

Musterklausur zum Beifach Mathematik: Analysis II

1. Aufgabe (3 Punkte) Wann nennt man eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und wann abgeschlossen? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

2. Aufgabe (4 Punkte) Was ist eine Nullmenge (oder Menge vom Maß Null)? Erklären Sie, warum eine endliche Menge eine Nullmenge ist.

3. Aufgabe (4 Punkte) Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

einen Grenzwert für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ besitzen, und berechnen Sie diesen Grenzwert gegebenenfalls:

$$(a) f(x, y) = \frac{x}{y} \sin y, \quad (b) f(x, y) = \frac{x}{y} \sin x.$$

4. Aufgabe (5 Punkte) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Koordinatenachsen mit der Tangentialebene im Punkt $(1, 1, 1)$ an die Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2xyz - e^{xyz-1} = 1\}.$$

Geben Sie die Schnittgeraden dieser Tangentialebene mit den drei Koordinatenebenen an.

5. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) := 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$. Welche der lokalen Extrema sind lokale Minima, welche lokale Maxima?

6. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie $\int_M f(x, y) dx$ mit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ und $f(x, y) = x^2 + y^2$.

7. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie das orientierte Kurvenintegral $\int_K v \cdot d\gamma$, wobei

$$v(x, y, z) = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$$

und

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = xyz = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

ist und die Orientierung dadurch gegeben ist, dass der Teil von K , der in der xy -Ebene liegt, gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen werden soll.

8. Aufgabe (6 Punkte) Berechnen Sie das orientierte Flächenintegral $\int_F v \cdot dF$, wobei

$$v(x, y, z) = (x, y, z) \text{ und } F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

ist und die Orientierung von F durch die Normale, die zum Nullpunkt zeigt, gegeben ist.

Für die Klausur sind 120 Minuten Arbeitszeit vorgesehen. Als Hilfsmittel sind Taschenrechner sowie ein Blatt mit persönlichen Notizen zugelassen.