Musterlösungen zur 2. Serie: Konvergenz von Funktionen zweier Variabler

1. Aufgabe Überprüfen Sie, ob für die folgenden Funktionen $f :]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \tag{1}$$

und/oder

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) \tag{2}$$

und/oder

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \tag{3}$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad f(x,y) = x^y,\\
&\text{(b)} \quad f(x,y) = x\sin 2^y,\\
&\text{(c)} \quad f(x,y) = x\,2^{-y},\\
&\text{(d)} \quad f(x,y) = \frac{x}{y}\sin y,\\
&\text{(e)} \quad f(x,y) = \frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},\\
&\text{(f)} \quad f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y},\\
&\text{(g)} \quad f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{xy},\\
&\text{(h)} \quad f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2},\\
&\text{(i)} \quad f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2},\\
&\text{(j)} \quad f(x,y) = \frac{1}{y}\,x^{1/y}.
\end{aligned}$$

Lösung für (a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x^y = 0 \text{ für } y>0 \text{ und } \lim_{y\to 0} x^y = 1 \text{ für } x>0.$$

Folglich existieren die Grenzwerte (2) bzw. (3) und sind gleich Null bzw. Eins, und der Grenzwert (1) existiert nicht.

Lösung für (b) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x\sin 2^y = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y,\ \text{ weil } |\sin 2^y| \le 1 \text{ für alle } y.$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Außerdem gilt

$$\lim_{y\to 0} x \sin 2^y = x \sin 1 \text{ für alle } x.$$

Folglich existiert auch der Grenzwert (2) und ist gleich Null.

Lösung für (c) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x\, 2^{-y} = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y > 0, \text{ weil } |2^{-y}| \leq 1 \text{ für alle } y > 0.$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Außerdem gilt

$$\lim_{y\to 0} x\, 2^{-y} = x \text{ für alle } x.$$

Folglich existiert auch der Grenzwert (2) und ist gleich Null.

Lösung für (d) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{y} \sin y = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y,$$

weil

$$\frac{\sin y}{y} \leq 1 \text{ für alle } y > 0. \tag{4}$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Außerdem gilt

$$\lim_{y\to 0} = \frac{x}{y} \sin y = x \text{ für alle } x.$$

Folglich existiert auch der Grenzwert (2) und ist gleich Null.

Lösung für (e) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} = \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} = 0 \text{ für alle } y > 0,$$

also existiert der Grenzwert (3) und ist Null. Ferner gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{y\to 0} \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x} = \lim_{y\to 0} \cos \frac{y}{x} = 1,$$

also existiert der Grenzwert (2) und ist Eins, und der Grenzwert (1) existiert nicht.

Lösung für (f) Wegen (4) gilt $\frac{\sin(xy)}{y} \leq x$, also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(xy)}{y} = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y > 0,$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Außerdem gilt nach der Regel von l'Hospital

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{y\to 0} x \cos(xy) = x \text{ für alle } x.$$

Folglich existiert auch der Grenzwert (2) und ist gleich Null.

Lösung für (g) Wir benutzen den bekannten Grenzwert $\lim_{z\downarrow 0} z\ln z = 0$. Daraus folgt

$$|xy\ln(x^2+y^2)| \le \frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)| \to 0 \text{ bei } (x,y)\to(0,0).$$

Also gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} e^{xy\log(x^2+y^2)} = e^0 = 1.$$

Die beiden iterierten Grenzwerte (2) und (3) existieren ebenfalls und sind gleich (1):

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{xy} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\left(x^2+y^2\right)^{xy} = 1.$$

Lösung für (h) Die beiden iterierten Grenzwerte (2) und (3) existieren und sind verschieden:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} = \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1 \text{ und } \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} = \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Folglich existiert der Grenzwert (1) nicht.

Lösung für (i) Es gilt

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le |x| \to 0 \text{ für } x\to 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } y.$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (3) und sind gleich Null. Ferner gilt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} = \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Lösung für (j) Es gilt

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\,x^{1/y} = 0 \text{ gleichmäßig bzgl. } x\in[0,1/2],\ \text{weil } \frac{1}{y}\,x^{1/y} \le \frac{1}{y2^{1/y}} \text{ für alle } x\in[0,1/2].$$

Folglich existieren die Grenzwerte (1) und (2) und sind gleich Null. Außerdem gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{y}\,x^{1/y} = 0 \text{ für alle } y>0,$$

also existiert der Grenzwert (3) und ist Null.

***Aufgabe** Überprüfen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)$$

existiert und berechnen Sie ihn gegebenenfalls.

Lösung Nach der l'Hospital-Regel gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{y}\ln(1+y)}{1+\frac{x}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{y}\ln(1+y).$$

Also strebt $\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)$ für $x\to 0$ punktweise gegen $\frac{1}{y}\ln(1+y)$. Diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig weil nach der Taylor-Formel für alle $z>0$ gilt

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2(1+\theta)^2}\text{ für ein }\theta\in(0,z)\text{, das von }z\text{ abhängt,}$$

und folglich

$$z-\frac{z^2}{2}\le\ln(1+z)\le z,$$

also

$$\frac{x}{y}\ln(1+y)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)^2\le\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)\le\frac{x}{y}\ln(1+y),$$

also

$$\frac{1}{y}\ln(1+y)-\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}\ln(1+y)\right)^2\le\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)\le\frac{1}{y}\ln(1+y),$$

also

$$\left|\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)-\frac{1}{y}\ln(1+y)\right|\le\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}\ln(1+y)\right)^2\le\frac{x}{2}.$$

Wegen $\frac{1}{y}\ln(1+y)\to 1$ für $y\to 0$ folgt also

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{y}\ln(1+y)\right)=1.$$