Musterlösungen zur Serie 3: Ableitungen und Tangenten

1. Aufgabe Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(xy, \frac{x}{y}, x^y\right)$$

in den Punkten $(1,1)$, $(1,2)$ und $(2,2)$.

Lösung Es gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ yx^{y-1} & x^y \ln x \end{pmatrix} \quad \text{für } (x,y) \in \left]0,\infty\right[^2,$$

also

$$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f'(2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 4\ln 2 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte) Wieviele verschiedene differenzierbare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\partial_x f(x,y) = \partial_y f(x,y) = 1 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{1}$$

und

$$f(0,0) = 0 \tag{2}$$

existieren?

Lösung Aus $\partial_x f(x,y) = 1$ folgt $f(x,y) = x + a_y$, wobei $a_y \in \mathbb{R}$ eine Konstante bzgl. x ist, aber im allgemeinen von y abhängt. Analog folgt aus $\partial_y f(x,y) = 1$ dass $f(x,y) = y + b_x$, mit $b_x \in \mathbb{R}$. also $x + a_y = y + b_x$. Daraus folgt

$$x - b_x = y - a_y = c \ \text{ für alle } \ x, y \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, die weder von x noch von y abhängt. Insbesondere gilt $-a_0 = c$. Dies in (2) eingesetzt ergibt $0 = f(0,0) = a_0 = -c$. Wegen (3) folgt $b + x = x$ und $a_y = y$, also

$$f(x,y) = x + y. \tag{4}$$

Und umgekehrt: Offenbar erfüllt die Funktion (4) die Relationen (1) und (2). Mit anderen Worten: Es existiert genau eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(1) und (2), nämlich die Funktion (4).

3. Aufgabe (6 Punkte) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der drei Koordinatenebenen mit der Tangente an die Schraubenkurve

$$y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_3 = x, \quad x > 0 \tag{5}$$

im Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$.

Lösung In der Parametrisierung (5) der Schraubenkurve entspricht der Parameter $x = \pi/4$ dem Punkt $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \pi/4)$. Also ist eine Gleichung für die Tangente an die Schraubenkurve in diesem Punkt

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pi/4 \end{bmatrix} + \xi \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \cos x \\ \sin x \\ x \end{bmatrix}_{x=\pi/4} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ \pi/4 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_1 = 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = 1$, also sind $y_2 = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\xi = 2/\sqrt{2}$ und $y_3 = \pi/4 + \xi = \pi/4 + 1$ die zweite und die dritte Koordinate dieses Schnittunktes.
Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_2 = 0$ ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = -1$, also sind $y_1 = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\xi = 2/\sqrt{2}$ und $y_3 = \pi/4 + \xi = \pi/4 - 1$ die erste und die dritte Koordinate dieses Schnittunktes.
Der Schnittpunkt mit der Ebene $y_3 = 0$ schließlich ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{\pi}{4} + \xi = 0.$$

Wir erhalten $\xi = -\pi/4$, also sind $y_1 = 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\xi = 1/\sqrt{2}(1 + \pi/4)$ und $y_2 = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\xi = 1/\sqrt{2}(1 - \pi/4)$ die erste und die zweite Koordinate dieses Schnittunktes.

4. Aufgabe (6 Punkte) (i) Geben Sie die Anstiege der Tangenten an die Archimedische Spirale

$$y_1 = x \cos x, y_2 = x \sin x, \quad x > 0$$

in den Schnittpunkten dieser Spirale mit dem Strahl $y_1 = y_2 > 0$ an.
(ii) Zeigen Sie, dass diese Anstiege immer größer werden, je größer der Abstand des entsprechenden Schnittpunktes vom Koordinatenursprung wird, und dass die Anstiege konvergieren (gegen welchen Grenzwert?), wenn der Abstand gegen Unendlich strebt.

Lösung für (i) Die Schnittpunkte der Archimedischen Spirale mit dem Strahl $y_1 = y_2 > 0$ ergeben sich aus der Gleichung

$$y_1 = x\cos x = y_2 = x\sin x > 0,$$

also $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ mit $n = 0, 1, \ldots$. Die Tangenten an die Archimedische Spirale in diesen Schnittpunkten sind

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x\cos x \\ x\sin x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} + \xi \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x\cos x \\ x\sin x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}} \\ \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} \cos x - x\sin x \\ \sin x + x\cos x \end{bmatrix}_{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n} \\
&= \pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{8} + n\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} - \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} + \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Die Anstiege dieser Tangenten sind

$$a_n := \frac{1/\sqrt{2} + \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}}}{1/\sqrt{2} - \frac{\pi/4+2\pi n}{\sqrt{2}}} = \frac{1 + \pi/4 + 2\pi n}{1 - \pi/4 - 2\pi n}.$$

Lösung für (ii) Für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt $a_n < a_{n+1}$, weil gilt

$$(1 + \pi/4 + 2\pi n)\,(1 - \pi/4 - 2\pi(n+1)) < (1 + \pi/4 + 2\pi(n+1))\,(1 - \pi/4 - 2\pi n)\,.$$

Ferner ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$