Musterlösungen zur 1. Serie: Konvergenz von Funktionen einer Variablen

1. Aufgabe Überprüfen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}} \\
\text{(b)} & \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}} \\
\text{(c)} & \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x} \\
\text{(d)} & \lim\limits_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x} \\
\text{(e)} & \lim\limits_{x\to\infty} (2^x+3^x)^{1/x} \\
\text{(f)} & \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) \\
\text{(g)} & \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) \\
\text{(h)} & \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^x-2^x}{x-2}
\end{array}
$$

Lösung für (a) Wegen $2^{1/x} \to 0$ für $x \uparrow 0$ folgt

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}} = 1.$$

Lösung für (b) Wegen $2^{-1/x} \to 0$ für $x \downarrow 0$ folgt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2^{-1/x}-1}{2^{-1/x}+1} = -1.$$

Lösung für (c) Wegen $(1+y)^{1/y} \to e$ für $y \downarrow 0$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6} = e^6.$$

Lösung für (d) Wegen $1 \le \ln x \le x$ und $x^{1/x} \to 1$ für $x \to \infty$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x} = 1.$$

Lösung für (e) Wegen $3 \le (2^x+3^x)^{1/x} \le (2\cdot 3^x)^{1/x} = 2^{1/x}\cdot 3 \le x$ und $2^{1/x} \to 1$ für $x \to \infty$ folgt

$$\lim_{x\to\infty} (2^x+3^x)^{1/x} = 3.$$

Lösung für (f) Wegen $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ gilt

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x(x+1)}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0.$$

Lösung für (g) Wegen (1) folgt

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\infty.$$

Lösung für (h) Nach der Regel von l'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^x-2^x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^{x\ln x}-2^x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{d}{dx}\left(e^{x\ln x}-2^x\right)=\lim_{x\to 2}\left(e^{x\ln x}(\ln x+1)-2^x\ln 2\right)=4.$$

***-Aufgabe** Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, d.h.

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \text{ für alle } x<y \text{ und } 0<\lambda<1. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \text{ für alle } x_0\in\mathbb{R}.$$

Lösung Es sei $z_0\in\mathbb{R}$ fixiert. Um zu zeigen, dass f stetig in z_0 ist, schätzen wir $f(z)$ für $z>z_0$ folgendermaßen ab: Wir setzen in (1) $x=z_0$ und $\lambda x+(1-\lambda)y=z$, also

$$\lambda=\frac{y-z}{y-z_0},\ 1-\lambda=\frac{z_0-z}{y-z_0},$$

und erhalten

$$f(z)\le\frac{y-z}{y-z_0}f(z_0)+\frac{z_0-z}{y-z_0}f(y) \text{ für alle } z_0<z<y. \tag{3}$$

Andererseits können wir in (1) auch $\lambda x+(1-\lambda)y=z_0$, also

$$\lambda=\frac{z-z_0}{z-x},\ 1-\lambda=\frac{z_0-x}{z-x}$$

und $y=z$ setzen und erhalten

$$f(z_0)\le\frac{z-z_0}{z-x}f(x)+\frac{z_0-x}{z-x}f(z) \text{ für alle } x<z_0<z. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\frac{z-x}{z_0-x}\left(f(z_0)-\frac{z-z_0}{z-x}f(x)\right)\le f(z)\le\frac{y-z}{y-z_0}f(z_0)+\frac{z_0-z}{y-z_0}f(y) \text{ für alle } x<z_0<z<y.$$

Wir fixieren nun x und y und führen den Grenzübergang $z\downarrow z_0$ durch und erhalten

$$\lim_{z\downarrow z_0}f(z)=f(z_0).$$

Analog behandelt man den Grenzwert $z\uparrow z_0$.