Gradienten von  $f$  mit  $\nabla f$  (vgl. (3.14)), die Rotation von  $u$  mit  $\nabla \times u$  (vgl. (4.8)), die Divergenz von  $u$  mit  $\nabla \cdot u$  (vgl. (4.16)) und das Euklidische Skalarprodukt von  $u$  und  $v$  mit  $u \cdot v$  bezeichnet, so ergeben sich u.a. folgende Produktregeln:

$$\begin{aligned} \nabla(fg) &= f \nabla g + g \nabla f, \\ \nabla \cdot (fu) &= \nabla f \cdot u + f(\nabla \cdot u), \\ \nabla \times (fu) &= \nabla f \times u + f(\nabla \times u), \\ \nabla(u \cdot v) &= (\nabla \cdot u)v + (\nabla \times v)u + u \times (\nabla \times v) + v \times (\nabla \times u), \\ \nabla \cdot (u \times v) &= (\nabla \times u) \cdot v - (\nabla \times v) \cdot u. \end{aligned}$$

Um analog eine Formel für  $\nabla \times (u \times v)$  aufzuschreiben, braucht man neben den Differentialoperatoren Gradient, Rotation und Divergenz weitere, z.B.

$$u \cdot \nabla := u_1 \partial_1 + u_2 \partial_2 + u_3 \partial_3$$

(vgl. (4.13)).